Уфа : УГАТУ, 2009 Вестник УГАТУ • Управление, ВТ и И Т. 13, № 2(35). С. 39–50

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 681.5:51

Г. Н. ЗВЕРЕВ, Р. В. БОРОВСКАЯ, Н. А. КОЛУПАЕВА

ОЦЕНКА И ОПТИМИЗАЦИЯ ТОЧНОСТИ ДИСКРЕТНО-ЛОГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПО ИСКАЖЕННЫМ ФАКТИЧЕСКИМ И АПРИОРНЫМ ДАННЫМ

Выполнена строгая формализация прямых и обратных задач принятия решений в логических шкалах по искаженным фактическим и теоретическим априорным данным. В ситуациях с числом фактических источников данных 0, 1, 2 и одним априорным источником дан ответ на вопрос: существуют ли в полном и однородном по уровню искажений фактов лишние, неинформативные логические связи – функции и предикаты, не обладающие наивысшей точностью решений задач диагностики, распознавания, классификации, и как они ранжируются по информативности. *Принятие решений*; *прямые и обратные задачи*; *частотная логика*; *информатика*

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

В своей научной и практической деятельности человек принимает разнообразные решения в процессах *исследования* окружающей действительности (диагноз, прогноз, распознавание образов), *проектирования* новых изделий и *планирования* деятельности, *управления* действиями людей и автоматов [1, 2]. Эти решения ориентированы на выбор наилучшего, оптимального варианта из доступного множества альтернатив и основаны обычно на фактических данных и результатах их обработки, на теоретических (модельных, априорных) представлениях и рассуждениях, которые в конкретной проблемной ситуации предполагаются достоверными, достаточно надежными, чтобы получить однозначно определенные и правильные результаты.

Однако фактические и априорные знания о проблемной и решающих системах – факты и априорика стоящих задач – неполны и подвержены искажениям, поэтому важно иметь возможность оценить последствия подобных информационных потерь и оптимизировать по точности процедуры принятия решений в зависимости от качества исходной фактической и априорной информации. Строгий учет реальных неопределенностей имеющихся знаний (фактов и априорики), с которыми сталкиваются люди в своей жизни, лучше выполнить в ситуациях элементарной различимости объектов проблемной ситуации в двоичной шкале свойств и связей {да, нет}, а затем обобщить решения на описания реальных ситуаций. В данной работе мы ограничимся простейшими моделями зависимостей между параметрами информационных ситуаций, заданными в двоичных (логических и числовых) шкалах значений, и простейшими моделями неопределенностей, однако многие выводы при этом сохраняются и в более сложных случаях.

Смысл последующих решений поставленной проблемы базируется на формализации прямых и обратных задач классификации в семантике исследования, в которых по наблюдаемым, измеряемым количественным и качественным признакам проблемного объекта (прообраза), по его изображениям – образам объекта – необходимо с максимальной точностью диагностировать, распознать или предсказать состояние неизвестного двоичного классификационного признака $x \in$ {да, объект принадлежит выделенному классу, либо нет, не принадлежит}, «быть или не быть», либо в логической шкале модальностей знаний {истина, ложь}, или же в абстрактной числовой (битовой) шкале – $x \in \{0, 1\}$. Эти решения с некоторой коррекцией семантической схемы переносятся на задачи проектирования, управления, целеполагания [1].

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Пусть проблемный объект и окружающая его среда характеризуется набором существенных свойств $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ – количественных параметров и качественных признаков, которые однозначно определяют результаты наблюдений, измерений, построения изображе-

