СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 681.5

А. З. АСАНОВ, В. С. КАРИМОВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫМ ОБЪЕКТОМ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Решается задача синтеза системы автоматического управления многосвязным объектом с запаздываниями по состоянию, управлению и выходу на основе технологии вложения систем и метода компенсации запаздываний. Синтез системы управления проводится по трем случаям: синтез по свободной составляющей, синтез по вынужденной составляющей, синтез по свободной и вынужденной составляющим движения замкнутой динамической системы. Для каждого случая найдены соотношения, определяющие множество решений, и условия существования этих решений. Показана эффективность синтеза системы управления приведенным способом на примере. *Многосвязный объект управления*; *синтез системы автоматического управления*; *запаздывания*; *вложение систем*; *параллельная компенсация запаздываний*; *упредитель Смита*

Во многих современных технических объектах управления (ОУ) можно наблюдать явление запаздывания, заключающееся в том, что с началом изменения сигнала на входе ОУ сигнал на выходе объекта начинает изменяться только через некоторый интервал времени.

Запаздывания делятся на сосредоточенные и распределенные, причем сосредоточенные запаздывания могут быть локализованы по управлению, состоянию и выходу ОУ [1]. Примером объектов с запаздываниями по управлению могут служить реактивные двигатели в переходных режимах [2], ленточные транспортеры, прокатные станы, процессы сушки и горения, по состоянию – процессы с рециклом, в частности, процессы в измельчительных машинах или процессы в химических реакторах [3, 4], по выходу – объекты управления с более инерционными датчиками измерения, чем сам объект [1].

Как правило, влияние запаздываний на процессы управления негативно. Поэтому методы синтеза систем управления для вышеперечисленных объектов, не учитывающие фактор запаздывания, оказываются малоэффективными. Проблема конструирования подобных систем управления еще более усложняется в случае, если объект управления является многосвязным.

К настоящему времени известно значительное количество работ, посвященных исследованию систем автоматического управления (САУ) с запаздыванием по управлению с одним входом и одним выходом [1, 4, 5]. Многомерным (многосвязным) системам управления с запаздываниями посвящено небольшое количество научных работ [1].

Недостаточно освящены в научной литературе вопросы синтеза систем управления с запаздываниями по состоянию, а также синтеза систем с запаздываниями по управлению, выходу и состоянию.

Целью данной работы является аналитический синтез многосвязной системы автоматического управления объектом с запаздываниями по управлению, состоянию и выходу. Для решения задачи синтеза САУ с запаздываниями используется технология вложения систем и канонизация матриц [6, 7], а также методы параллельной компенсации запаздываний [1, 5].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть линейный многосвязный объект с сосредоточенными запаздываниями по управлению, состоянию и выходу может быть представлен дифференциально-разностными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^{l} A_i x(t-\tau_i) + \sum_{j=0}^{r} B_j u(t-\theta_j), \\ y(t) &= \sum_{i=0}^{l} C_i x(t-\tau_i), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\tau_0 = 0$, $0 < \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l$ – постоянные времена запаздываний в каналах состояния и выхода, $\theta_0 = 0$, $0 < \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ – постоянные времена за-

Контактная информация: public.mail@ksu.ru
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-08-00536)

паздываний в каналах управления, $i = 0,\ldots,l,\ j =$ $= 0,\ldots,r,\ u(t) \in R^s$ – вектор входных переменных, $y(t) \in R^m$ – вектор выходных переменных, $x(t) \in R^n$ – фазовый вектор объекта управления. В нашем случае матрицы A_i имеют размер nxn, C_i – mxn, являются числовыми и соответствуют временам запаздывания τ_i. Матрицы B_j размера nxs также являются числовыми и соответствуют временам запаздывания θ_j. Слагаемые $A_i x(t - \tau_i)$ описывают запаздывания сигналов на время τ_i во внутренних каналах ОУ, $B_j u(t - \theta_j)$ – запаздывания сигналов на время θ_j в каналах управления, $C_i x(t - \tau_i)$ – запаздывания сигналов на время τ_i в каналах выхода.

Начальные условия зададим с учетом задержек сигналов в ОУ, то есть будем формально рассматривать отрицательные моменты времени $t < 0$, предполагая, что в объекте происходили динамические процессы до начального момента времени:

$$x(t) = \varphi_x(t),\ t_0 - \tau \le t \le t_0,$$

$$u(t) = \varphi_u(t),\ t_0 - \theta \le t \le t_0,$$

где τ, θ – наибольшие времена запаздываний по состоянию и по управлению соответственно.

Необходимо добавить, что объект управления с запаздываниями должен быть устойчивым, так как в случае неустойчивого объекта применение любого закона управления, как правило, ведет к неустойчивости всей системы управления [8].

Задачу синтеза управления объектом с запаздываниями можно разделить в нашем случае на две части. На первом этапе решается подзадача компенсации запаздывания по управлению и выходу многосвязного ОУ с запаздываниями. На втором этапе проводится синтез системы автоматического управления для ОУ с запаздываниями по состоянию на основе реализации некоторого закона управления.

