Уфа : УГАТУ, 2010 Вестник УГАТУ Т. 14, № 2 (37). С. 178–182

УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА • МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ...

УДК 517.9

В. А. БАЙКОВ, В. Г. ВОЛКОВ, Л. Р. ГАЛИАКБЕРОВА, И. С. ЖЕЛТОВА

ПЕТРОФИЗИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ КАК ИНВАРИАНТЫ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

В данной работе методы группового анализа используются для исследования симметрийных свойств дифференциальных уравнений двухфазной фильтрации жидкости в пористой среде. Вычислена алгебра Ли операторов группы преобразований эквивалентности. Соотношения, инвариантные относительно подгруппы группы преобразований эквивалентности, использованы для получения функциональных зависимостей, определяющих произвольные параметры модели. Показано, что одним из инвариантов подалгебры операторов преобразований эквивалентности является закон Тимура, связывающий абсолютную проницаемость, пористость и остаточную водонасыщенность. *Групповой анализ дифференциальных уравнений*; *преобразования эквивалентности*; *уравнения фильтрации*; *двухфазная фильтрация*

ВВЕДЕНИЕ

Целью данного исследования симметрийных свойств уравнений фильтрации является попытка решения некоторых специфических проблем, возникающих при моделировании нефтяного пласта. В силу того, что такое моделирование производится на основе интерполяции по ограниченным и неточным данным, полученным на основе единичных измерений в скважинах, нет оснований полагать, что модель адекватно характеризует строение и свойства пласта и пластовых флюидов.

Как следствие, важнейшим этапом моделирования является определение характеристик процесса и корректировка значений параметров пористой среды.

Помимо экспериментального способа восстановления зависимостей для произвольных параметров моделей может быть использован метод группового анализа – групповая классификация Ли дифференциальных уравнений [1]. С точки зрения данного метода модель с более широкой основной группой Ли является предпочтительней, как обладающая дополнительными физическими свойствами.

Задачей групповой классификации Ли является нахождение вида произвольных функций, входящих в систему уравнений, обеспечивающих расширение допускаемой группы преобразований и, таким образом, расширение физических свойств модели. Рассматриваемая в данной работе система (раздел 1) содержит одиннадцать произвольных функций, что делает задачу групповой классификации трудноразрешимой. В подобных случаях является целесообразным использование метода предварительной групповой классификации, основанного на том, что расширение основной группы допускаемых преобразований происходит, если каждый из параметров системы задан соотношением, инвариантным относительно группы эквивалентности системы. Реализация данного метода сводится к построению оптимальной системы неподобных подалгебр операторов преобразований эквивалентности и их инвариантов [2]. Однако в случае рассматриваемой системы построение оптимальной системы является задачей трудоемкой, и мы исследуем случай расширения допускаемой группы на одномерную подалгебру, при условии инвариантности относительно последней некоторого соотношения (раздел 2).

Идея данной работы заключается в возможности уточнения вида произвольных параметров системы при условии расширения основной группы и выполнения некоторых заданных закономерностей между параметрами. В частности, мы будем ограничивать рассматриваемую одномерную подалгебру операторов эквивалентности условием инвариантности относительно нее формулы Тимура – петрофизической закономерности, связывающей свойства проницаемости, пористости и минимальной водонасыщенности системы. После такого ограничения были получены инвариантные зависимости на параметры, обеспечивающие расширение допускаемой группы системы, и, как оказалось, в целом соответствующие рекомендуемым к использованию на практике при фильтрационном моделировании (раздел 3).

Контактная информация: (347) 273-77-35

1. ФИЛЬТРАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ

Для моделирования процессов вытеснения нефти водой используется модель двухфазного течения жидкости в пористой среде, построенная в предположении, что вода и нефть не смешиваются, не обмениваются массами и не меняют фазы. Флюиды в пласте находятся в состоянии термодинамического равновесия при постоянной температуре. Далее индексы o, w соответствуют нефтяной и водной фазам. Уравнения модели, полученные из уравнения сохранения массы и закона Дарси, имеют вид [3, 4]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi\frac{S_w}{B_w}\right)+\nabla\left(\frac{KK_{rw}}{\mu_w B_w}(\nabla p_w - g\rho_w)\right)=0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi\frac{1-S_w}{B_o}\right)+\nabla\left(\frac{KK_{ro}}{\mu_o B_o}(\nabla p_o - g\rho_o)\right)=0,\\
&p_w = p_o + p_{cwo},
\end{aligned}\quad (1)$$

