УДК 519.71

В. Н. ЕФАНОВ, С. В. ЖЕРНАКОВ, Н. С. ИВАНОВА

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В ОРТОГОНАЛЬНОМ БАЗИСЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ВИДА

Предлагается метод оценки технического состояния сложных систем управления на основе идентификации динамических характеристик. С этой целью получена система ортогональных функций экспоненциального вида, обеспечивающая равномерную сходимость для широкого класса динамических характеристик. В результате удалось разработать корректную процедуру параметрической идентификации динамических систем. *Идентификация*; *ортогональные функции*; *условия сходимости*; *аппроксимация*

ВВЕДЕНИЕ

Одним из перспективных методов оценки технического состояния сложных систем управления является идентификация по динамическим характеристикам. Этот подход обладает существенными преимуществами перед другими методами контроля, что объясняется более широкими возможностями фильтрации помех и возмущений.

Обычно используется два основных подхода к контролю технического состояния объекта: в пространстве параметров и в пространстве сигналов [1]. В первом случае тем или иным способом определяются текущие значения параметров объекта (коэффициенты передаточных функций, постоянные времени и т. д.), и оценивается отклонение их от номинального значения. Во втором случае проверяется отклонение выходных сигналов объекта и его блоков от расчетных значений. В обоих случаях объект считается функционирующим неправильно, если отклонение превышает допустимую величину. Основная трудность правильной оценки технического состояния при первом подходе связана со сложностью измерения текущих значений параметров, тогда как их номинальные значения обычно бывают известны. При втором подходе, напротив, главная проблема состоит в необходимости непрерывного определения номинальных значений выходных сигналов для текущих значений входных и выходных сигналов.

Характеризуя возможности подхода, основанного на применении идентификации динамических характеристик, для решения отмеченных выше проблем, целесообразно отметить следующее:

- указанный подход позволяет достоверно оценивать техническое состояние замкнутой динамической системы, т. е. его допустимо использовать в режиме нормальной эксплуатации сложных систем управления;
- если существует возможность измерения характерных сигналов отдельных подсистем сложной системы, то при соблюдении условий идентифицируемости подобных подсистем в замкнутом контуре достигается требуемая глубина контроля;
- при измерении входных и выходных сигналов отдельных подсистем появляется возможность локализации возможных неисправностей, возникающих в процессе эксплуатации сложной системы управления.

Предлагаемая в данной работе процедура идентификации базируется на универсальном математическом аппарате, позволяющем формализовать основные этапы аппроксимации результатов измерений, оценки параметров моделей и исследования свойств последних.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется построить специальную систему ортогональных функций, обеспечивающую эффективное сглаживание временных характеристик в условиях интенсивных помех, регуляризацию процедуры расчета параметров линеаризованных моделей, моделирование временных характеристик в ускоренном масштабе времени, и разработать на основе такого математического аппарата методику расчета параметров линеаризованных моделей исследуемых устройств по экспериментальным данным, полученным в режиме нормальной эксплуатации.

Контактная информация: (347) 273-06-88

2. ПРОЦЕДУРА ФОРМИРОВАНИЯ СОВОКУПНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

При формировании исходной совокупности ортогональных функций будем исходить из того обстоятельства, что временные характеристики высокоответственных технических систем, таких как системы авиационной автоматики, являются, как правило, монотонными или слабоколебательными, ограниченными по величине функциями времени. В связи с этим воспользуемся следующей совокупностью линейно независимых функций экспоненциального вида:

$$\psi_\kappa(\mathrm{t}) = \exp(-(\kappa-1)\beta t), \quad \beta>0, \quad \kappa = 1, 2,\ldots \quad (1)$$

Данная система функций обладает следующими свойствами:

● она является полной на множестве функций, интегрируемых с квадратом в интервале $[0;+\infty)$, т. е. образует базис пространства, по которому может быть разложена любая интегрируемая с квадратом функция; полнота этой системы следует из теоремы Фейера;

● все функции данного семейства являются ограниченными на интервале $[0;+\infty)$;

● любая линейная комбинация этих функций имеет, как правило, монотонный или слабоколебательный характер.