2. КОМПЕНСАЦИЯ ВХОД–ВЫХОДНЫХ ЗАПАЗДЫВАНИЙ

Применение преобразования Лапласа к уравнениям (1) дает операторную форму описания объекта:

$$px(p) = \sum_{i=0}^{l} A_i \mathrm{e}^{-\tau_i p} x(p) + \sum_{j=0}^{r} B_j \mathrm{e}^{-\theta_j p} u(p) + \\ + \varphi_x(p) + \varphi_u(p), \qquad (2)$$

$$y(p) = \sum_{i=0}^{l} C_i \mathrm{e}^{-\tau_i p} x(p).$$

Объект управления, представленный уравнениями (2), имеет вид, изображенный на рис. 1, а его матричная передаточная функция (МПФ), полученная путем известных преобразований, может быть выражена следующим образом:

$$W(p) = \sum_{i=0}^{l} C_i \mathrm{e}^{-\tau_i p} (pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i \mathrm{e}^{-\tau_i p})^{-1} \sum_{j=0}^{r} B_j \mathrm{e}^{-\theta_j p}.$$

Для компенсации запаздываний по управлению и выходу в объекте используем основные идеи упредителя Смита [1, 5].

Упредитель Смита и его обобщение на многосвязный случай. Упредитель Смита (рис. 2) основан на принципе динамической компенсации запаздываний, который заключается в предварительной компенсации влияния запаздываний на переходные процессы в контуре упреждения. В случае полного упреждения этот контур включает в себя разность модели объекта управления без запаздываний и модели объекта управления с запаздываниями. Следовательно, задачу регулирования можно решать без учета фактора запаздывания.

Предположим, что в многосвязных (многомерных) системах для решения задачи аддитивной компенсации запаздываний по управлению и выходу можно использовать идею упреждения Смита.

Следуя этому принципу, добавим параллельно к объекту контур компенсации запаздываний по управлению $R(p)$ и контур компенсации запаздываний по выходу $H(p)$ (рис. 3).

Контур $R(p)$, компенсирующий запаздывания по управлению, можно получить как разность модели объекта без запаздываний по управлению и модели объекта с запаздываниями по управлению. Контур $H(p)$, компенсирующий запаздывания по выходу, можно получить как разность модели объекта без запаздываний по выходу и модели объекта с запаздываниями по выходу. Тем самым используется идея, предложенная в схеме Смита: компенсация запаздываний с помощью подсистем, представляющих собой разность моделей объекта без запаздываний и с запаздываниями.

Контур, компенсирующий запаздывания по входу (рис. 3), может быть представлен в виде МПФ:

$$R(p) = \sum_{i=0}^{l} C_i \mathrm{e}^{-\tau_i p} (pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i \mathbf{e}^{-\tau_i p})^{-1} \times \\ \times (\sum_{j=0}^{r} B_j - \sum_{j=0}^{r} B_j \mathbf{e}^{-\theta_j p}),$$

а контур, компенсирующий запаздывания по выходу:

$$H(p) = (\sum_{i=0}^{l} C_i - \sum_{i=0}^{l} C_i \mathbf{e}^{-\tau_i p})(pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i \mathbf{e}^{-\tau_i p})^{-1} \sum_{j=0}^{r} B_j.$$

Очевидно, что контуры компенсации $R(p)$ и $H(p)$ должны быть выбраны таким образом, что при их параллельном присоединении к объекту $W(p)$ запаздывания по входу и выходу полностью компенсируются:

$$\begin{aligned} &W(p) + R(p) + H(p) = \sum_{i=0}^{l} C_i \mathbf{e}^{-\tau_i p} \times \\ &\times (pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i \mathbf{e}^{-\tau_i p})^{-1} \sum_{j=0}^{r} B_j \mathbf{e}^{-\theta_j p} + \\ &+ \sum_{i=0}^{l} C_i \mathbf{e}^{-\tau_i p} (pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i \mathbf{e}^{-\tau_i p})^{-1} \times \\ &\times (\sum_{j=0}^{r} B_j - \sum_{j=0}^{r} B_j \mathbf{e}^{-\theta_j p}) + (\sum_{i=0}^{l} C_i - \sum_{i=0}^{l} C_i \mathbf{e}^{-\tau_i p}) \times \\ &\times (pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i \mathbf{e}^{-\tau_i p})^{-1} \sum_{j=0}^{r} B_j. \end{aligned}$$

После сокращения одинаковых компонент получим

$$\begin{aligned} &W(p) + R(p) + H(p) = \\ &= \sum_{i=0}^{l} C_i \left(pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i e^{-\tau_i p} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{r} B_j. \end{aligned} \quad (3)$$

В результате компенсации получили объект (3), МПФ которой перестала содержать запаздывания по входу и выходу.

Необходимо добавить, что компоненты МПФ полученного ОУ $\sum_{i=0}^{l} C_i$ и $\sum_{j=0}^{r} B_j$ можно найти, приравняв времена запаздываний нулю в компонентах исходного ОУ $\sum_{i=0}^{l} C_i \mathbf{e}^{-\tau_i p}$ и $\sum_{j=0}^{r} B_j \mathbf{e}^{-\theta_j p}$. Они обозначают обыкновенные матрицы входа и выхода, которые в дальнейшем мы обозначим как C и B соответственно.

