Уфа : УГАТУ, 2010 Вестник УГАТУ Т. 14, № 2 (37). С. 96–103

ЭЛЕКТРОНИКА, ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА, РАДИОТЕХНИКА И СВЯЗЬ

УДК 519.7

А. И. ЗАИКО, А. О. КИТОВ

ИЗМЕРЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССА ЗАИКО С РАВНОМЕРНЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Исследуются алгоритмы измерения математического ожидания и дисперсии оригинального случайного процесса с равномерным законом распределения при восстановлении сигнала между отсчетами. Даны рекомендации по оптимизации этих измерений. *Случайный процесс*; *равномерное распределение*; *измерение характеристик*

ВВЕДЕНИЕ

Случайный процесс с равномерным законом распределения применяется для описания цифровых измерений при минимуме априорной информации об исследуемом сигнале. Чаще всего измерению подлежат их математическое ожидание и дисперсия. Поэтому оптимизация таких измерений является актуальной и перспективной задачей [1, 2].

Оценки математического ожидания $\langle\langle m_x\rangle\rangle$ и дисперсии $\langle\langle D_x\rangle$ при цифровых измерениях находятся по формулам [3]:

$$\langle\langle m_x\rangle\rangle = \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n} x_{il},\qquad \langle\langle D_x\rangle = \frac{1}{2n+1}\sum_{i=-n}^{n}(x_{il}-m_x)^2, \tag{1}$$

где x_{il} – i-й отсчет l-й отметки шкалы, причем – – n,…,–1,0,1,…,n; $2n + 1$ – количество отсчетов; m_x – истинное значение математического ожидания. При этом восстанавливающая функция сигнала между отсчетами не оговаривается, а погрешности квантования по уровню и дискретизации во времени находятся порознь и считаются независимыми [4]. По умолчанию это означает экстраполяцию реализации между отсчетами полиномом нулевой степени. Исследования показали, что такое восстановление является наилучшим только для винеровских процессов [1].

Статья посвящена оптимальному планированию и получению научно обоснованных рекомендаций по выбору алгоритмов и режимов измерений на примере случайных процессов с марковским свойством.

Контактная информация: (347) 272-11-62

1. ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ СИГНАЛА МЕЖДУ ОТСЧЕТАМИ

Пусть стационарный эргодический случайный процесс имеет нормированную корреляционную функцию $\rho(t_2 - t_1) = e^{-\alpha|t_2 - t_1|}$, где коэффициент динамичности $\alpha \in (0; \infty)$, погрешность квантования $2\Delta_к$, дискретизирован во времени с шагом T_0 и длительность реализации $(2n + 1)\,T_0$. При *экстраполяции* он характеризуется одномерной $w_1[X \mid \lambda; x_{il}]$ и двумерной $w_2[X_1, X_2 \mid \lambda_1, \lambda_2; x_{il}]$ условными плотностями распределения вероятностей [1]

$$w_1[X \mid \lambda; x_{il}] = \\ = \begin{cases} 1\big/\left[(X_в - X_н) - (X_в - X_н - 2\Delta_к)e^{-\alpha\lambda}\right], \\ 0 \le \lambda = t - t_i < T_0, \\ X_н + (x_{il} - \Delta_к - X_н)e^{-\alpha\lambda} \le X \le \\ \le X_в - (X_в - x_{il} - \Delta_к)e^{-\alpha\lambda}; \\ 0, \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$w_2[X_1, X_2 \mid \lambda_1, \lambda_2; x_{il}] = w_1[X_1 \mid \lambda_1; x_{il}] \times \\ \times \begin{cases} \dfrac{\delta(X_2 - X_1)}{(X_в - X_н) - (X_в - X_н - 2\Delta_к)e^{-\alpha\lambda_2}}, \\ 0 \le \lambda_1 = t_1 - t_i, \lambda_2 = t_2 - t_i < T_0, \\ X_н + (x_{il} - \Delta_к - X_н)e^{-\alpha\lambda_1} \le X_1 \le \\ \le X_в - (X_в - x_{il} - \Delta_к)e^{-\alpha\lambda_1}, \\ X_н + (x_{il} - \Delta_к - X_н)e^{-\alpha\lambda_2} \le X_2 \le \\ \le X_в - (X_в - x_{il} - \Delta_к)e^{-\alpha\lambda_2}; \\ 0, \text{ в остальных случаях;} \end{cases}$$

где $X_н$ и $X_в$ – нижняя и верхняя границы изменения случайного процесса; λ– текущее время между отсчетами; α – коэффициент динамичности; δ(•) – дельта-функция Дирака [1].

Тогда математическое ожидание $m(\lambda;\ x_{il})$, дисперсия $D(\lambda; x_{il})$ и корреляционная функция $R(\lambda_1, \lambda_2; x_{il})$ процесса при условии $x_{il} - \Delta_к \le$ $\le x(t_i) \le x_{il} + \Delta_к$ равны [1, 5]:

$$m(\lambda; x_{il}) = \int_{-\infty}^{\infty} X w_1[X \mid \lambda; x_{il}]dX = \\ = m_x + (x_{il} - m_x)\mathrm{e}^{-\alpha\lambda};$$

$$D(\lambda; x_{il}) = \int_{-\infty}^{\infty} [X - m(\lambda; x_{il})]^2 w_1[X|\lambda; x_{il}]dX = \\ = \left[\sigma_x - (\sigma_x - \sigma_\delta)\mathrm{e}^{-\alpha\lambda}\right]^2;$$

$$R(\lambda_1, \lambda_2; x_{il}) = \\ = \int\int_{-\infty}^{\infty} [X_1 - m(\lambda_1; x_{il})][X_2 - m(\lambda_2; x_{il})]\times \\ \times w_2[X_1, X_2 \mid \lambda_1, \lambda_2; x_{il}]dX_1 dX_2 = \\ = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\alpha(\lambda_1-\lambda_2)} D_\delta(\lambda_2; x_{il}), & 0 \le \lambda_2 \le \lambda_1 < T_0; \\ \mathrm{e}^{-\alpha(\lambda_2-\lambda_1)} D_\delta(\lambda_1; x_{il}), & 0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 < T_0, \end{cases}$$

где $m_x = (X_н + X_в)/2$ – математическое ожидание процесса; $\sigma_x = (X_в - X_н)/2\sqrt{3}$ и $\sigma_\delta = \Delta_к/\sqrt{3}$ – среднеквадратические отклонения процесса и погрешности отсчетов.