На базе множества функций (1) построим систему ортогональных с весом $p(t) = \exp(-\alpha t)$, $\alpha \geq 0$, функции. Данная функция веса обеспечивает сходимость интеграла $\int_0^\infty p(t)\varphi^2(t)dt$ для всех функций, скорость роста которых не превышает скорости роста некоторой экспоненты. В большинстве случаев временные характеристики систем автоматического управления удовлетворяют этому условию.

Ортогональные функции выражаются через элементы базового набора (1) в виде:

$$\varphi_l(\mathrm{t}) = \sum_{k=1}^{l} \lambda_{lk} \cdot \psi_k(t), \; l = 1,2,\ldots,r-1, \quad (2)$$

здесь $\lambda_{ll} = 1$, а λ_{lk} при $l \neq k$ определяются из условия ортогональности функций $\varphi_l(t)$:

$$\langle \varphi_l;\varphi_r \rangle = \int_0^\infty p(t)\varphi_l(t)\varphi_r(t)dt = 0, \quad r = 2,3,\ldots; \; l = 1,2,\ldots,r-1. \quad (3)$$

Для построения искомой совокупности ортогональных функций воспользуемся формулой Родрига [2]:

$$\varphi_{l+1}(\mathrm{t}) = \frac{(-1)^l\sqrt{\delta+2l+1}}{l!} \cdot e^{\beta\delta t}\left[e^{-\beta(\delta+l)t}\left(1-e^{-\beta t}\right)^l\right]^{(l)}_{e^{-\beta t}}.$$

В данной формуле $\delta = (\alpha - \beta)/\beta$, а выражение в квадратных скобках должно быть продифференцировано l раз по аргументу $e^{-\beta t}$.

С помощью этого выражения можно найти общую формулу для ортонормированных функций:

$$\varphi_{l+1}(t) = \frac{(-1)^l\sqrt{\delta+2l+1}}{l!} e^{\beta\delta t}\left[\sum_{k=0}^{l} C_l^k (-1)^k e^{-(\delta+k+l)\beta t}\right]^{(l)}_{e^{-\beta t}} = \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k+l}\frac{\Gamma(k+l+\delta+1)\sqrt{(\delta+2l+1)\beta}}{k!\,(l-k)!\,\Gamma(k+\delta+1)} e^{-\beta k t}, \quad (4)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Отсюда следует

$$\lambda_{l+1,k+1} = \frac{(-1)^{k+l}\,\Gamma(k+l+\delta+1)\sqrt{(\delta+2l+1)\beta}}{k!\,(l-k)!\,\Gamma(k+\delta+1)}. \quad (5)$$

В табл. 1 приведены результаты вычисления коэффициентов ортогональных функций для случая $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

3. АППРОКСИМАЦИЯ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ РЯДАМИ

Рассмотрим теперь процедуру вычисления коэффициентов ортогональных рядов применительно к временным реакциям систем исследуемого класса. Данная процедура основана на следующем представлении временной характеристики исследуемой системы

$$y(t) = \sum_{l=1}^{q} a_l \cdot \varphi_l(t), \quad (6)$$

где a_l – коэффициенты ортогонального ряда, которые определяются следующим образом:

$$a_l = \int_0^\infty p(t) \cdot y(t) \cdot \varphi_l(t)dt. \quad (7)$$

Таблица 1

Значения коэффициентов ортогональных функций

	$\lambda_{r+1,k+1}$					
$r\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	-1,7321	3,4641	0	0	0	0
2	2,2361	-13,416	13,416	0	0	0
3	-2,6458	31,749	-79,373	52,915	0	0
4	3	-60	270	-420	210	0
5	-3,3166	99,499	-696,49	1857,3	-2089,5	835,79

Пусть результаты экспериментального исследования временной характеристики системы представлены в виде табл. 2.

Таблица 2

Результаты экспериментальных исследований

k	1	2	3	…………..	M
t_k	t_1	t_2	t_3	…………..	t_M
y_k	y_1	y_2	y_3	…………..	y_M

Тогда на основе формулы (7) можно получить следующую зависимость

$$a_l = \sum_{i=1}^{N} \frac{Z_i^l + Z_{i+1}^l}{2} \cdot (t_{i+1} - t_i), \qquad (8)$$

здесь $Z_i^l = y_i\, p(t_i)\varphi_\ell(t_i)$, а величина N определяется из условия $p(t_N)y_N < \Delta$, где Δ = 0,001–0,0001 – заданная погрешность аппроксимации.