где $p_o(t, x)$, $S_w(t, x)$ (давление нефтяной фазы и текущая водонасыщенность) – неизвестные функции, B_o, B_w (коэффициенты объемного расширения нефти и воды), ρ_o, ρ_w (плотности нефти и воды), μ_o, μ_w (вязкости нефти и воды), K_{ro}, K_{rw} (относительные фазовые проницаемости нефти и воды), K (абсолютная проницаемость пористой среды), φ (пористость среды), p_{cwo} (капиллярное давление) – функции, характеризующие свойства пласта и флюидов, определяемые экспериментально.

Далее перейдем в системе (1) от текущей водонасыщенности S_w к нормированной:

$$S_w(t,\mathbf{x}) = s^* + S_{wn}(t,\mathbf{x},s^*,s^{**})(s^{**}-s^*).$$

Здесь $S_{wn}(t, x, s^*, s^{**})$ – нормированная водонасыщенность, а s^*, s^{**} – минимальное и максимальное значения водонасыщенности, далее рассматриваемые как независимые переменные. Обобщая зависимости, используемые в различных фильтрационных моделях [4–7], будем полагать произвольные параметры функциями вида

$$\begin{aligned}
&K_{ro}=K_{ro}(S_{wn}),\ K_{rw}=K_{rw}(S_{wn}),\\
&B_o = B_o(p_o),\ \mu_o=\mu_o(p_o),\\
&\rho_o=\rho_o(p_o),\ \varphi=\varphi(s^*,s^{**},p_o,S_{wn}),\\
&K=K(s^*,s^{**},p_o,S_{wn}),\\
&B_w=B_w(s^*,s^{**},p_o,S_{wn}),\\
&\mu_w=\mu_w(s^*,s^{**},p_o,S_{wn}),\\
&\rho_w=\rho_w(s^*,s^{**},p_o,S_{wn}),\\
&p_{cwo}=p_{cwo}(s^*,s^{**},S_{wn}).
\end{aligned}\quad (2)$$

Далее будем рассматривать одномерный случай.

2. ДОПУСКАЕМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Преобразования переменных t, x, s^*, s^{**}, p_o, S_{wn}

$$\begin{aligned}
&\bar t = g_1(t,x,s^*,s^{**},p_o,S_{wn},a),\\
&\bar x = g_2(t,x,s^*,s^{**},p_o,S_{wn},a),\\
&\bar s^* = g_3(t,x,s^*,s^{**},p_o,S_{wn},a),\\
&\bar s^{**} = g_4(t,x,s^*,s^{**},p_o,S_{wn},a),\\
&\bar p_o = g_5(t,x,s^*,s^{**},p_o,S_{wn},a),\\
&\bar S_{wn} = g_6(t,x,s^*,s^{**},p_o,S_{wn},a),
\end{aligned}$$

зависящие от непрерывного параметра a, называются *допускаемыми преобразованиями* уравнения (1), если уравнение (1) имеет тот же вид в новых переменных $\bar t,\bar x,\bar s^*,\bar s^{**},\bar p_o,\bar S_{wn}$. Множество всех таких преобразований образует непрерывную группу G. Группа преобразований Gназывается допускаемой группой уравнения (1).

Согласно теории Ли, построение допускаемой группы G эквивалентно нахождению ее касательного векторного поля, или инфинитезимального оператора:

$$\begin{aligned}
X = {}&\xi^1\frac{\partial}{\partial t}+\xi^2\frac{\partial}{\partial x}+\xi^3\frac{\partial}{\partial s^*}+\\
&+\xi^4\frac{\partial}{\partial s^{**}}+\eta^1\frac{\partial}{\partial p_o}+\eta^2\frac{\partial}{\partial S_{wn}},
\end{aligned}$$

где координаты ξ^i, η^k оператора являются функциями от t, x, s^*, s^{**}, p_o, S_{wn}.