Таким образом, в результате аддитивной компенсации запаздываний получили модифицированный объект управления, содержащий запаздывания только по состоянию, который можно представить в виде дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{l} A_i x(t - \tau_i) + Bu(t), \\ &y(t) = Cx(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $B = \sum_{j=0}^{r} B_j$, $C = \sum_{i=0}^{l} C_i$.

3. КОМПЕНСАЦИЯ ЗАПАЗДЫВАНИЙ ПО СОСТОЯНИЮ И ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Пусть регулярный закон управления в общем случае описывается матричным уравнением

$$G(p)g(p) = K(p)y(p) + u(p), \quad (5)$$

где $G(p)$ – матричная передаточная функция (МПФ) предкомпенсатора размера $s \times s$, $K(p)$ – МПФ регулятора размера $n \times s$, $g(p) \in R^S$ – вектор управления на входе системы.

Полученный после преобразования Лапласа скомпенсированный объект (4) может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} &px(p) = \sum_{i=0}^{l} A_i \mathbf{e}^{-\tau_i p} x(p) + \sum_{j=0}^{r} B_j u(p) + \varphi_x(p), \\ &y(p) = \sum_{i=0}^{l} C_i x(p). \end{aligned} \quad (6)$$

Для ОУ (4) и закона управления (5) необходимо найти МПФ предкомпенсатора $G(p)$ и регулятора $K(p)$ или условия, их определяющие, при которых поведение САУ (рис. 4) будет описываться желаемыми матричными передаточными функциями $\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)$ и/или $\mathbf{E}_y^{g}(p)$.

МПФ $E_y^{\varphi_x}(p)$ от начального условия φ_x к выходу y – это свободная составляющая движения замкнутой динамической системы, МПФ $E_y^{g}(p)$ от управляющих воздействий g к выходу y – это вынужденная составляющая движения замкнутой динамической системы.

Для модифицированного объекта управления с запаздываниями по состоянию (4) проведем синтез системы управления с использованием технологии вложения систем [6, 7, 9].

С учетом уравнений (5), (6) проблемная матрица (проматрица) рассматриваемой задачи будет иметь вид:

$$\Omega(p) = \begin{bmatrix} pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i \mathbf{e}^{-\tau_i p} & 0 & -\sum_{j=0}^{r} B_j & 0 \\ -\sum_{i=0}^{l} C_i & I_m & 0 & 0 \\ 0 & K(p) & I_s & -G(p) \\ 0 & 0 & 0 & I_s \end{bmatrix}.$$

Репроматрица (реверсивная проблемная матрица, обратная проматрице [6, 7]) системы в обобщенном виде представляется следующим образом:

$$\Omega^{-1}(p)=\begin{bmatrix} E_x^{\varphi_x}(p) & * & * & E_x^{g}(p) \\ E_y^{\varphi_x}(p) & * & * & E_y^{g}(p) \\ E_u^{\varphi_x}(p) & * & * & E_u^{g}(p) \\ 0 & 0 & 0 & I_s \end{bmatrix}.$$

Здесь $E_j^i(p)$ – МПФ от параметра i к параметру j. Блоки, не представляющие особого интереса, отмечены звездочками.

Матрицы вложения α и β, используемые при вложении систем, имеют вид:

$\alpha=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_n & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{т}}$, $\beta=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{I}_m & 0 & 0\end{bmatrix}$

при $\omega=E_y^{\varphi_x}(p)$;

$\alpha=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_s\end{bmatrix}^{\mathrm{т}}$, $\beta=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{I}_m & 0 & 0\end{bmatrix}$

при $\omega=E_y^{g}(p)$;

$\alpha=\begin{bmatrix}\mathrm{I}_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_s\end{bmatrix}^{\mathrm{т}}$, $\beta=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{I}_m & 0 & 0\end{bmatrix}$

при $\omega=[E_y^{g}(p) \quad E_y^{\varphi_x}(p)]$, где ω – образ синтезируемой системы, то есть желаемая передаточная функция системы.

Общая схема решения поставленной задачи заключается в последовательном выполнении процедур технологии вложения [6, 7] – последовательной факторизации матриц Ω = ΣΞ, α = = Σδ, β = πΞ, ω = πδ. Это позволяет получить уравнения, которым должны удовлетворять МПФ предкомпенсатора $G(p)$ и регулятора $K(p)$, для трех случаев: при синтезе по свободной составляющей $E_y^{\varphi_x}(p)$, при синтезе по вынужденной составляющей $E_y^{g}(p)$, при синтезе по свободной $E_y^{\varphi_x}(p)$ и вынужденной $E_y^{g}(p)$ составляющим движения замкнутой динамической системы.

Для решения матричных уравнений, которые будут получаться в результате применения процедур вложения, возможно применение аппарата канонизации матриц [10].

Таким образом, задача синтеза системы автоматического управления с запаздываниями по состоянию сводится к стандартной задаче, основанной на технологии вложения систем для трех случаев синтеза.

1. Синтез по свободной составляющей движения замкнутой динамической системы $E_y^{\varphi_x}(p)$.