Формула (8) обладает определенными сглаживающими свойствами за счет осуществления процедуры численного интегрирования. Однако в случае использования сильно зашумленных экспериментальных данных целесообразно перейти от дискретных значений временных характеристик к площадям, ограниченным этими кривыми. При этом процедура идентификации будет обладать преимуществами метода площадей, который характеризуется высокой точностью и устойчивостью по отношению к погрешностям вычислений.

Площади под кривыми $y(t)$ на некотором интервале наблюдения $[t_0;\ t_n]$ могут быть приближенно вычислены по методу трапеций

$$S(t_0;t_n) = \left[\frac{y(t_0) + y(t_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y(t_k)\right]\Delta t, \qquad (9)$$

где $t_k = t_0 + k\Delta t$, Δt – фиксированный промежуток времени, например, шаг интегрирования.

С другой стороны, эти площади могут быть получены при интегрировании временных характеристик, представленных своими ортогональными рядами

$$S^*(t_0;t_n) = \int_{t_0}^{t_n} y(t)dt = \sum_{l=1}^{q} a_l \int_{t_0}^{t_n} \varphi_l(t)dt\,, \qquad (10)$$

причем, учитывая простой вид функций $\varphi_l(t)$, последний интеграл можно вычислить в аналитической форме. В самом деле

$$\int_{t_0}^{t_n} \varphi_l(t)dt = \int_{t_0}^{t_n} \sum_{j=1}^{q} \lambda_{lj}\psi_j(t)dt =$$
$$= \lambda_{l1}(t_n - t_0) + \sum_{j=2}^{q} \lambda_{lj} \frac{\psi_j(t_0) - \psi_j(t_n)}{\beta(j-1)},$$

или в матричной форме записи

$$\int_{t_0}^{t_n} \Phi(t)dt = \Lambda\Pi(\Psi^*(t_0) - \Psi^*(t_n)),$$

здесь

$$\Lambda = [\lambda_{ij}]_{q\times q}\,,$$

$$\Pi = \mathrm{diag}\left\{1; \frac{1}{\beta}; \cdots; \frac{1}{\beta(q-1)}\right\},$$

$$\Psi^*(t_k) = [-t_k, \psi_2(t_k), \ldots, \psi_q(t_k)]^T\,.$$

Таким образом, окончательно получим

$$S^*(t_0;t_n) = A\Lambda\Pi(\Psi^*(t_0) - \Psi^*(t_n)), \qquad (11)$$

где $A = [a_i]_{1\times q}$ – вектор-строка коэффициентов ортогонального ряда.

Сформировав матрицы

$$S_T = [S(t_0;t_1), S(t_0;t_2), \ldots, S(t_0;t_q)]_{1\times q}\,,$$
$$\Psi_T = [\Psi^*(t_0) - \Psi^*(t_1), \ldots, \Psi^*(t_0) - \Psi^*(t_n)]_{1\times q}\,,$$

можно записать матричное уравнение относительно A

$$A\Lambda\Pi\Psi_T = S_T\,, \qquad (12)$$

откуда находим

$$A = S_T(\Lambda\Pi\Psi_T)^{-1}\,. \qquad (13)$$

Элементы матриц Λ, Π и Ψ_T зависят от параметров ортогональных функций α, β, которые выбираются из условия равномерной сходимости ортогонального ряда к аппроксимируемой временной характеристике $y(t)$, а также из соображения требуемой точности аппроксимации.

В основу процедуры выбора величин α, β положено выражение [2], определяющее абсолютную погрешность подобной аппроксимации

$$\left| y(t) - \sum_{l=1}^{q} a_l\varphi_l(t) \right| \le \frac{C_0 q(\delta+q)\sqrt{\delta+2q-1}\,|\varphi_{q+1}(t)|}{(\delta+2q-1)(\delta+2q)\sqrt{\delta+2q+1}\cdot q^{r+\gamma}} \qquad (14)$$

при условии, что для временной характеристики существует вспомогательная функция $F(z;u) = (Y(z)-Y(u))/(z-u)$, $Y(z) = y(t(z))$, $z = \exp(-\beta t)$, имеющая r непрерывных производных по z – $F_z^{(r)}(z,u)$ и удовлетворяющая условию Липшица порядка $0 < \gamma \le 1$.