Если восстановить сигнал между отсчетами по условному математическому ожиданию $m(\lambda;\ x_{il})$, то дисперсия погрешности экстраполяции $D_\delta(\lambda;\ x_{il}) = D(\lambda;\ x_{il})$, а ее корреляционная функция $R_\delta(\lambda_1,\ \lambda_2;\ x_{il}) = R(\lambda_1,\ \lambda_2;\ x_{il})$ [1, 5].

Тогда оценки математического ожидания $\langle m_x\rangle_э$ и дисперсии $\langle D_x\rangle_э$, а также математические ожидания $m_{\delta m\,э}$, $m_{\delta D\,э}$ и корреляционные функции $R_{\delta m\,э}$, $R_{\delta D\,э}$ их погрешностей соответственно равны [1]:

$$\langle m_x\rangle_э = \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0}\langle\langle m_x\rangle\rangle + m_x\left(1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0}\right);$$

$$m_{\delta m\,э} = \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0}\left(\langle\langle m_x\rangle\rangle - m_x\right);$$

$$R_{\delta m\,э} = D_{\delta m\,э} = \frac{1}{(2n+1)\alpha T_0}\times\left\{2\sigma_x^2\left(1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0}\right) + \right. \\ + 4\sigma_x(\sigma_x - \sigma_\delta)\left(\mathrm{e}^{-\alpha T_0} - \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0}\right) + \\ \left. + \left((\sigma_x - \sigma_\delta)\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0}\right)^2 \alpha T_0\right\};$$

$$\langle D_x\rangle_э = \frac{1-\mathrm{e}^{-2\alpha T_0}}{2\alpha T_0}\langle\langle D_x\rangle + \sigma_x^2 - 2\sigma_x(\sigma_x - \sigma_\delta)\times \\ \times\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0} + (\sigma_x - \sigma_\delta)^2\frac{1-\mathrm{e}^{-2\alpha T_0}}{2\alpha T_0};$$

$$m_{\delta D\,э} = \frac{1-\mathrm{e}^{-2\alpha T_0}}{2\alpha T_0}\langle\langle D_x\rangle - (\sigma_x - \sigma_\delta)\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0}\times \\ \times\left[2\sigma_x - (\sigma_x - \sigma_\delta)\frac{1+\mathrm{e}^{-\alpha T_0}}{2}\right];$$

$$R_{\delta D\,э} = D_{\delta D\,э} \approx D_{\delta Dм\,э}\langle\langle D_x\rangle + D_{\delta Dа\,э} = \\ = \frac{1}{(2n+1)\alpha^2 T_0^2}\left\{\langle\langle D_x\rangle\left\{\sigma_x^2\left[\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0}\right)\times\right.\right.\right. \\ \times\left(1+5\mathrm{e}^{-\alpha T_0}\right) - 6\alpha T_0\mathrm{e}^{-2\alpha T_0}\right] + 2\sigma_x(\sigma_x - \sigma_\delta)\times \\ \times\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0}\right)\left[\left(1+\mathrm{e}^{-\alpha T_0}\right)^2 + 2 - 6\mathrm{e}^{-2\alpha T_0}\right] + \\ \left. + (\sigma_x - \sigma_\delta)^2\left(1-\mathrm{e}^{-2\alpha T_0}\right)^2\right\} + \\ + \frac{1}{5}\left\{\sigma_x^4\left[20\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0}\right) - 7\left(1-\mathrm{e}^{-2\alpha T_0}\right) - 6\alpha T_0\right] + \right. \\ + 2\sigma_x^3(\sigma_x - \sigma_\delta)\left[5\left(1-\mathrm{e}^{-2\alpha T_0}\right) + 20\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0}\right) - \right. \\ \left. - 18\left(1-\mathrm{e}^{-2\alpha T_0}\right)^2 - 30\alpha T_0\mathrm{e}^{-\alpha T_0}\right] + \\ + 3\sigma_x^2(\sigma_x - \sigma_\delta)^2\left[9\left(1-\mathrm{e}^{-2\alpha T_0}\right) - \right. \\ \left. - 10\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0}\right)^2 - 18\alpha T_0\mathrm{e}^{-2\alpha T_0}\right] + \\ + 2\sigma_x(\sigma_x - \sigma_\delta)^3\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha T_0}\right)^2\left(11+17\mathrm{e}^{-\alpha T_0}\right) + \\ \left. + (\sigma_x - \sigma_\delta)^4\left(1-\mathrm{e}^{-2\alpha T_0}\right)^2\right\},$$

где традиционные оценки $\langle\langle m_x\rangle\rangle$ и $\langle\langle D_x\rangle$ находятся по формулам (1).

2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СИГНАЛА МЕЖДУ ОТСЧЕТАМИ

При *интерполяции* процессов одно- и двумерные условные плотности вероятности распределений между отсчетами имеют вид [1]:

$$w_1[X \mid \lambda; x_{il}, x_{(i+1)r}] =$$
$$= \begin{cases} \left(1+e^{-\alpha T_0}\right) / \left[\left(X_в - X_н\right)\left(1-e^{-\alpha(T_0-\lambda)}\right)\times \right. \\ \left.\left(1-e^{-\alpha\lambda}\right) + 2\Delta_к\left(e^{-\alpha\lambda}+e^{-\alpha(T_0-\lambda)}\right)\right], \\ 0 \le \lambda < T_0, \\ X_н + \left(x_{il} - \Delta_к - X_н\right)e^{-\alpha\lambda} \times \\ \times \dfrac{1-e^{-2\alpha(T_0-\lambda)}}{1-e^{-2\alpha T_0}} + \left(x_{(i+1)r} - \Delta_к - X_н\right)\times \\ \times e^{-\alpha(T_0-\lambda)}\dfrac{1-e^{-2\alpha\lambda}}{1-e^{-2\alpha T_0}} \le X \le \\ \le X_в - \left(X_в - x_{il} - \Delta_к\right)e^{-\alpha\lambda} \times \\ \times \dfrac{1-e^{-2\alpha(T_0-\lambda)}}{1-e^{-2\alpha T_0}} - \left(X_в - x_{(i+1)r} - \Delta_к\right)\times \\ \times e^{-\alpha(T_0-\lambda)}\dfrac{1-e^{-2\alpha\lambda}}{1-e^{-2\alpha T_0}}; \\ 0, \quad \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$w_2[X_1, X_2 \mid \lambda_1, \lambda_2; x_{il}, x_{(i+1)r}] =$$
$$= w_1[X_1 \mid \lambda_1; x_{il}, x_{(i+1)r}]\times$$
$$\times \begin{cases} \left(1-e^{-2\alpha(T_0-\lambda_1)}\right) / \left(1-e^{-\alpha(\lambda_2-\lambda_1)}\right)\left[\left(X_в - X_н\right)\times \right. \\ \times\left(1-e^{-\alpha(T_0-\lambda_1)}\right)\left(1-e^{-\alpha(T_0-\lambda_2)}\right) + \\ \left. + 2\Delta_к e^{-\alpha(T_0-\lambda_2)}\left(1+e^{-\alpha(\lambda_2-\lambda_1)}\right)\right], \\ X_н + \left(x_{il} - \Delta_к - X_н\right)e^{-\alpha\lambda_1}\dfrac{1-e^{-2\alpha(T_0-\lambda_1)}}{1-e^{-2\alpha T_0}} + \\ + \left(x_{(i+1)r} - \Delta_к - X_н\right)e^{-\alpha(T_0-\lambda_1)}\dfrac{1-e^{-2\alpha\lambda_1}}{1-e^{-2\alpha T_0}} \le \\ \le X_1 \le X_в - \left(X_в - x_{il} - \Delta_к\right)e^{-\alpha\lambda_1}\times \\ \times\dfrac{1-e^{-2\alpha(T_0-\lambda_1)}}{1-e^{-2\alpha T_0}} - \left(X_в - x_{(i+1)r} - \Delta_к\right)\times \\ \times e^{-\alpha(T_0-\lambda_1)}\dfrac{1-e^{-2\alpha\lambda_1}}{1-e^{-2\alpha T_0}}; \\ X_н + \left(x_{(i+1)r} - \Delta_к - X_н\right)e^{-\alpha(T_0-\lambda_2)}\times \\ \times\dfrac{1-e^{-2\alpha(\lambda_2-\lambda_1)}}{1-e^{-2\alpha(T_0-\lambda_1)}} + \left(X_1 - X_н\right)e^{-\alpha(\lambda_2-\lambda_1)}\times \\ \times\dfrac{1-e^{-2\alpha(T_0-\lambda_2)}}{1-e^{-2\alpha(T_0-\lambda_1)}} \le X_2 \le X_в - \\ - \left(X_в - x_{(i+1)r} - \Delta_к\right)e^{-\alpha(T_0-\lambda_2)}\times \\ \times\dfrac{1-e^{-2\alpha(\lambda_2-\lambda_1)}}{1-e^{-2\alpha(T_0-\lambda_1)}} - \left(X_в - X_1\right)e^{-\alpha(\lambda_2-\lambda_1)}\times \\ \times\dfrac{1-e^{-2\alpha(T_0-\lambda_2)}}{1-e^{-2\alpha(T_0-\lambda_1)}}; \\ 0, \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда восстанавливающая функция реализации $m(\lambda; x_{il}, x_{(i+1)r})$ и характеристики ее погрешности $D_\delta(\lambda; x_{il}, x_{(i+1)r})$, $R_\delta(\lambda_1, \lambda_2; x_{il}, x_{(i+1)r})$ [1, 5]:

$$m(\lambda; x_{il}, x_{(i+1)r}) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} X w_1[X \mid \lambda; x_{il}, x_{(i+1)r}]dX =$$
$$= m_x + \left(x_{il} - m_x\right)e^{-\alpha\lambda}\frac{1-e^{-2\alpha(T_0-\lambda)}}{1-e^{-2\alpha T_0}} +$$
$$+ \left(x_{(i+1)r} - m_x\right)e^{-\alpha(T_0-\lambda)}\frac{1-e^{-2\alpha\lambda}}{1-e^{-2\alpha T_0}},$$
$$0 \le \lambda < T_0;$$
$$D_\delta(\lambda; x_{il}, x_{(i+1)r}) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[X - m(\lambda; x_{il}, x_{(i+1)r})\right]^2\times$$
$$\times w_1[X \mid \lambda; x_{il}, x_{(i+1)r}]dX =$$
$$= \left[\sigma_x - (\sigma_x - \sigma_\delta)\frac{e^{-\alpha\lambda} + e^{-\alpha(T_0-\lambda)}}{1+e^{-\alpha T_0}}\right]^2,$$
$$0 \le \lambda < T_0,$$
$$R_\delta(\lambda_1, \lambda_2; x_{il}, x_{(i+1)r}) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int\left[X_1 - m(\lambda_1; x_{il}, x_{(i+1)r})\right]\times$$
$$\times\left[X_2 - m(\lambda_2; x_{il}, x_{(i+1)r})\right]\times$$
$$\times w_2[X_1, X_2 \mid \lambda_1, \lambda_2; x_{il}, x_{(i+1)r}]dX_1 dX_2 =$$
$$= \begin{cases} e^{-\alpha(\lambda_1-\lambda_2)}\dfrac{1-e^{-2\alpha(T_0-\lambda_1)}}{1-e^{-2\alpha(T_0-\lambda_2)}}\times \\ \times D_\delta\left(\lambda_2; x_{il}, x_{(i+1)r}\right), \quad 0 \le \lambda_2 \le \lambda_1 \le T_0; \\ e^{-\alpha(\lambda_2-\lambda_1)}\dfrac{1-e^{-2\alpha(T_0-\lambda_2)}}{1-e^{-2\alpha(T_0-\lambda_1)}}\times \\ \times D_\delta\left(\lambda_1; x_{il}, x_{(i+1)r}\right), \quad 0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le T_0. \end{cases}$$