В этом случае свободное движение системы, обусловленное начальными условиями объекта, не зависит от выбора предкомпенсатора, поэтому закон управления принимает вид

$$u(p)=-K(p)y(p).$$

Применение технологии вложения при синтезе по свободной составляющей дает следующее уравнение для определения регулятора $K(p)$:

$$E_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_jK(p)\sum_{i=0}^{l}C_i=\sum_{i=0}^{l}C_i-E_y^{\varphi_x}(p)\times \\ \times(pI_n-\sum_{i=0}^{l}A_i\mathbf{e}^{-\tau_i p}). \qquad (7)$$

Из уравнения (7) с использованием результатов [6, 7] можно выразить множество регуляторов:

$$\left\{\mathbf{K}(p)\right\}_{\mu,\eta}=(\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j\widetilde{)}(\sum_{i=0}^{l}C_i- \\ -\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)(p\mathbf{I}_n-\sum_{i=0}^{l}A_i\mathbf{e}^{-\tau_i p}))(\sum_{i=0}^{l}C_i\widetilde{)}+ \qquad (8) \\ +\overline{\mathrm{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j}^{R}\mu(p)+\eta(p)\overline{\sum_{i=0}^{l}C_i}^{L},$$

где η(p), μ(p) – произвольные дробно-полиномиальные матрицы соответствующих размеров. Условия разрешимости уравнения (7) при применении метода канонизации, а значит, и существования множества решений (8) имеют вид:

$$\overline{\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j}^{L}\times \\ \times\left[\sum_{i=0}^{l}C_i-\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)(p\mathbf{I}_n-\sum_{i=0}^{l}A_i\mathbf{e}^{-\tau_i p})\right]=0, \qquad (9) \\ \left[\sum_{i=0}^{l}C_i-\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)(p\mathbf{I}_n-\sum_{i=0}^{l}A_i\mathbf{e}^{-\tau_i p})\right]\overline{C}^{R}=0,$$

или

$$\sum_{i=0}^{l}C_i-\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)(p\mathbf{I}_n-\sum_{i=0}^{l}A_i\mathbf{e}^{-\tau_i p})= \\ =\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j(\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j\widetilde{)}^{R}\xi(p), \\ \sum_{i=0}^{l}C_i-\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)(p\mathbf{I}_n-\sum_{i=0}^{l}A_i\mathbf{e}^{-\tau_i p})= \qquad (10) \\ =\chi(p)(\sum_{i=0}^{l}C_i\widetilde{)}^{L}\sum_{i=0}^{l}C_i,$$

где ξ(*p*), *χ*(p) – произвольные дробно-полиномиальные матрицы соответствующих размеров.

2. Синтез по вынужденной составляющей движения замкнутой динамической системы $\mathbf{E}_y^{g}(p)$.

Применение технологии вложения при синтезе по вынужденной составляющей дает следующие уравнения относительно искомых передаточных матриц $G(p)$ и $K(p)$:

$$\pi_x(p)\sum_{j=0}^{r}B_jK(p)\sum_{i=0}^{l}C_i=\sum_{i=0}^{l}C_i-\pi_x(p)\times$$
$$\times(pI_n-\sum_{i=0}^{l}A_i\mathbf{e}^{-\tau_i p}), \qquad (11)$$
$$\pi_x(p)\sum_{j=0}^{r}B_jG(p)=\mathbf{E}_y^g(p),$$

где $\pi_x(p)$ – вспомогательная дробно-полиномиальная матрица размера $m\times n$.

Используя результаты [6, 7], множество регуляторов и предкомпенсаторов в этом случае можно описать формулами:

$$\left\{\mathbf{K}(p)\right\}_{\mathbf{T},\lambda,\vartheta}=[(\sum_{j=0}^{r}B_j\tilde{)}(\mathbf{T}^{-1}(p)\times$$
$$\times\begin{bmatrix}(\sum_{i=0}^{l}C_i\tilde{)}^L\sum_{i=0}^{l}C_i\\ \lambda(p)\end{bmatrix}-(p\mathbf{I}_n-\sum_{i=0}^{l}A_i\mathbf{e}^{-\tau_i p}))+$$
$$+\overline{\sum_{j=0}^{r}B_j}^{R}\vartheta(p)](\sum_{i=0}^{l}C_i\tilde{)}+\chi(p)\overline{\sum_{i=0}^{l}C_i}^{L}, \qquad (12)$$
$$\left\{\mathbf{G}(p)\right\}_{\mathbf{N},\xi,\kappa}=(\sum_{j=0}^{r}B_j\tilde{)}\mathbf{N}^{-1}(p)\times$$
$$\times\begin{bmatrix}(\mathbf{E}_y^g(p)\tilde{)}^L\mathbf{E}_y^g(p)\\ \kappa(p)\end{bmatrix}+\overline{\sum_{j=0}^{r}B_j}^{R}\xi(p),$$

удовлетворяющими условиям разрешимости:

а) ранг матрицы $\mathbf{E}_y^g(p)$ не превышает ранга матрицы $\sum_{j=0}^{r}B_j$:

$$\mathrm{rank}\mathbf{E}_y^g(p)\le\mathrm{rank}\sum_{j=0}^{r}B_j\,;$$

б) существует произвольная матрица λ, дополняющая строчечный базис $(\sum_{i=0}^{l}C_i\tilde{)}^L\sum_{i=0}^{l}C_i$ матрицы $\sum_{i=0}^{l}C_i$ до размерности пространства состояний n, и произвольная обратимая матрица $T(p)$ размера $m\times n$, при которых выполняются условия

$$\overline{\sum_{j=0}^{r}B_j}^{L}(T^{-1}(p)\begin{bmatrix}(\sum_{i=0}^{l}C_i\tilde{)}^L\sum_{i=0}^{l}C_i\\ \lambda(p)\end{bmatrix}-$$
$$-(pI_n-\sum_{i=0}^{l}A_i\mathbf{e}^{-\tau_i p}))=0,$$

$$\left\{\mathbf{K}(p)\right\}_{\mathbf{T},\lambda,\vartheta}=[(\sum_{j=0}^{r}B_j\tilde{)}(\mathbf{T}^{-1}(p)\times$$
$$\times\begin{bmatrix}(\sum_{i=0}^{l}C_i\tilde{)}^L\sum_{i=0}^{l}C_i\\ \lambda(p)\end{bmatrix}-(p\mathbf{I}_n-\sum_{i=0}^{l}A_i\mathbf{e}^{-\tau_i p}))+$$
$$+\overline{\sum_{j=0}^{r}B_j}^{R}\vartheta(p)]\overline{\sum_{i=0}^{l}C_i}^{R}=0;$$

в) существуют произвольные дробно-полиномиальные матрицы $\psi(p)$ и $\eta(p)$, дополняющие столбцовые базисы матрицы $\sum_{i=0}^{l}C_i$ и желаемой передаточной матрицы $\mathbf{E}_y^g(p)$ до размерности пространства состояний n, а также произвольная обратимая матрица $N(p)$, при которой выполняются условия

$$\eta(p)\lambda(p)=0,$$
$$\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{l}C_i(\sum_{i=0}^{l}C_i\tilde{)}^R & \eta(p)\end{bmatrix}\mathbf{T}(p)=$$
$$=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_y^g(p)(\mathbf{E}_y^g(p)\tilde{)}^R & \psi(p)\end{bmatrix}\mathbf{N}(p),$$

где $\vartheta(p)$, $\xi(p)$, $\chi(p)$ – произвольные дробно-полиномиальные матрицы соответствующих размеров, $\kappa(p)$ – произвольная дробно-полиномиальная матрица, дополняющая строчечный базис желаемой МПФ $\mathbf{E}_y^g(p)$ до размерности пространства состояний n и удовлетворяющая условию

$$\psi(p)\kappa(p)=0,$$

матрицы $T(p)$, $N(p)$, $\lambda(p)$, $\eta(p)$ и $\psi(p)$ принимают значения, удовлетворяющие условиям разрешимости *а*), *б*), *в*).

3. Синтез по свободной $\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)$ и вынужденной $\mathbf{E}_y^g(p)$ составляющим движения замкнутой динамической системы.

Применение технологии вложения при синтезе по вынужденной и свободной составляющим дает следующие уравнения относительно искомых передаточных матриц $G(p)$ и $K(p)$:

$$E_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_jK(p)\sum_{i=0}^{l}C_i=\sum_{i=0}^{l}C_i-E_y^{\varphi_x}(p)\times$$
$$\times(pI_n-\sum_{i=0}^{l}A_i\mathbf{e}^{-\tau_i p}), \qquad (13)$$
$$\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j\mathbf{G}(p)=\mathbf{E}_y^g(p).$$

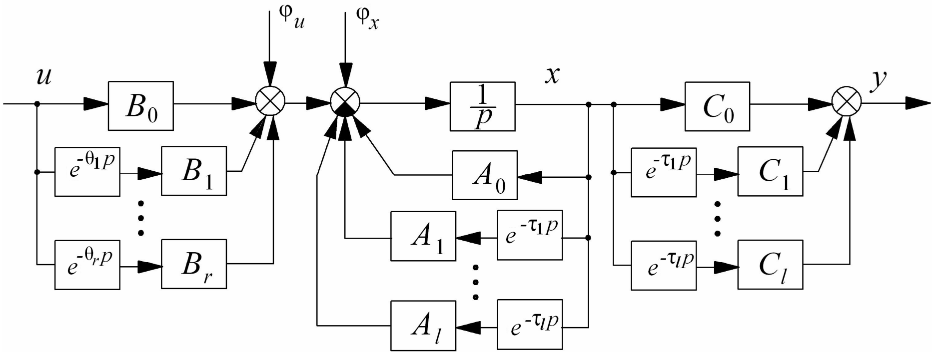

Рис. 1. Многосвязный объект управления с запаздываниями по входу, выходу и состоянию