Воспользовавшись свойством построенной системы ортогональных функций, согласно которому последние достигают своих максимальных значений на одной из границ интервала ортогональности

$$\varphi_{l+1}(t) \le \max\{\varphi_{l+1}(0); \varphi_{l+1}(\infty)\}, \qquad (15)$$

причем

$$\varphi_{l+1}(\infty)=\frac{(-1)^l\sqrt{\delta+2l+1}\,\Gamma(\delta+l+1)}{l!\,\Gamma(\delta+1)},$$

$$\varphi_{l+1}(0)=\sqrt{\delta+2l+1},$$

получаем, что минимальное значение правой части неравенства (14) достигается при $\delta \le 0$, т. е. условие $\delta \le 0$ или $\alpha \le \beta$ соответствует максимальной скорости сходимости ряда.

Рассмотрим теперь, какие ограничения накладывает условие равномерной сходимости ортогонального ряда на величину параметра β. Как известно, вид временных характеристик динамической системы определяется распределением корней характеристического уравнения. Поэтому рассмотрим два случая: случай вещественных корней характеристического уравнения и случай комплексных корней.

В первом случае исходим из того, что корни s_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ характеристического уравнения вещественны и различны. Тогда временная реакция системы будет иметь вид

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i \exp(-s_i t).$$

Осуществим замену переменных $z = \exp(-\beta t)$, при этом

$$y(z(t))=Y(z)=\sum_{i=1}^{n} Y_i(z)=\sum_{i=1}^{n} C_i z^{s_i/\beta}.$$

Представим показатель степени в последней сумме в виде $s_i/\beta = r_i + \gamma_i$, где r_i – некоторое целое число, $0 \le \gamma_i \le 1$. В этом случае каждое слагаемое $Y_i(z)$ непрерывно дифференцируемо r_i раз, причем $Y_i^{(r_i)}(z)$ удовлетворяет условию Липшица с параметрами γ_i, $M = 1$.

$$\left|Y_i^{(r_i)}(z)-Y_i^{(r_i)}(y)\right| \le |z-y|^{\gamma_i},\ z, y\in[0;1].$$

В соответствии с (14) ортогональный ряд сходится к функции $y_i(t)$, если $r_i + \gamma_i > (p + 1) / 2$ (p – целая часть числа 2δ), причем скорость сходимости убывает по мере уменьшения абсолютной величины корня s_i. Исходя из сказанного, для обеспечения сходимости ряда к функции $y(t)$ параметр β необходимо выбирать с учетом неравенства

$$\beta < 2\min s_i / (p + 1). \qquad (16)$$

Рассмотрим теперь случай доминирующей пары комплексных корней характеристического уравнения. Временные характеристики системы будут содержать при этом слагаемые вида

$$y(t) = A\exp(-\eta t)\sin\omega t,$$

которым при замене переменных соответствует выражение

$$Y(z)=-Az^{\eta/\beta}\sin\left(\frac{\omega}{\beta}\ln z\right).$$

Поскольку r-я производная этой функции

$$Y^{(r)}(z)=-Az^{\left(\frac{\eta}{\beta}-r\right)}\left[C_1\sin\left(\frac{\omega}{\beta}\ln z\right)+C_2\cos\left(\frac{\omega}{\beta}\ln z\right)\right]$$

непрерывна при $\frac{\eta}{\beta}-r\ge 0$, то условие сходимости ортогонального ряда к функции $y(t)$ оказывается аналогичным рассмотренному выше. Качественное отличие исследуемого случая от предыдущего заключается в том, что колебательная функция $y(t)$, обладая одинаковой с экспоненциальными функциями скоростью затухания, характеризуется более высокими значениями производных. Это приводит к увеличению параметра M в условии Липшица, а следовательно, к увеличению числа слагаемых ряда, обеспечивающего требуемую точность аппроксимации.