При большом количестве отсчетов $2n >> 1$ оценки математического ожидания и дисперсии, а также характеристики их погрешностей примут вид:

$$\langle m_x\rangle_и = \frac{2\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)}{\alpha T_0\left(1+e^{-\alpha T_0}\right)}\langle\langle m_x\rangle\rangle +$$
$$+ \left[1 - 2\frac{1-e^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0\left(1+e^{-\alpha T_0}\right)}\right]m_x;$$
$$m_{\delta m\, и} = \frac{2\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)}{\alpha T_0\left(1+e^{-\alpha T_0}\right)}\left(\langle\langle m_x\rangle\rangle - m_x\right);$$

$$R_{\delta m\,\text{и}} = D_{\delta m\text{и}} = \frac{2}{2n\alpha T_0}\left\{\sigma_x^2\left[1+\frac{2}{\alpha T_0}\ln\frac{1+e^{-\alpha T_0}}{2}\right]+\right.$$
$$+4\frac{\sigma_x(\sigma_x-\sigma_\delta)}{1+e^{-\alpha T_0}}\left[e^{-\alpha T_0}+\frac{1+e^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0}\ln\frac{1+e^{-\alpha T_0}}{2}\right]+$$
$$+2\left(\frac{\sigma_x-\sigma_\delta}{1+e^{-\alpha T_0}}\right)^2\left[\left(1+e^{-\alpha T_0}\right)e^{-\alpha T_0}+\frac{\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)^2}{\alpha T_0}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\left(1+e^{-\alpha T_0}\right)^2}{\alpha T_0}\ln\frac{1+e^{-\alpha T_0}}{2}\right]\right\};$$

$$\langle D_x\rangle_\text{и} =$$
$$=\frac{2}{\left(1-e^{-2\alpha T_0}\right)^2}\left[2\left(\frac{1-e^{-4\alpha T_0}}{4\alpha T_0}-e^{-2\alpha T_0}\right)\langle\langle D_x\rangle\rangle+\right.$$
$$\left.+\left(1+e^{-2\alpha T_0}-2\frac{1-e^{-2\alpha T_0}}{2\alpha T_0}\right)e^{-\alpha T_0}\langle\langle R_x(T_0)\rangle\rangle\right]+$$
$$+\sigma_x^2-4\frac{\sigma_x(\sigma_x-\sigma_\delta)}{1+e^{-\alpha T_0}}\frac{1-e^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0}+$$
$$+2\left(\frac{\sigma_x-\sigma_\delta}{1+e^{-\alpha T_0}}\right)^2\left(\frac{1-e^{-2\alpha T_0}}{2\alpha T_0}+e^{-\alpha T_0}\right);$$

$$m_{\delta D\,\text{и}} =$$
$$=\frac{2}{\left(1-e^{-2\alpha T_0}\right)^2}\left[2\left(\frac{1-e^{-4\alpha T_0}}{4\alpha T_0}-e^{-2\alpha T_0}\right)\langle\langle D_x\rangle\rangle+\right.$$
$$\left.+\left(1+e^{-2\alpha T_0}-2\frac{1-e^{-2\alpha T_0}}{2\alpha T_0}\right)e^{-\alpha T_0}\langle\langle R_x(T_0)\rangle\rangle\right]-$$
$$-2\frac{\sigma_x-\sigma_\delta}{1+e^{-\alpha T_0}}\left[2\sigma_x\frac{1-e^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0}-\frac{\sigma_x-\sigma_\delta}{1+e^{-\alpha T_0}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1-e^{-2\alpha T_0}}{2\alpha T_0}+e^{-\alpha T_0}\right)\right]\Bigg];$$

$$R_{\delta D\,\text{и}} = D_{\delta D\,\text{и}} \approx D_{\delta D\text{м и}}\langle\langle D_x\rangle\rangle + D_{\delta D\text{а и}},$$

где традиционные оценки при $n >> 1$

$$\langle\langle m_x\rangle\rangle=\frac{1}{2n}\sum_{i=-n}^{n-1}x_{il}=\frac{1}{2n}\sum_{i=-(n-1)}^{n}x_{il},$$
$$\langle\langle D_x\rangle\rangle=\frac{1}{2n}\sum_{i=-n}^{n-1}(x_{il}-m_x)^2=\frac{1}{2n}\sum_{i=-(n-1)}^{n}(x_{il}-m_x)^2;$$
$$\langle\langle R_x(T_0)\rangle\rangle=\frac{1}{2n}\sum_{i=-n}^{n-1}(x_{il}-m_x)\left(x_{(i+1)g}-m_x\right).$$

3. СРАВНЕНИЕ ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫХ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ

Оценки математических ожиданий $\langle m_x\rangle_\text{э}$, $\langle m_x\rangle_\text{и}$ и вероятностные характеристики погрешности их измерений при *экстраполяции* $m_{\delta m\,\text{э}}$, $D_{\delta m\,\text{э}}$ и *интерполяции* $m_{\delta m\,\text{и}}$, $D_{\delta m\,\text{и}}$ существенно отличаются. Так, нормированные значения математических ожиданий погрешностей при *экстраполяции* и *интерполяции* соответственно равны:

$$\frac{m_{\delta m\,\text{э}}}{\langle\langle m_x\rangle\rangle-m_x}=\frac{1-e^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0};$$
$$\frac{m_{\delta m\,\text{и}}}{\langle\langle m_x\rangle\rangle-m_x}=\frac{2\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)}{\alpha T_0\left(1+e^{-\alpha T_0}\right)}.$$

На рис. 1 приведено отношение $m_{\delta m\,\text{и}}/m_{\delta m\,\text{э}}$, из которого следует, при $\alpha T_0 \ge 7$ математическое ожидание погрешности измерения математического ожидания процесса при интерполяции почти в 2 раза больше, чем при экстраполяции. При $\alpha T_0 \le 0{,}01$ экстраполяция и интерполяция практически равноценны.