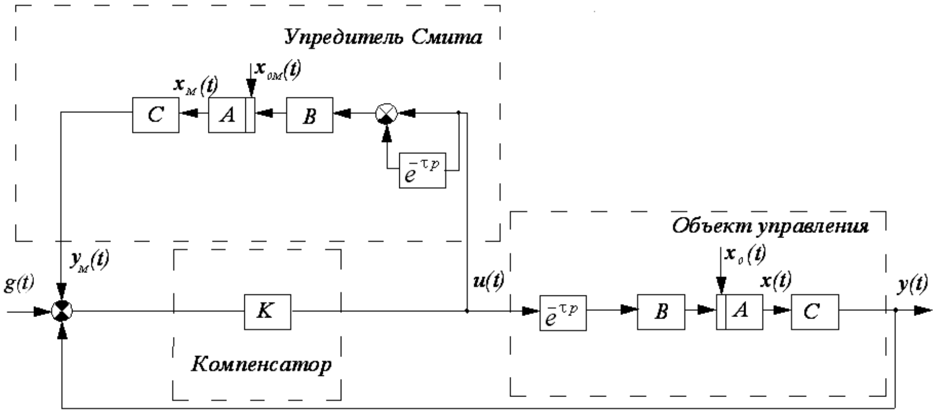

Рис. 2. Скалярная система автоматического управления с упредителем Смита

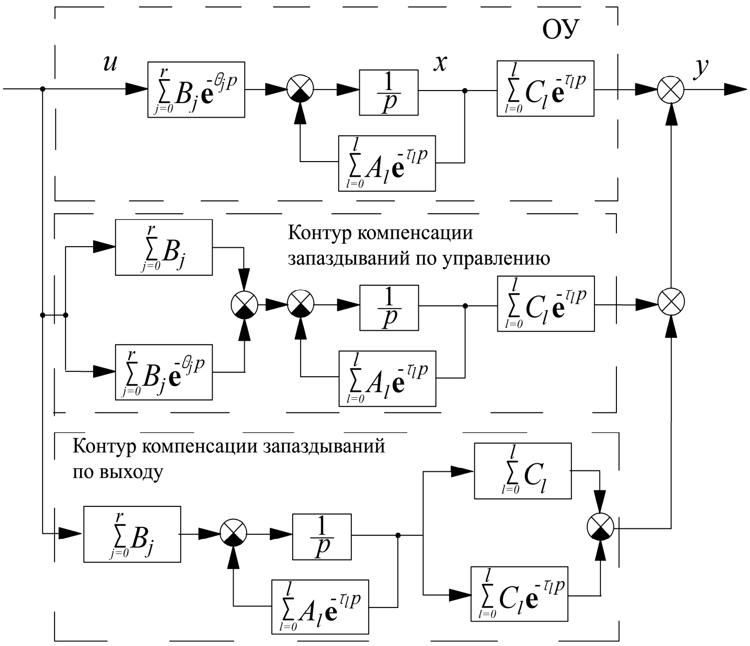

Рис. 3. Параллельная компенсация запаздываний многосвязного объекта по управлению и выходу

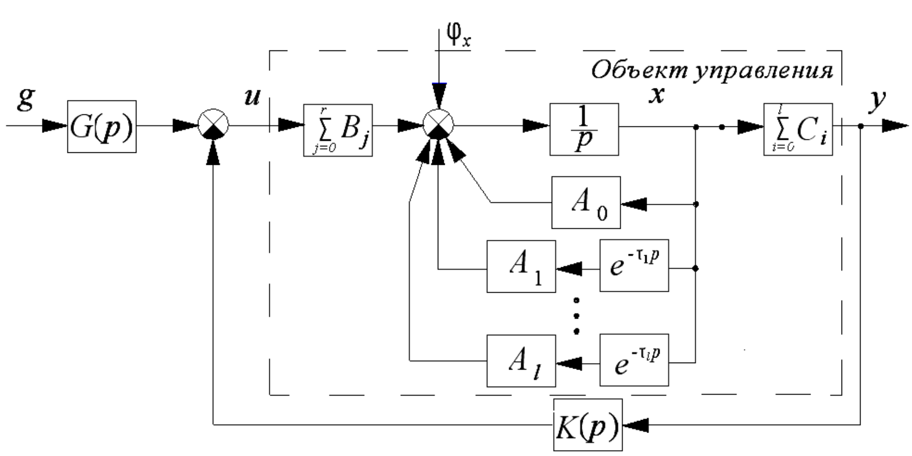

Рис. 4. Система автоматического управления многосвязным объектом с запаздываниями по состоянию

Из уравнений (13) множество регуляторов и предкомпенсаторов может быть выражено следующим образом:

$$\left\{\mathbf{K}(p)\right\}_{\mu,\eta} = \widetilde{\left(\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j\right)}\left(\sum_{i=0}^{l}C_i - \mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\left(p\mathbf{I}_n - \sum_{i=0}^{l}A_i\mathbf{e}^{-\tau_i p}\right)\right)\widetilde{\left(\sum_{i=0}^{l}C_i\right)} + \overline{\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j}^{R}\mu(p) + \eta(p)\overline{\sum_{i=0}^{l}C_i}^{L}, \qquad (14)$$

$$\left\{\mathbf{G}(p)\right\}_{\eta} = \widetilde{\left(\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j\right)}\mathbf{E}_y^{g}(p) + \overline{\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j}^{R}\chi(p),$$

где $\eta(p)$, $\mu(p)$, $\chi(p)$ – произвольные дробно-полиномиальные матрицы соответствующих размеров. Условия разрешимости уравнений (13) и получения множества решений (14) имеют вид:

$$\overline{\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j}^{L} \times \left[\sum_{i=0}^{l}C_i - \mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\left(p\mathbf{I}_n - \sum_{i=0}^{l}A_i\mathbf{e}^{-\tau_i p}\right)\right] = 0,$$

$$\left[\sum_{i=0}^{l}C_i - \mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\left(p\mathbf{I}_n - \sum_{i=0}^{l}A_i\mathbf{e}^{-\tau_i p}\right)\right] \times \overline{\sum_{i=0}^{l}C_i}^{R} = 0, \qquad (15)$$

$$\overline{\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j}^{L}\mathbf{E}_y^{g}(p) = 0$$