Учитывая, что в (16) фигурирует степень устойчивости системы, т. е. абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня характеристического уравнения, а также то обстоятельство, что степень устойчивости определяет длительность переходного процесса в системе, неравенство (16) можно представить в следующей форме

$$\beta<\frac{2\eta}{(p+1)}\le\frac{2\ln\frac{1}{\delta}}{t_n(p+1)}, \qquad (17)$$

где δ – относительное отклонение от установившегося значения, определяющее окончание переходного процесса в системе, t_n – длительность переходного процесса.

Что касается числа q членов ортогонального ряда, то его выбор определяется требуемой точностью аппроксимации характеристик системы. При этом необходимо учитывать следующее: из неравенства (14) следует, что наихудшая точность достигается на концах интервала ортогональности при $t = 0$ и $t = \infty$. Поэтому о числе слагаемых q можно судить по величине погрешностей, возникающих при аппроксимации ортогональным рядом начального состояния процесса $y(0)$ и его установившегося значения $y(\infty)$

$$\varepsilon_1=\left|y(0)-\sum_{j=1}^{q}a_j\varphi_j(0)\right|=\left|y(0)-\sum_{j=1}^{q}\sum_{l=1}^{j}a_j\lambda_{jl}\right|;$$

$$\varepsilon_2=\left|y(\infty)-\sum_{j=1}^{q}a_j\varphi_j(\infty)\right|=\left|y(\infty)-\sum_{j=1}^{q}\sum_{l=1}^{j}a_j\lambda_{jl}\right|.$$

4. АЛГОРИТМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Пусть исследуемая система описывается системой операторных уравнений

$$Y(s)=W(s)G(s), \quad (18)$$

где $Y(s)$ и $G(s)$ – соответственно, векторы изображений выходных координат и задающих воздействий, $W(s)$ – матрица передаточных функций.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение. Коэффициенты $a_l[f]$ $\left(l=\overline{1,q}\right)$ ряда по совокупности ортогональных функций (2) для некоторой кусочно-гладкой функции $f(t)$ вычисляются по совокупности значений ее изображения $F(s)$, найденных в точках вещественной оси, следующим образом:

$$a_l[f]=\sum_{k=1}^{l}\lambda_{lk}F(\alpha+(k-1)\beta),\ \left(l=\overline{1,q}\right). \quad (19)$$

Доказательство этого утверждения основывается на представлении в виде аналогичного ортогонального ряда дельта-образной последовательности. Под дельта-образной последовательностью понимают последовательность функций $\delta_q(\tau,t)$, сходящуюся к дельта-функции $\delta(\tau,t)$ [3]. Причем, поскольку речь идет об обобщенной функции, то имеется в виду слабая сходимость последовательности функций $\delta_q(\tau,t)$. Как известно, некоторая последовательность функций $\varepsilon_q(t)$ (q = 1, 2,...) называется слабо сходящейся [4] в пространстве функций $f(t)$ на интервале $[a, b]$, если существует конечный предел $\lim\limits_{q\to\infty}\int\limits_a^b f(t)\varepsilon_q(t)dt$.

Покажем, что последовательность

$$\delta_q(\tau,t)=\sum_{l=1}^{q}a_l(t)\varphi_l(\tau) \quad (20)$$

частичных сумм ряда по системе ортогональных функций (2), коэффициенты которого определяются по формуле

$$a_l(t)=\int\limits_0^\infty p(\tau)\delta(\tau,t)\varphi_l(\tau)d\tau=p(t)\varphi_l(t),$$

является дельта-образной последовательностью, т. е. слабо сходится к дельта-функции $\delta(\tau,t)$ в пространстве кусочно-гладких на интервале $[0,\ \infty)$ функций. Введем вспомогательную функцию $\omega(t)=p(t)f(t)$, где $f(t)$ – произвольная кусочно-гладкая на интервале $[0,\ \infty)$ функция. Тогда

$$\lim_{q\to\infty}\int\limits_0^\infty \omega(\tau)\delta_q(\tau,t)d\tau=$$
$$=\lim_{q\to\infty}\sum_{l=1}^{q}p(t)\varphi_l(t)\int\limits_0^\infty p(\tau)f(\tau)\varphi_l(\tau)d\tau.$$

Интеграл в правой части последнего равенства представляет собой не что иное, как коэффициент при разложении функции $f(t)$ по системе ортогональных функций $\varphi_l(t)$ – $a_l[f]=\int\limits_0^\infty p(\tau)f(\tau)\varphi_l(\tau)d\tau.$