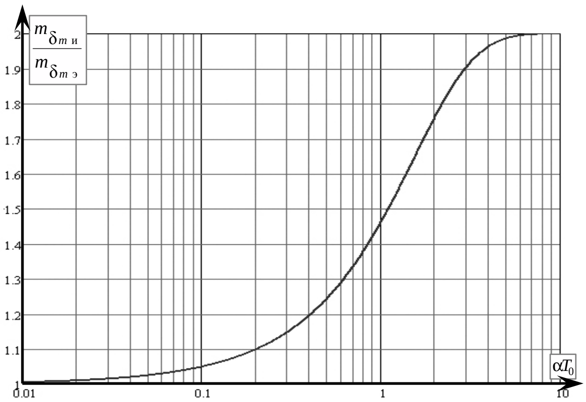

Рис. 1. Зависимость отношения $m_{\delta m\,\text{и}}/m_{\delta m\,\text{э}}$ оценок $\langle m_x\rangle_\text{и}, \langle m_x\rangle_\text{э}$ от αT_0

Относительные значения дисперсий погрешностей при *экстраполяции* и *интерполяции* соответственно равны:

$$\frac{D_{\delta m\,\text{э}}(2n+1)}{\sigma_\delta^2}=\frac{2}{\alpha T_0}\left\{\frac{\sigma_x^2}{\sigma_\delta^2}\left(1-\frac{1-e^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0}\right)+\right.$$
$$+2\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\left(e^{-\alpha T_0}-\frac{1-e^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0}\right)+\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)^2\times$$
$$\left.\times\left(\frac{1-e^{-\alpha T_0}}{\alpha T_0}\right)^2\frac{\alpha T_0}{2}\right\};$$

$$\frac{D_{\delta m\,\text{и}}2n}{\sigma_\delta^2}=\frac{4}{\alpha T_0}\left\{\frac{\sigma_x^2}{\sigma_\delta^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha T_0}\ln\frac{1+e^{-\alpha T_0}}{2}\right]+\right.$$
$$+2\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\left[\frac{e^{-\alpha T_0}}{1+e^{-\alpha T_0}}+\frac{1}{\alpha T_0}\ln\frac{1+e^{-\alpha T_0}}{2}\right]+$$
$$+\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)^2\left[\frac{e^{-\alpha T_0}}{1+e^{-\alpha T_0}}+\frac{\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)^2}{\alpha T_0\left(1+e^{-\alpha T_0}\right)^2}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\alpha T_0}\ln\frac{1+e^{-\alpha T_0}}{2}\right]\right\},$$

и изображены при различных значениях отношений σ_x / σ_δ на рис. 2 и 3.

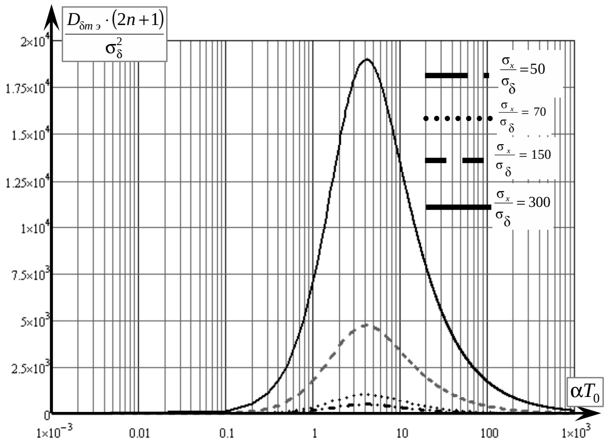

Рис. 2. Зависимость относительной дисперсии погрешности $D_{\delta m\,э}(2n+1)/\sigma_\delta^2$ от αT_0 для различных значений σ_x / σ_δ при экстраполяции

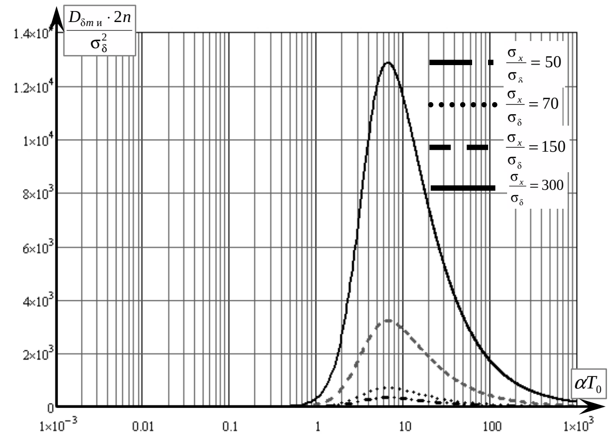

Рис. 3. Зависимость относительной дисперсии погрешности $D_{\delta m\,и}\,2n/\sigma_\delta^2$ от αT_0 для различных значений σ_x / σ_δ при интерполяции

Из графиков на рис. 2 видно, что при $\alpha T_0 \le$ $\le 0{,}1$ дисперсия погрешности $D_{\delta m\,э}$ мала и нарастает при $\alpha T_0 > 0{,}1$. Дисперсия погрешности $D_{\delta m\,и}$ на рис. 3 при $\alpha T_0 \le 1$ мала и только после этого начинает нарастать. Максимум дисперсии погрешности $D_{\delta m\,э}$ при σ_x / σ_δ = 300 в 1,46 раза превышает максимум дисперсии $D_{\delta m\,и}$, а при σ_x / σ_δ = 1 в 1,48 раза.

Отношение $D_{\delta m\,и}/D_{\delta m\,э}$ для различных значений σ_x / σ_δ приведено на рис. 4.

Из него следует, что при $\alpha T_0 \le 1$ дисперсия погрешности измерения математического ожидания при интерполяции существенно меньше, чем при экстраполяции. При $\alpha T_0 = 0$ она меньше в 2 раза. Это соотношение зависит от σ_x / σ_δ. Так, при σ_x / σ_δ = 300 $D_{\delta m\,и}/D_{\delta m\,э} \le 0{,}03$, если $0{,}05 \le$ αT_0 $\le$ 0,5, а при σ_x / σ_δ = 150 $D_{\delta m\,и}/D_{\delta m\,э} \le 0{,}03$, если $0{,}1 \le \alpha T_0 \le 0{,}5$.

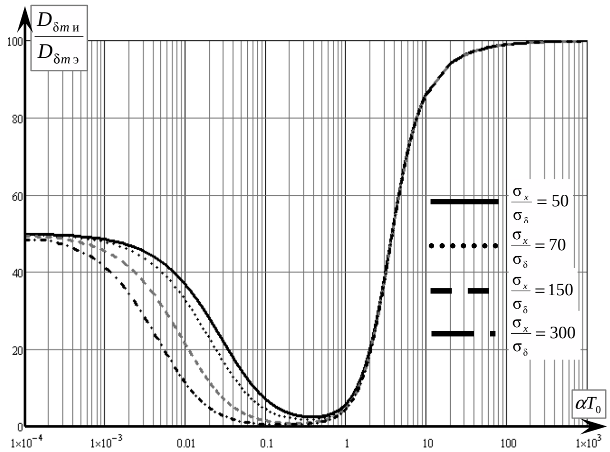

Рис. 4. Зависимость отношения $D_{\delta m\,и}/D_{\delta m\,э}$ от αT_0 для различных значений σ_x / σ_δ