или

$$\sum_{i=0}^{l}C_i - \mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\left(p\mathbf{I}_n - \sum_{i=0}^{l}A_i\mathbf{e}^{-\tau_i p}\right) = \left(\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j\right)\widetilde{\left(\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j\right)}^{R}\xi(p),$$

$$\sum_{i=0}^{l}C_i - \mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\left(p\mathbf{I}_n - \sum_{i=0}^{l}A_i\mathbf{e}^{-\tau_i p}\right) = \lambda(p)\widetilde{\left(\sum_{i=0}^{l}C_i\right)}^{L}\sum_{i=0}^{l}C_i, \qquad (16)$$

$$\mathbf{E}_y^{g}(p) = \left(\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j\right) \times \widetilde{\left(\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j\right)}^{R}\kappa(p),$$

где $\lambda(p)$, $\xi(p)$, $\kappa(p)$ – произвольные дробно-полиномиальные матрицы соответствующих размеров.

Таким образом, получены соотношения (8), (12), (14) с условиями существования этих решений (9) или (10), условиями *а*), *б*), *в*) при соотношении (12), условиями (15) или (16) соответственно, которые позволяют найти множество регуляторов и предкомпенсаторов, удовлетворяющих закону управления (5).

4. ПРИМЕР

Рассмотрим синтез САУ для некоторого объекта с запаздываниями по состоянию, управлению и выходу.

Пусть устойчивый объект управления задан следующими дифференциально-разностными уравнениями:

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 0.5x_1(t-1) - 3x_3(t) + u_1(t-1),$$
$$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + 2u_2(t) + u_3(t-2),$$
$$\dot{x}_3(t) = -2x_2(t) - x_3(t) - x_3(t-1) + u_3(t) + u_1(t-1),$$
$$y_1(t) = x_1(t), y_2(t) = 2x_2(t), y_3(t) = x_3(t-1).$$

Следовательно, ОУ можно представить матрицами в пространстве состояний:

$$A_0=\begin{bmatrix}-1&0&-3\\0&-2&0\\0&-2&-1\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}-0.5&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\ B_0=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\ C_0=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$ с запаздываниями $\tau_1=1\,\text{с},\ \tau_2=2\,\text{с}.$

На первом этапе введем в параллельную цепь объекта контур компенсации запаздываний по управлению:

$$R(p)=\frac{1}{(p+1+\mathbf{e}^{-p})}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\frac{(2(p+1+\mathbf{e}^{-p})-6)(1-\mathbf{e}^{-p})}{(2p+2+\mathbf{e}^{-p})}&0&\frac{12(1-\mathbf{e}^{-2p})}{(2p+2+\mathbf{e}^{-p})(p+2)}\\0&0&\frac{2(1-\mathbf{e}^{-2p})(p+1+\mathbf{e}^{-p})}{(p+2)}\\\mathbf{e}^{-p}(1-\mathbf{e}^{-p})&0&\frac{-2\mathbf{e}^{-p}(1-\mathbf{e}^{-2p})}{(p+2)}\end{bmatrix}.$$

$R(p)$ можно представить в пространстве состояний матрицами $A_0=\begin{bmatrix}-1&0&-3\\0&-2&0\\0&-2&-1\end{bmatrix}$,

$$A_1=\begin{bmatrix}-0,5&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\ \sum_{j=0}^{2}B_j=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&0&1\end{bmatrix},\ B_0=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\ C_0=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$ с запаздываниями $\tau_1=1\,\text{с},\ \tau_2=2\,\text{с}.$

Контуру компенсации запаздываний по выходу

$$H(p)=\frac{1}{p+\mathbf{e}^{-p}+1}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1-\mathbf{e}^{-p}&\frac{-4(1-\mathbf{e}^{-p})}{(p+2)}&\frac{-2(1-\mathbf{e}^{-p})+(1-\mathbf{e}^{-p})(p+2)}{(p+2)}\end{bmatrix}.$$

можно поставить в соответствие матрицы в пространстве состояний

$$A_0=\begin{bmatrix}-1&0&-3\\0&-2&0\\0&-2&-1\end{bmatrix},A_1=\begin{bmatrix}-0,5&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

$$\sum_{j=0}^{2}B_j=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&0&1\end{bmatrix},\quad \sum_{i=0}^{1}C_i=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad C_0=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$C_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$ с временем запаздывания $\tau_1=1\,\text{с}.$

После применения компенсации получается ОУ в пространстве состояний, имеющий вид (4) и содержащий только запаздывания по состоянию:

$$A_0=\begin{bmatrix}-1&0&-3\\0&-2&0\\0&-2&-1\end{bmatrix},A_1=\begin{bmatrix}-0,5&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

$$\sum_{j=0}^{2}B_j=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\1&0&1\end{bmatrix},\ \sum_{i=0}^{1}C_i=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