Следовательно,

$$\lim_{q\to\infty}\int\limits_0^\infty \omega(\tau)\delta_q(\tau,t)d\tau=\lim_{q\to\infty}p(t)\sum_{l=1}^{q}a_l[f]\varphi_l(t).$$

Согласно свойствам используемой ортогональной системы последний ряд сходится для любой кусочно-гладкой функции, т. е.

$$\lim_{q\to\infty}\int\limits_0^\infty \omega(\tau)\delta_q(\tau,t)d\tau=p(t)f(t)=\omega(t).$$

Таким образом, дельта-функцию $\delta(\tau,t)$ можно представить рядом

$$\delta(\tau,t)=\lim_{q\to\infty}\sum_{l=1}^{q}p(t)\varphi_l(t)\varphi_l(\tau).$$

Запишем теперь интеграл Лапласа для рассматриваемой кусочно-гладкой функции $f(t)$

$$F(s)=\int\limits_0^\infty \exp(-s\tau)f(\tau)d\tau.$$

Умножим подынтегральное выражение на дельта-образную последовательность $\delta_q(\tau,t)$ и преобразуем полученный в результате интеграл к следующему виду:

$$\int\limits_0^\infty \exp(-s\tau)f(\tau)\sum_{l=1}^{q}p(t)\varphi_l(t)\varphi_l(\tau)d\tau=$$
$$=\sum_{l=1}^{q}p(t)\varphi_l(t)\int\limits_0^\infty \exp(-s\tau)f(\tau)\sum_{k=1}^{l}\lambda_{lk}\exp(-(k-1)\beta\tau)d\tau=$$
$$=\sum_{l=1}^{q}p(t)\varphi_l(t)\sum_{k=1}^{l}\lambda_{lk}F(s+(k-1)\beta).$$

С другой стороны, если перейти к пределу при $q\to\infty$, то дельта-образная последовательность в подынтегральном выражении будет стремиться к дельте-функции, т. е. справедливы соотношения

$$\lim_{q\to\infty}\int_0^\infty \exp(-s\tau) f(\tau)\sum_{l=1}^{q} p(t)\varphi_l(t)\varphi_l(\tau)d\tau =$$
$$=\int_0^\infty \exp(-s\tau) f(\tau)\delta(\tau,t)d\tau = \exp(-st) f(t).$$

Следовательно, полагая $s = \alpha$, получим

$$f(t) = \lim_{q\to\infty}\sum_{l=1}^{q}\varphi_l(t)\sum_{k=1}^{l}\lambda_{lk}F(s+(k-1)\beta). \quad (21)$$

Коэффициенты ряда Фурье для функции $f(t)$ вычисляются, таким образом, по совокупности значений ее изображения, найденных в точках вещественной оси $a_l[f] = \sum_{k=1}^{l}\lambda_{lk}F(\alpha+(k-1)\beta)$, что завершает доказательство утверждения.

Запишем теперь (19) в матричной форме применительно к вектору изображений выходных координат $Y(s)$ исследуемой системы (18)

$$\Lambda Y = A^T,$$

здесь $Y = \left\| Y(\alpha); Y(\alpha+\beta); \ldots . Y(\alpha+(q-1)\beta)\right\|^T_{1\times q}$.

В результате находим выражение для вектора изображений

$$Y = \Lambda^{-1}A^T. \quad (22)$$

Поскольку изображение временной характеристики любой линеаризованной модели динамической системы представляет собой дробно-рациональную функцию вида

$$Y(s) = \frac{x_1 s^m + x_2 s^{m-1} + \ldots + x_{m+1}}{x_{m+2}s^n + x_{m+3}s^{n-1} + \ldots + x_{m+n+1}s + 1},$$

то относительно неизвестных параметров x_i, $(i = 1,2,\ldots,m+n+1)$ можно составить следующее линейное алгебраическое уравнение

$$[\alpha+(k-1)\beta]^m x_1 + \ldots + x_{m+1} -$$
$$-[\alpha+(k-1)\beta]^n Y(\alpha+(k-1)\beta)x_{m+2} - \ldots$$
$$-[\alpha+(k-1)\beta]Y(\alpha+(k-1)\beta)x_{m+n+1} =$$
$$= Y(\alpha+(k-1)\beta).$$