Математические ожидания погрешностей измерений дисперсии D_x при *экстраполяции* $m_{\delta D\,э}$ и *интерполяции* $m_{\delta D\,и}$ содержат по отношению к оценке $\langle\langle D_x\rangle$ мультипликативные и аддитивные составляющие, которые также отличаются. Так, отношения мультипликативных $m_{\delta Dм\,и}/m_{\delta Dм\,э}$ и аддитивных $m_{\delta Da\,и}/m_{\delta Da\,э}$ составляющих математических ожиданий погрешностей равны:

$$\frac{m_{\delta Dм\,и}}{m_{\delta Dм\,э}}=\frac{2\left(1-e^{-2\alpha T_0}-2\alpha T_0 e^{-2\alpha T_0}\right)}{\left(1-e^{-2\alpha T_0}\right)^2};$$

$$\frac{m_{\delta Da\,и}}{m_{\delta Da\,э}}=\frac{2}{1+e^{-\alpha T_0}}\times$$
$$\times\left[-4\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)+\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(1-e^{-\alpha T_0}+\frac{2\alpha T_0 e^{-\alpha T_0}}{1+e^{-\alpha T_0}}\right)\right]\times$$
$$\times\frac{1}{-4\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)+\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\left(1-e^{-2\alpha T_0}\right)}\approx$$
$$\approx\frac{2}{1+e^{-\alpha T_0}}\times$$
$$\times\left[-4\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)+\left(1-e^{-\alpha T_0}+\frac{2\alpha T_0 e^{-\alpha T_0}}{1+e^{-\alpha T_0}}\right)\right]\times$$
$$\times\frac{1}{-\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)\left(3-e^{-\alpha T_0}\right)},$$

и приведены на рис. 5 и 6.

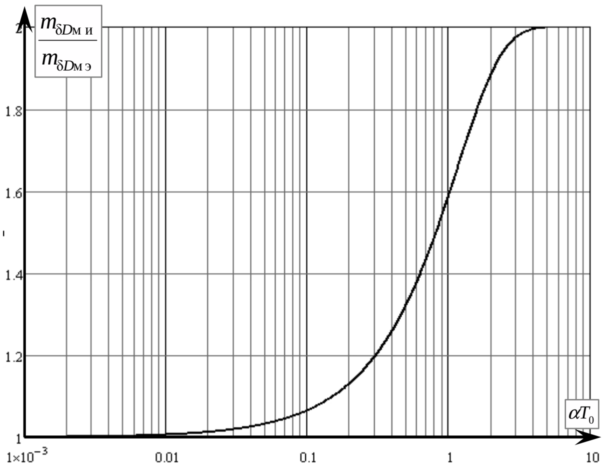

Рис. 5. Зависимость отношения $m_{\delta D\text{м и}}/m_{\delta D\text{м э}}$ от αT_0

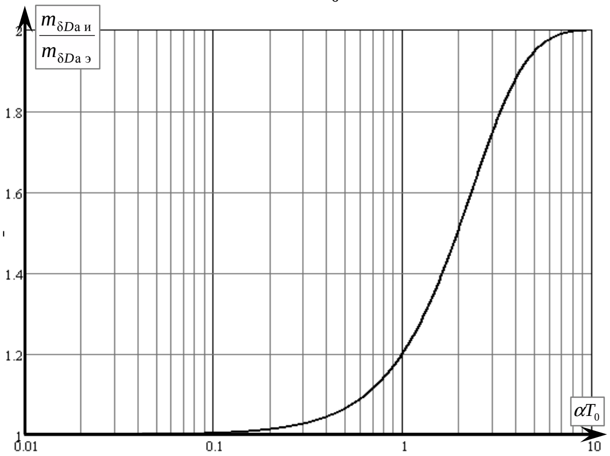

Рис. 6. Зависимость отношения $m_{\delta D\text{а и}}/m_{\delta D\text{а э}}$ от αT_0

Относительная дисперсия погрешности измерения дисперсии D_x при *экстраполяции* $D_{\delta D\text{ э}}(2n+1)/\sigma_\delta^4$ содержит по отношению к оценке $\langle\langle D_x\rangle\rangle/\sigma_\delta^2$ мультипликативную $D_{\delta D\text{м э}}\times(2n+1)/\sigma_\delta^2$ и аддитивную $D_{\delta D\text{а э}}(2n+1)/\sigma_\delta^4$ составляющие:

$$\frac{D_{\delta D\text{м э}}(2n+1)}{\sigma_\delta^2}=$$

$$=\frac{1}{\alpha^2T_0^2}\left\{\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\right)^2\left[\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)\left(1+5e^{-\alpha T_0}\right)-6\alpha T_0e^{-2\alpha T_0}\right]+\right.$$

$$+2\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)\left[\left(1+e^{-\alpha T_0}\right)^2+2-6e^{-2\alpha T_0}\right]+$$

$$\left.+\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)^2\left(1-e^{-2\alpha T_0}\right)^2\right\};$$

$$\frac{D_{\delta D\text{а э}}(2n+1)}{\sigma_\delta^4}=$$

$$=\frac{1}{5\alpha^2T_0^2}\left\{\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\right)^4\left[20\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)-7\left(1-e^{-2\alpha T_0}\right)-6\alpha T_0\right]-\right.$$

$$-2\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\right)^3\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\left[30\alpha T_0e^{-\alpha T_0}-20\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)-\right.$$

$$\left.-5\left(1-e^{-2\alpha T_0}\right)+18\left(1-e^{-2\alpha T_0}\right)^2\right]+$$

$$+3\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\right)^2\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)^2\left[9\left(1-e^{-2\alpha T_0}\right)-18\alpha T_0e^{-2\alpha T_0}-\right.$$

$$\left.-10\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)^2\right]++2\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)^3\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)^2\times$$

$$\left.\times\left(11+17e^{-\alpha T_0}\right)+\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)^4\left(1-e^{-2\alpha T_0}\right)^2\right\},$$

которые приведены на рис. 7 и 8.