величина запаздывания составляет $\tau_1=1\,\text{с}.$

На втором этапе осуществляется синтез САУ по вынужденной и свободной составляющим движения замкнутой динамической системы. Устойчивые желаемые МПФ в этом случае зададим в виде:

$$E_y^{\varphi_x}=\begin{bmatrix}\frac{1}{p+1}&0&0\\0&\frac{2}{p+3}&0\\0&\frac{2}{(p+3)(p+1)}&\frac{1}{p+1}\end{bmatrix},$$

$$E_y^{g}=\begin{bmatrix}\frac{1}{p+1}&0&0\\0&\frac{2}{p+3}&0\\\frac{1}{p+1}&\frac{2}{(p+3)(p+1)}&\frac{1}{p+1}\end{bmatrix}.$$

Выполним проверку существования множества решений регуляторов и предкомпенсаторов по формулам (15), предварительно вычислив левый делитель нуля произведения $\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j$ и правый делитель нуля матрицы $\sum_{i=0}^{l}C_i$ с помощью программных средств [11]:

$$\overline{\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)\sum_{j=0}^{r}B_j}^{L}\equiv 0,\ \overline{\sum_{i=0}^{l}C_i}^{R}\equiv 0.$$

Следовательно, условия разрешимости уравнений (15) полностью выполняются.

Значения регулятора и предкомпенсатора, удовлетворяющие закону управления (5) по формулам (14) при $\eta(p) \equiv 0$, $\mu(p) \equiv 0$, $\chi(p) \equiv 0$:

$$K(p) = \begin{bmatrix} -0{,}5\mathbf{e}^{-p} & 0 & -3 \\ -0{,}25\mathbf{e}^{-p} & 1.25 & 0.5(\mathbf{e}^{-p}-3) \\ -0{,}5\mathbf{e}^{-p} & -2 & 3-\mathbf{e}^{-p} \end{bmatrix},$$

$$G(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из анализа переходных характеристик следует, что МПФ полученной системы управления полностью соответствует желаемым МПФ.

Результаты имитационного моделирования подтверждают компенсацию запаздываний по состоянию, управлению, выходу и достижение желаемых процессов в системе управления.

Необходимо отметить, что полученный регулятор и предкомпенсатор несложно представить в виде цифровых моделей, реализованных в качестве алгоритмов, которые легко программируются на ЭВМ.

ВЫВОДЫ

После выполнения параллельной компенсации запаздываний и процедур технологии вложения систем получены формулы для регуляторов и предкомпенсаторов, а также условия существования множества решений регуляторов и предкомпенсаторов. Выражения для регуляторов и предкомпенсаторов были выведены для трех случаев синтеза: по свободной составляющей $\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)$, по вынужденной составляющей $\mathbf{E}_y^{g}(p)$, по свободной $\mathbf{E}_y^{\varphi_x}(p)$ и вынужденной $\mathbf{E}_y^{g}(p)$, составляющим движения замкнутой динамической системы.

Предлагаемый в работе способ дает точное аналитическое решение задачи синтеза системы управления с запаздываниями по управлению, состоянию и выходу. Особенностью представленного подхода является то, что объект управления изначально является многосвязным (многомерным).

На числовом примере показывается эффективность применения предлагаемого способа решения задачи синтеза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Филимонов А. Б.** Спектральная декомпозиция систем с запаздываниями. Компенсация запаздываний. М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2002. 288 с.
2. **Черкасов Б. А.** Автоматика и регулирование воздушно-реактивных двигателей. М.: Машиностроение, 1988. 360 с.
3. **Янушевский Р. Т.** Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978, 416 с.
4. Алгоритмизация управления объектами с запаздыванием / Л. П. Мышляев [и др.]. Кемерово: Кемеровск. гос. ун-т. 1989. 83 с.
5. **Гурецкий Х.** Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. М.: Машиностроение, 1974. 327 с.
6. **Буков В. Н.** Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во науч. лит-ры Н. Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.
7. **Асанов А. З.** Технология вложения систем и ее приложения. Уфа: УГАТУ, 2007. 227 с.
8. **Кирьянен А. И.** Устойчивость систем с последействием и их применения. СПб.: СПбГУ, 1994. 236 с.
9. **Асанов А. З., Каримов В. С.** Применение технологии вложения в задаче синтеза САУ для многосвязного объекта с запаздываниями по состоянию // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 9. С. 13–19.
10. Решение линейных матричных уравнений методом канонизации / В. Н. Буков [и др.] // Вестник Киевского университета. Вып. 1. 2002. С. 19–28.
11. **Асанов А. З., Ахметзянов И. З.** Канонизация матриц произвольного размера средствами MATLAB // Тр. 2 всероссийск. науч. конф. «Проектирование инженерных и научных приложений в среде MATLAB». М.: ИПУ РАН, 2004. С. 796–804.

ОБ АВТОРАХ

Асанов Асхат Замилович, проф. каф. ПМиИ КГУ. Дипл. инж. по радиофизике и электронике (КГУ, 1972). Д-р техн наук по системн. анализу, управление и обработке информации (УГАТУ, 2004). Иссл. в обл. системн. анализа и теории управления.

Каримов Валерий Сергеевич, асс. той же каф. Дипл. инж. по автоматизации технол. процессов и произв. (КамПИ, 2004). Иссл. в обл. теории автоматическ. управления, многосвязн. систем с запаздываниями.