Оператор X называется допускаемым оператором уравнения (1). Метод вычисления допускаемых преобразований подробно описан в работе Л. В. Овсянникова [1]. Уравнение (1) допускает группу преобразований, соответствующую инфинитезимальным операторам

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Преобразования переменных t, x, s^*, s^{**}, p_o, S_{wn} называются *преобразованиями эквивалентности* уравнения (1), если уравнение (1) переходит после замены переменных в уравнение того же вида, но, возможно, с другими произвольными параметрами p_{cwo}, B_o, B_w, μ_o, μ_w, ρ_o, ρ_w, φ, K, K_{ro}, K_{rw}.

Как и в случае допускаемых преобразований, для вычисления преобразований эквивалентности используется понятие оператора группы преобразования эквивалентности [1], действующего на пространстве переменных t, x, s^*, s^{**}, p_o, S_{wn}, p_{cwo}, B_o, B_w, μ_o, μ_w, ρ_o, ρ_w, φ, K, K_{ro}, K_{rw}, и для рассматриваемой системы имеющего вид:

$$Y=\xi^1\frac{\partial}{\partial t}+\xi^2\frac{\partial}{\partial x}+\xi^3\frac{\partial}{\partial s^*}+\xi^4\frac{\partial}{\partial s^{**}}+$$
$$+\eta^1\frac{\partial}{\partial p_o}+\eta^2\frac{\partial}{\partial S_{wn}}+\mu^1\frac{\partial}{\partial p_{cwo}}+\mu^2\frac{\partial}{\partial B_o}+$$
$$+\mu^3\frac{\partial}{\partial B_w}+\mu^4\frac{\partial}{\partial \mu_o}+\mu^5\frac{\partial}{\partial \mu_w}+\mu^6\frac{\partial}{\partial \rho_o}+$$
$$+\mu^7\frac{\partial}{\partial \rho_w}+\mu^8\frac{\partial}{\partial K}+\mu^9\frac{\partial}{\partial \varphi}+\mu^{10}\frac{\partial}{\partial K_{ro}}+\mu^{11}\frac{\partial}{\partial K_{rw}}.$$

Координаты ξ^i, η^k оператора Y являются функциями от t, x, s^*, s^{**}, p_o, S_{wn}, координаты μ^j – функциями от t, x, s^*, s^{**}, p_o, S_{wn}, p_{cwo}, B_o, B_w, μ_o, μ_w, ρ_o, ρ_w, φ, K, K_{ro}, K_{rw}.

В результате вычислений получена бесконечномерная алгебра Ли генераторов группы преобразований эквивалентности, которая порождается операторами следующего вида:

$$Y_1=\frac{\partial}{\partial t},\ \ Y_2=\frac{\partial}{\partial x},$$
$$Y_3=\frac{\partial}{\partial p_o},\ Y_4=t\frac{\partial}{\partial t}-K\frac{\partial}{\partial K},$$
$$Y_5=p_o\frac{\partial}{\partial p_o}+p_{cwo}\frac{\partial}{\partial p_{cwo}}-K\frac{\partial}{\partial K}+\rho_o\frac{\partial}{\partial \rho_o}+\rho_w\frac{\partial}{\partial \rho_w},$$
$$Y_6=x\frac{\partial}{\partial x}+2K\frac{\partial}{\partial K}-\rho_o\frac{\partial}{\partial \rho_o}-\rho_w\frac{\partial}{\partial \rho_w},$$
$$Y_7=g_1\left(s^*,s^{**}\right)\frac{\partial}{\partial p_{cwo}},$$
$$Y_8=g_2\left(s^*,s^{**}\right)B_w\frac{\partial}{\partial B_w},$$
$$Y_9=g_3\left(s^*,s^{**}\right)\frac{\mu_w B_w}{KK_{rw}}\frac{\partial}{\partial \rho_w},$$
$$Y_{10}=g_4\left(s^*,s^{**}\right)\left[\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}+K\frac{\partial}{\partial K}\right],$$
$$Y_{11}=f_1\left(p_o,B_o,\mu_o,\rho_o\right)\begin{bmatrix}B_o\dfrac{\partial}{\partial B_o}+B_w\dfrac{\partial}{\partial B_w}+\\ +K\dfrac{\partial}{\partial K}+\varphi\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\end{bmatrix},$$
$$Y_{12}=f_2\left(p_o,B_o,\mu_o,\rho_o\right)\left[\mu_o\frac{\partial}{\partial \mu_o}+\mu_w\frac{\partial}{\partial \mu_w}+K\frac{\partial}{\partial K}\right],$$
$$Y_{13}=f_3\left(S_{wn},K_{ro},K_{rw}\right)\left[\mu_w\frac{\partial}{\partial \mu_w}+K_{rw}\frac{\partial}{\partial K_{rw}}\right],$$
$$Y_{14}=f_4\left(S_{wn},K_{ro},K_{rw}\right)\left[-\mu_w\frac{\partial}{\partial \mu_w}+K_{ro}\frac{\partial}{\partial K_{ro}}-K\frac{\partial}{\partial K}\right],$$
$$Y_{15}=f_5\left(S_{wn}\right)\left[\frac{\partial}{\partial S_{wn}}+\frac{\varphi\left(s^{**}-s^*\right)}{S_{wn}\left(s^*-s^{**}\right)-s^*+1}\frac{\partial}{\partial \varphi}+\right.$$
$$+\frac{\left(s^{**}-s^*\right)}{\left(S_{wn}\left(s^*-s^{**}\right)-s^*+1\right)\left(S_{wn}\left(s^*-s^{**}\right)-s^*\right)}\times$$
$$\left.\times\left(\mu_w\frac{\partial}{\partial \mu_w}-B_w\frac{\partial}{\partial B_w}\right)\right],$$
$$Y_{16}=g_5\left(s^*,s^{**}\right)\left[\frac{\partial}{\partial s^*}-\frac{K}{s^*-s^{**}}\frac{\partial}{\partial K}+\right.$$
$$+\frac{\varphi\left(1-s^*\right)}{\left(s^*-s^{**}\right)\left(S_{wn}\left(s^*-s^{**}\right)-s^*+1\right)}\frac{\partial}{\partial \varphi}+$$
$$+\frac{S_{wn}}{\left(S_{wn}\left(s^*-s^{**}\right)-s^*+1\right)\left(S_{wn}\left(s^*-s^{**}\right)-s^*\right)}\times$$
$$\left.\times\left(\mu_w\frac{\partial}{\partial \mu_w}-B_w\frac{\partial}{\partial B_w}\right)\right],$$
$$Y_{17}=g_6\left(s^*,s^{**}\right)\left[\frac{\partial}{\partial s^{**}}+\frac{K}{s^*-s^{**}}\frac{\partial}{\partial K}-\right.$$
$$-\frac{\varphi\left(1-s^{**}\right)}{\left(s^*-s^{**}\right)\left(S_{wn}\left(s^*-s^{**}\right)-s^*+1\right)}\frac{\partial}{\partial \varphi}+$$
$$+\frac{1-S_{wn}}{\left(S_{wn}\left(s^*-s^{**}\right)-s^*+1\right)\left(S_{wn}\left(s^*-s^{**}\right)-s^*\right)}\times$$
$$\left.\times\left(\mu_w\frac{\partial}{\partial \mu_w}-B_w\frac{\partial}{\partial B_w}\right)\right],$$
$$Y_{18}=\frac{g_7\left(s^*,s^{**}\right)}{S_{wn}\left(s^*-s^{**}\right)-s^*+1}\frac{B_o}{\varphi}\times$$
$$\times\left[\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}-\mu_w\frac{\partial}{\partial \mu_w}+B_w\frac{\partial}{\partial B_w}\right],$$
$$Y_{19}=\frac{g_8\left(s^*,s^{**}\right)}{S_{wn}\left(s^*-s^{**}\right)-s^*}\frac{B_w}{\varphi}\left[\mu_w\frac{\partial}{\partial \mu_w}-B_w\frac{\partial}{\partial B_w}\right],$$

где $f_1,\ldots,f_5$, $g_1,\ldots,g_8$ – произвольные функции своих аргументов.

При произвольных функциях p_{cwo}, B_o, B_w, μ_o, μ_w, ρ_o, ρ_w, φ, K, K_{ro}, K_{rw} система уравнений (1) допускает два оператора: $X_1 = Y_1$, $X_2 = Y_2$. Далее будем искать функциональные зависимости вида (2), инвариантные относительно оператора $\tilde{Y}=\sum_{i=1}^{6}C_iY_i+\sum_{j=7}^{19}Y_j$ с постоянными C_i. Такие инвариантные зависимости дают функции p_{cwo}, B_o, B_w, μ_o, μ_w, ρ_o, ρ_w, φ, K, K_{ro}, K_{rw}, при которых происходит расширение основной группы системы (1) [2]. Кроме того, потребуем выполнение дополнительного условия – наличие у оператора $\tilde{Y}$ инварианта определенного вида, отвечающего некоторой экспериментальной петрофизической закономерности.