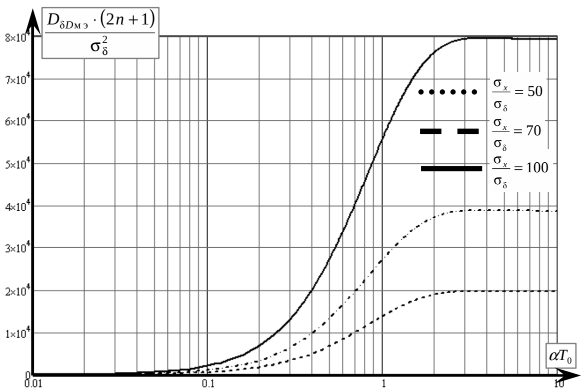

Рис. 7. Зависимость относительной мультипликативной составляющей дисперсии погрешности $D_{\delta D\text{м э}}(2n+1)/\sigma_\delta^2$ измерения дисперсии от αT_0 при экстраполяции для различных σ_x / σ_δ

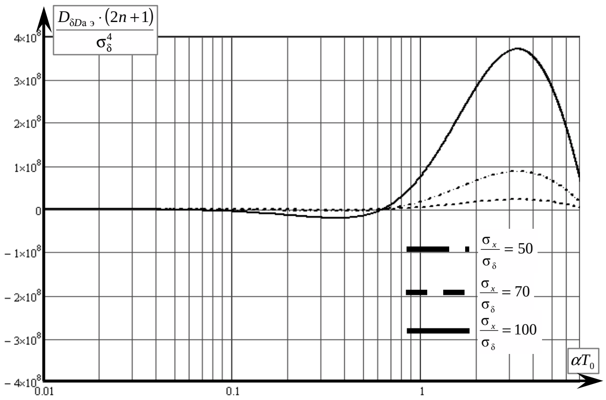

Рис. 8. Зависимость относительной аддитивной составляющей дисперсии погрешности $D_{\delta D\text{а э}}(2n+1)/\sigma_\delta^4$ измерения дисперсии от αT_0 при экстраполяции для различных σ_x / σ_δ

Из рис. 8 видно, что при $\alpha T_0 \le 0{,}65$ $D_{\delta D\text{а э}}$ пренебрежимо мала. Из рис. 7 следует, что при $\alpha T_0 = 0{,}65$ $D_{\delta D\text{м э}}$ меньше половины своего максимума. При $\alpha T_0 \le 0{,}1$ дисперсией погрешности $D_{\delta D\text{ э}}$ можно пренебречь.

Относительная дисперсия погрешности измерения дисперсии D_x при *интерполяции* $D_{\delta D\text{ и}}2n/\sigma_\delta^4$ содержит по отношению к оценке

$\langle\langle D_x\rangle\rangle/\sigma_\delta^2$ мультипликативную $D_{\delta D\text{м и}}2n/\sigma_\delta^2$ и аддитивную $D_{\delta D\text{а и}}2n/\sigma_\delta^4$ составляющие:

$$
\begin{aligned}
&\frac{D_{\delta D\text{м и}}2n}{\sigma_\delta{}^2}=\\
&=\frac{1}{\alpha^2 T_0{}^2\left(1+e^{-\alpha T_0}\right)^2}\left\{19\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\right)^2-22\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-\right.\\
&-5-2\left(1+e^{-\alpha T_0}\right)^2+\\
&+\Bigg[\left(4\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\right)^2-2\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}+1\right)\left(1+e^{-\alpha T_0}\right)^2\times\\
&\times e^{-\alpha T_0}-\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\left(17\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)-\\
&-\Bigg\langle\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\right)^2\Big(8e^{-2\alpha T_0}-3e^{-3\alpha T_0}+\\
&+25e^{-\alpha T_0}+6\Big)-\left(2\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\Big(e^{-4\alpha T_0}-\\
&-e^{-3\alpha T_0}+2e^{-2\alpha T_0}+11e^{-\alpha T_0}-1\Big)\Bigg\rangle\times\\
&\times\frac{\alpha T_0 e^{-\alpha T_0}}{1-e^{-2\alpha T_0}}\Bigg]\frac{2\alpha T_0 e^{-\alpha T_0}}{1-e^{-2\alpha T_0}}-\\
&-8\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\Bigg[\left(2\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha T_0}}{2}\right)-\\
&-2\frac{\operatorname{dilog}\left(e^{-\alpha T_0}\right)}{1-e^{-2\alpha T_0}}\Bigg]\left(1+e^{-\alpha T_0}\right)^2+\\
&+2\Bigg[\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\left(2-e^{-\alpha T_0}\right)e^{-\alpha T_0}-\\
&-9\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}+5\Bigg]\frac{\left(1+e^{-\alpha T_0}\right)}{1-e^{-\alpha T_0}}\Bigg[\left(2\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\times\\
&\times\Big(\operatorname{dilog}(1+e^{-\alpha T_0})-\alpha T_0\ln(1+e^{-\alpha T_0})+\\
&\left.+\frac{\pi^2}{12}\Big)+\operatorname{dilog}\left(e^{-\alpha T_0}\right)\Bigg]\Bigg]\right\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{D_{\delta D\text{а и}}2n}{\sigma_\delta{}^4}=\\
&=\frac{1}{5\alpha^2 T_0{}^2\left(1+e^{-\alpha T_0}\right)^2}\left\{\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\Bigg[113\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\right)^3-\right.\\
&-436\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\right)^2+510\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-164\Bigg]\left(1-e^{-\alpha T_0}\right)^2+\\
&+18e^{-\alpha T_0}-37\left(1+e^{-2\alpha T_0}\right)-\Bigg[\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\Bigg\langle 3\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\right)^3+\\
&+e^{-3\alpha T_0}\left(157\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\right)^3-20\right)+e^{-2\alpha T_0}\times\\
&\times\Bigg[266\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\right)^3-308\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\right)^2-30\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\times\\
&\times\left(4\left(2\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)e^{-\alpha T_0}-1\right)+68\Bigg]+\\
&+e^{-\alpha T_0}\Bigg[214\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\right)^3-412\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\right)^2+\\
&+330\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-128\Bigg]-\\
&-\frac{e^{-\alpha T_0}\left(5\left(1+e^{-2\alpha T_0}\right)-66e^{-\alpha T_0}\right)}{1-e^{-\alpha T_0}}\Bigg\rangle+\\
&+\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)^2\Bigg\langle\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\right)^2\times\\
&\times\left(199e^{-2\alpha T_0}+114e^{-\alpha T_0}+15\right)+\\
&+23\left(2\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}e^{-\alpha T_0}-1\right)\left(2\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)+e^{-\alpha T_0}\right)\times\\
&\times e^{-2\alpha T_0}-15\left(2\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)e^{-\alpha T_0}\Bigg\rangle\frac{\alpha T_0 e^{-\alpha T_0}}{1+e^{-\alpha T_0}}\Bigg]\times\\
&\times\frac{2\alpha T_0}{1+e^{-\alpha T_0}}-40\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}\left(2\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)^3\left(1+e^{-\alpha T_0}\right)^2\times\\
&\times\ln\left(\frac{1+e^{-\alpha T_0}}{2}\right)-46\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)\left(1-e^{-2\alpha T_0}\right)\times\\
&\times\Bigg[\operatorname{dilog}\left(e^{-\alpha T_0}\right)+\left(2\frac{\sigma_x}{\sigma_\delta}-1\right)^3\Big(\frac{\pi^2}{12}+\\
&\left.+\operatorname{dilog}(1+e^{-\alpha T_0})-\alpha T_0\ln(1+e^{-\alpha T_0})\Big)\Bigg]\right\}.
\end{aligned}
$$