Объединяя подобные уравнения при $k = 1, 2,..,n + m + 1$, приходим к следующей системе уравнений

$$CX = Y, \quad (23)$$

где $X = [x_i]_{(m+n+1)\times 1}$, $C = [C^I; C^{II}]$ – блочная матрица, составляющие которой имеют вид $C^I = [C^I_{ij}]_{(m+n+1)\times(m+1)}$; $C^{II} = [C^{II}_{ij}]_{(m+n+1)\times n}$, при этом

$$C^I_{ij} = [\alpha+(i-1)\beta]^{m+1-j},$$

$$C^{II}_{ij} = -Y(\alpha+(i-1)\beta)[\alpha+(i-1)\beta]^{n+1-j}.$$

Решение системы уравнений (23) завершает процедуру идентификации параметров линеаризованных моделей системы управления.

Проиллюстрируем предложенный метод следующим примером.

Пусть экспериментально снятая зависимость $y^э(t)$ имеет вид, представленный в табл. 3.

Таблица 3

Временные характеристики

t, c	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$y^э(t)$	0	0,1328	0,2997	0,4689	0,6236	0,7596	0,8667
$y(t)$	0,0089	0,1295	0,2969	0,4695	0,6266	0,7560	0,8641
t, c	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4	1,6
$y^э(t)$	0,9486	1,0109	1,0548	1,0846	1,1137	1,1176	1,1087
$y(t)$	0,9494	1,0120	1,0575	1,0883	1,1177	1,1198	1,1082
t, c	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$y^э(t)$	1,0912	1,0715	1,0544	1,0337	1,0187	1,0116	1,0076
$y(t)$	1,0944	1,0746	1,0605	1,0499	1,0203	1,0172	1,0106

Выбираем параметры разложения $\alpha = 1$, $\beta = 1$ и потребуем, чтобы среднеквадратичная погрешность аппроксимации функции $y^э(t)$ рядом не превышала 0,01%.

Вычислим норму функции $y^э(t)$

$$\int_0^\infty e^{-t}\left[y^э(t)\right]^2 dt \approx$$
$$\approx \sum_{k=0}^{20} e^{-t_k}\left[\frac{y^э(t_k)+y^э(t_{k+1})}{2}\right]^2 (t_{k+1}-t_k) =$$
$$= 0{,}714046.$$

Находим коэффициенты ортогонального ряда

$$a_i\left[y^э\right] = \sum_{k=0}^{20} e^{-t_k} y^э(t_k)\varphi_i(t_k),$$

а также значения его нормы

$$H_i\left[y^э\right] = \sum_{l=1}^{i} a_l\left[y^э\right].$$

Результаты вычислений сведем в табл. 4.

Таблица 4

Результаты расчетов

i	1	2	3	4	5
$a_i[y^э]$	0,76003	–0,19461	–0,06484	0,01392	0,00662
$H_i[y^э]$	0,57764	0,69126	0,71228	0,71363	0,71403
$Y^э(i)$	0,76003	0,28271	0,14523	0,08692	0,05712

Как видно из данных, приведенных в табл. 4, значение среднеквадратичной погрешности при i = 5 составляет 0,00245%. Поэтому ограничимся пятью членами ортогонального ряда.

Используя найденные значения ортогональных коэффициентов $a_i|y^э|$, рассчитаем в соответствии с формулой (22) значения изображения $Y^э(i)$ исследуемой временной характеристики. Результаты расчетов также сведем в табл. 4. Представим теперь линеаризованную модель исследуемого устройства в следующем виде

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{x_1 s^2 + x_2 s + 1}{x_3 s^3 + x_4 s^2 + x_5 s + 1}.$$

Решая систему параметрических уравнений (23), находим искомые параметры линеаризованной модели

$$x_1 = 0{,}06579,\ x_2 = 1{,}06579,\ x_3 = 0{,}06612,$$
$$x_4 = 0{,}50014,\ x_5 = 0{,}60724.$$

Результаты моделирования $y(t)$ идентифицированной системы приведены в табл. 3. При этом максимальное отклонение временных характеристик не превышает 0,89%.