3. ФОРМУЛА ТИМУРА. ИНВАРИАНТЫ

Проницаемость является свойством пористой среды пропускать через себя флюиды, мерой которого служит коэффициент проницаемости K. Коэффициент проницаемости зависит от особенностей строения пустотного пространства пористой среды, физических свойств флюида и природы физико-химического взаимодействия флюида и пористой среды.

Проницаемость может определяться прямым способом (по результатам фильтрации через породу) или косвенным. Наиболее часто косвенное определение проницаемости реализуют с использованием петрофизических связей пористости φ с проницаемостью K, значения пористости при этом получают в результате геофизических исследований скважин. Источником петрофизической информации, используемой в качестве опорной для интерпретации данных геофизических исследований, являются в свою очередь данные лабораторных исследований отобранных из скважин образцов породы. В частности на основе эмпирических соотношений, полученных в результате обобщения данных исследований образцов керна, предложена модель Тимура:

$$K = A\varphi^{\alpha}\left(s^*\right)^{-\beta}, \tag{3}$$

где s^* – остаточная водонасыщенность (минимальное значение водонасыщенности для данной породы), а постоянные A, α, β подбираются из условия наилучшего приближения к результатам лабораторных измерений.

Будем искать подалгебру $\langle\tilde{Y}\rangle$, обладающую инвариантом вида $F(K, \varphi, s^*)$ (обобщение формулы Тимура). Из условия инвариантности

$$\tilde{Y}F = 0$$

получаем некоторые ограничения на функции f_1, f_2, f_4, f_5, g_1, $g_4,\dots,g_7$ оператора $\tilde{Y}$, при этом инвариант $F(K, \varphi, s^*)$ принимает вид

$$F = F\left(K\frac{h_1\left(s^*\right)}{h_2\left(s^*\right)\left(1-s^*\right)}, \varphi h_1\left(s^*\right)\right),$$

или

$$K = \frac{h_2\left(s^*\right)}{h_1\left(s^*\right)}\left(1-s^*\right)\tilde{F}\left(\varphi h_1\left(s^*\right)\right), \tag{4}$$

где $h_1(s^*)$, $h_2(s^*)$ – произвольные функции. Далее мы рассматриваем подалгебру $\langle\tilde{Y}\rangle$, сохраняющую инвариантным соотношение (4), частным случаем которого является формула Тимура (3).

Вычислив инвариантные многообразия полученного оператора $\tilde{Y}$, получаем следующие зависимости, при которых происходит расширение группы:

$$\begin{gathered}
K_{ro} = A_1\left(1-S_{wn}\right)^{a_1}, \qquad K_{rw} = F_1\left(S_{wn}\right), \\
\rho_o = A_2\tilde{p}_o^{a_3}, \quad \mu_o = A_3\tilde{p}_o^{a_4}, \quad B_o = A_4\tilde{p}_o^{a_5}, \\
p_{cwo} = A_5 + F_2\left(\vartheta_1, \vartheta_3\right)\left(1-S_{wn}\right)^{a_2}, \\
K = F_3\left(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3\right)\frac{h_2\left(s^*\right)}{h_1\left(s^*\right)}\left(1-s^*\right), \\
\varphi = \frac{F_4\left(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3\right)}{h_1\left(s^*\right)}, \\
\rho_w = F_5\left(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3\right)\left(1-S_{wn}\right)^{a_2 a_3},
\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered}
\tilde{p}_0 = a_7 p_o + a_8, \\
\vartheta_1 = \frac{(1-s^*)^{a_7}\left(s^{**}-s^*\right)^{a_2 a_6}}{\left(1-s^{**}\right)^{a_2 a_6 + a_7}} h_2\left(s^*\right)^{a_7}, \\
\vartheta_2 = \tilde{p}_o\left(1-S_{wn}\right)^{-a_2}, \\
\vartheta_3 = \left(1-S_{wn}\right)\exp\left(\int J(s^*)ds^*\right)\Big|_{\vartheta_1 = const}, \\
J(s^*) = -a_7\frac{h'_2\left(s^*\right)\left(1-s^*\right)ds^*}{h_2\left(s^*\right)\left(a_7\left(s^{**}-s^*\right)+a_2 a_6\left(1-s^*\right)\right)},
\end{gathered}$$

$a_1,\dots,a_8$ – произвольные постоянные, а $F_1,\dots,F_5$, h_1, h_2 – произвольные функции своих аргументов. Не приводя конкретные зависимости для параметров B_w, μ_w по причине их громоздкости, отметим, что B_w, μ_w являются функциями ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 и s^*.