где $\operatorname{dilog}(\bullet)$ – дилогарифм Эйлера [6].

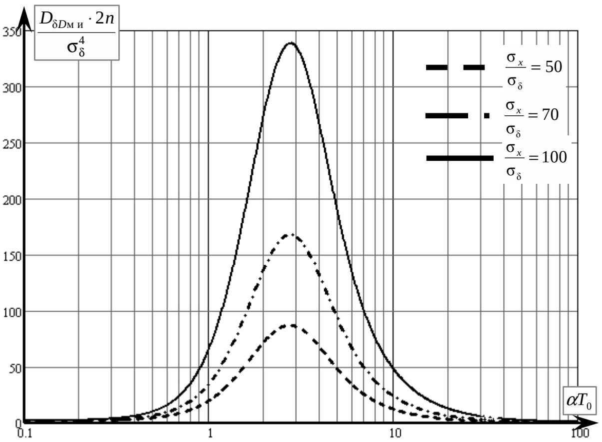

Рис. 9. Зависимость относительной мультипликативной составляющей дисперсии погрешности $D_{\delta D\text{м и}} 2n/\sigma_\delta^2$ измерения дисперсии от αT_0 при интерполяции для различных σ_x / σ_δ

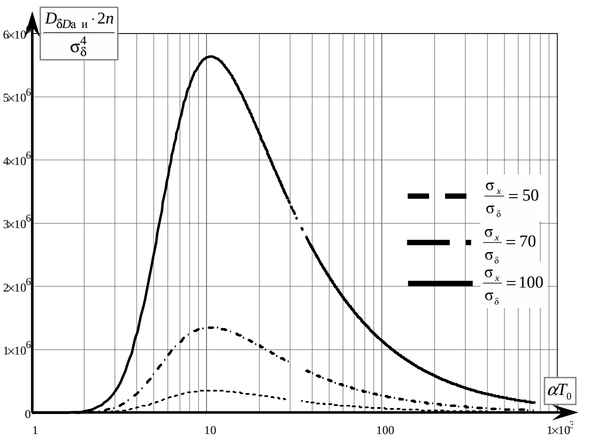

Рис. 10. Зависимость относительной аддитивной составляющей дисперсии погрешности $D_{\delta D\text{а и}} 2n/\sigma_\delta^4$ измерения дисперсии от αT_0 при интерполяции для различных σ_x / σ_δ

ВЫВОДЫ

Таким образом, восстановление реализации процесса между отсчетами является обязательной процедурой при дискретной обработке сигнала. Это позволяет полнее учесть априорную информацию об измеряемых сигналах и несовершенство реальных средств измерений. Планируя с помощью полученных соотношений эксперимент и обработку его результатов, можно существенно повлиять на точность и длительность измерений математического ожидания и дисперсии случайного процесса, на их стоимость.

Синтезированные алгоритмы измерения математического ожидания и дисперсии содержат по сравнению с традиционными оценками не только мультипликативную, но и аддитивную составляющие. Это говорит о том, что распространенное применение временных «окон» [7] не позволяет учесть всех особенностей методов и средств измерений характеристик случайных процессов. Математические ожидания погрешностей измерений вероятностных характеристик при переходе от экстраполяции к интерполяции увеличиваются в 1–2 раза, тогда как дисперсия погрешностей при этом наоборот уменьшается. Так, если отношение $\sigma_x / \sigma_\delta = 300$, то дисперсия погрешности измерения математического ожидания $D_{\delta m}$ уменьшается при $0{,}05 \le \alpha T_0 \le 0{,}5$ более чем в 300 раз. Этот эффект существенно зависит от σ_x / σ_δ и αT_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Заико А. И.** Случайные процессы. Модели и измерения: учеб. пособие. М.: МАИ, 2006. 207 с.
2. **Заико А. И.** Случайный процесс Заико с равномерным законом распределения // Вестник УГАТУ. 2008. Т. 11, № 1(28). С. 188–193.
3. Цифровая обработка сигналов: справ. / Л. М. Гольденберг [и др.]. М.: Радио и связь, 1985. 312 с.
4. РД 50-358-82. Методические указания. Оценка погрешности результатов измерений статистических характеристик стационарных случайных процессов с помощью информационно-измерительных систем. М.: Изд-во стандартов, 1983. 19 с.
5. **Заико А. И.** Восстановление случайного процесса с равномерным законом распределения // Измерительная техника. 1998. № 8. С. 12–14.
6. **Бейтман Г., Эрдейи А.** Высшие трансцедентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.
7. **Мирский Г. Я.** Аппаратное определение характеристик случайных процессов. М.: Энергия, 1972. 456 с.

ОБ АВТОРАХ

Заико Александр Иванович, проф. каф. теоретич. основ электротехн. Дипл. инж. электрон. тех-ки (УАИ, 1970). Д-р техн. наук по информац.-измерит. системам (ЛЭТИ, 1990). Заслуж. изобретатель РБ и РФ. Член-кор. Междунар. инж. акад. Иссл. в обл. метрологич. обесп., анализа и синтеза инф.-измерит. систем.

Китов Андрей Олегович, студ. каф. пром. электроники. Иссл. в обл. измерений характеристик и параметров случайных сигналов.