Оценка технического состояния системы управления по найденной совокупности ее параметров должна ответить на главный вопрос – насколько ее основные характеристики удовлетворяют поставленным требованиям, обеспечивая тем самым выполнение заданных функций. По существу эти требования должны рассматриваться как ограничения на возможные отклонения передаточной матрицы $W(s)$ в (18) по отношению к эталонной (расчетной) передаточной матрице $W^*(s)$. Это условие можно интерпретировать следующим образом. Система удовлетворяет поставленным требованиям, если текущая точка x с координатами $(x_1, x_2,\ldots,x_N)$ в N-мерном пространстве контролируемых параметров принадлежит области допустимых значений X: $x \in X$. Наиболее просто границы допустимой области X определяются в тех случаях, когда контролируемые параметры должны удовлетворять ограничениям вида

$$\underline{x}_i \le x_i \le \overline{x}_i, \quad i = \overline{1, N}. \tag{24}$$

При этом область X представляет собой гиперпараллелепипед с гранями, параллельными осям координат.

Часто в этих целях используется так называемый «обобщенный» параметр J, который вводится как функция контролируемых параметров $(x_1, x_2,\ldots,x_N)$. Основное требование к выбору обобщенного параметра заключается в простоте вычисления, а его величина должна достаточно адекватно оценивать состояние системы.

В качестве такого обобщенного параметра может использоваться следующее выражение:

$$J = \sum_{i=1}^{N} c_i \left\| x_i - x_i^* \right\|, \tag{25}$$

здесь x_i^* – расчетные значения контролируемых параметров, c_i – весовые коэффициенты, учитывающие вклад каждого из параметров x_i в формирование обобщенного показателя J.

Если допустимая область определяется соотношением $J \le J^*$, где J^* – граничное значение обобщенного параметра J, то она принимает ту или иную форму в N-мерном пространстве в зависимости от используемой в (25) нормы. В случае евклидовой нормы допустимая область принимает форму гиперэллипсоида.

Таким образом, контроль объекта по совокупности параметров (24) можно заменить проверкой выполнения лишь одного условия (25). Более того, наблюдая за изменением обобщенного параметра $J(t)$ во времени, можно по его величине прогнозировать состояние контролируемой системы объекта в будущий момент времени, что также является одним из достоинств данного подхода.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В работе предложен подход к решению задачи идентификации сложных технических систем в условиях помех на основе аппроксимации временных характеристик ортогональными рядами экспоненциального вида.

С этой целью разработана методика расчета параметров линеаризованных моделей систем управления с использованием экспериментальных данных, полученных при испытаниях либо в результате расчетов по полноразмерным нелинейным моделям. Методика включает аналитический алгоритм вычисления коэффициентов ортонормированных функций, обеспечивающих равномерную сходимость рядов в пространстве кусочно-гладких функций, способ вычисления коэффициентов ортогональных рядов по таблицам данных непосредственно и с предварительной их обработкой с целью минимизации погрешностей эксперимента, метод оценки состояния исследуемой системы на основе анализа полученных параметрических зависимостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Автоматический контроль и диагностика систем управления силовыми установками летательных аппаратов / В. И. Васильев [и др.]. М.: Машиностроение, 1989. 240 с.

2. **Суетин П. К.** Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 416 с.

3. **Шилов Г. Е.** Математический анализ (функции одного переменного). М.: Наука, 1970. Ч. 3. 352 с.

4. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.

ОБ АВТОРАХ

Ефанов Владимир Николаевич, проф., зав. каф. авиац. приборостроения. Дипл. инженер электр. техники (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по упр-ю в техн. системах (УГАТУ, 1995). Иссл. в обл. создания интеллектуализированных комплексов бортового оборудования.

Жернаков Сергей Владимирович, зав. каф. инф.-изм. техники. Дипл. инж. по пром. электронике (УГАТУ, 1984). Д-р техн. наук по системн. анализу, управлению и обработке информации (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. интеллектуальных систем.

Иванова Наталья Сергеевна, асс. той же каф. Дипл. инженер по биотехническ. аппаратам и системам (УГАТУ, 2005). Лауреат стипендии Нац. ассоциации авиаприборостроителей (2006-07). Работает над дисс. в обл. идентификации техн. состояния сложн. систем управления.