В случае, когда выполнены соотношения (5) для параметров исходной системы, основная алгебра системы расширяется до трехмерной с базисом

$$\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \\
&X_3 = \left[a_7\left(1 - 2a_3 + a_4 - \frac{a_1}{a_2}\right) - a_6\right]t\frac{\partial}{\partial t} + \\
&+ (1-a_3)a_7 x\frac{\partial}{\partial x} + (a_7 p_o + a_8)\frac{\partial}{\partial p_o} - \\
&-\frac{a_7}{a_2}(1-S_{wn})\frac{\partial}{\partial S_{wn}} - \frac{1-s^{**}}{1-s^*}\left[\frac{a_7}{a_2}(s^{**}-s^*) - \right. \\
&\left. -\left(a_6 + \frac{a_7}{a_2}\frac{s^{**}-s^*}{1-s^*}\right)\frac{h_2(s^*)}{h_2'(s^*)}\right]\frac{\partial}{\partial s^{**}} + \\
&+\left(a_6 + \frac{a_7}{a_2}\frac{s^{**}-s^*}{1-s^*}\right)\frac{h_2(s^*)}{h_2'(s^*)}\frac{\partial}{\partial s^*}.
\end{aligned}$$

Степенной вид зависимостей (5), полученных для относительной проницаемости, плотности, вязкости и коэффициента объемного расширения, соответствует используемым на практике для приближения функций данных параметров [6, 7, 8].

ВЫВОДЫ

На основе операторов группы преобразований эквивалентности были построены функциональные зависимости (5) для параметров системы, обеспечивающих расширение основной группы Ли, соответствующие экспериментально установленным зависимостям. Показано, что эмпирическое соотношение между петрофизическими параметрами проницаемости, пористости и остаточной водонасыщенности может быть получено как частный случай инвариантов подалгебры операторов преобразований эквивалентности. На примере модели фильтрации в работе продемонстрирована методика, позволяющая ограничивать функциональный произвол в исходных уравнениях с помощью соотношений, отражающих известные свойства модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

2. Нелокальные симметрии. Эвристический подход / И. Ш. Ахатов [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Новейшие достижения». 1989. Т. 34.

3. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт [и др.]. М.: Недра, 1984.

4. **Азиз Х., Сеттари Э.** Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982.

5. Методические рекомендации по подсчету геологических запасов нефти и газа объемным методом / Под ред. В. И. Петерсилье, В. И. Пороскуна, Г. Г. Яценко. Москва-Тверь: ВНИГНИ, НПЦ «Тверьгеофизика», 2003.

6. **Николаевский В. Н.** Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996.

7. **Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М.** Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993.

8. **Каневская Р. Д.** Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки углеводородов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

ОБ АВТОРАХ

Байков Виталий Анварович, зав. каф. матем., зам. ген. дир. по разработке «РН-УфаНИПИнефть». Д-р физ.-мат. наук по матем. физике (ИПМ им. М.В. Келдыша, 1991). Иссл. в обл. физ. и матем. моделирования, группового анализа дифференциальных уравнений.

Волков Владимир Григорьевич, рук. проектной группы ООО «РН-УфаНИПИнефть». Дипл. спец. по физике и математике (БГПУ, 2002). Иссл. в обл. группового анализа дифференциальных уравнений.

Галиакберова Ляйсан Радиковна, мл. науч. сотр. ИКИ. Дипл. инж.-математик (УГАТУ, 2007). Иссл. в обл. группового анализа дифференциальных уравнений.

Желтова Ирина Сергеевна, мл. науч. сотр. ИКИ. Дипл. инж.-математик (УГАТУ, 2007). Иссл. в обл. группового анализа дифференциальных уравнений.