Контактная информация: (347) 273-32-00

ний $y = (y_1, y_2,\ldots,y_m)$ в форме сенсорного преобразования $y = A(u)$, где m – число источников фактических данных $y_i = A_i(u)$, $1 \le i \le m$, в общем случае $m \ge 0$, A – прямая модель сенсорного процесса, который отображает свойства материального явления и процесса наблюдения, воздействующих на вход сенсора, в информацию y. Вектор u называется *вектором причин*, компоненты которого разделяются на полезные причины и шумы, помехи, искажающие результаты наблюдений. Вектор y может содержать полезную и бесполезную информацию, либо дезинформацию. Примерами сенсора в науке и технике служат измерительные приборы, информационно-измерительные системы – это объективированные источники данных с известными оценками точности результатов, а также органы чувств, свидетельские показания, оценки свойств реальных объектов и событий человеком – это субъективные источники с различной степенью объективности, достоверности. Простейшей формой вектора причин служит представление в виде $u = (x, \text{v})$, x – полезный сигнал, искомое количественное или качественное свойство проблемного объекта, v – помеха.

Различают прямые и косвенные наблюдения, измерения. Модель сенсора прямого измерения количественного свойства x есть $y = x + \text{v}$, здесь переменные $x, y, \text{v} \in \text{Real}$ имеют единую единицу измерения. Модель сенсора косвенного измерения свойства x – линейное или нелинейное преобразование $y = A(x, \text{v})$, в котором величины x, y, v могут иметь любые единицы измерения, при этом обязательно предполагается этап обработки измерений, переход от y к оценке $\hat{x} = B(y)$ искомого свойства x, выполняемый рефором B, который обращает причинно-следственную связь между x и y: $B = A^{-1}$.

В простейшей модели прямого наблюдения качественного свойства x, скажем, двоичного признака в шкале $\{0, 1\}$, результатом наблюдений y есть логическая операция дифференции: $y=x\oplus\text{v}$, симметричной разности, v – двоичная переменная ошибки наблюдений, при $\text{v} = 0$ наблюдение $y = x$ – «вижу то, что есть на самом деле», при $\text{v} = 1$ результат $y = \bar{x}$ – отрицание истинного значения x, «вижу противоположное, совсем не то». Для косвенных наблюдений $y = A(x,\text{v})$ результат наблюдения y есть косвенный признак логической связи A между x и y, и потребуется обработка факта y и априорных данных, чтобы получить оценку $\hat{x} = B(y)$ рефором B, который обращает причинную, либо корреляционную, статическую связь логических переменных x и y.

Построение модели сенсора A и получение по этой модели и входному вектору причин u результатов наблюдения $y = A(u)$ называется *решением основной прямой задачи* исследования. Модель A преобразования свойств материи в информацию y называется начальным или *основным источником информации* о физической реальности (в измерительной технике – первичным преобразователем), а проблемный объект, взаимодействующий с сенсором, называется *первичным источником фактических данных*. Эту причинно-следственную цепочку можно продолжить влево, построив генор Г – модель генерации проблемного объекта и класса информационных ситуаций: $\Gamma\to u\to A\to y$, и вправо $y\to B\to \hat{x}$. Здесь генор Г есть *метаисточник информации* (источник источника), метапричина, полная модель априорной информации о полезных влияющих факторах и помехах сенсорного процесса. Генор (функцию) во многих задачах можно заменить без потерь существенной информации реляцией – частотной моделью априорной неопределенности – результатом генерации, распределением численности и частости (обобщенной вероятности) $q(u)$ выбранных (случайно или закономерно) генором значений вектора u [1], а рефор B – чисто информационный преобразователь, модель обращения сенсора и процесса обработки фактической y и априорной J информации и получения решения $\hat{x} = B(y, J)$ стоящей проблемы, точного $\hat{x} = x$ при истинных и полных исходных данных или приближенного $\hat{x} \ne x$, если исходная информация искаженная или неполная.

Чтобы оценить точность и полезность наблюдений, вычислений, рассуждений необходимо решить еще одну – *целевую прямую задачу*, в которой определяется целевое преобразование $x = C(u)$ вектора причин в истинное значение цели $x = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$. Это преобразование есть модель идеального исследования, C – целевой оператор или аккуратор – модель прецизионной системы исследования, например, истинная, эталонная классификация объектов, с которой сравниваются результаты реальных исследований.

Итак, прямая задача исследования состоит в построении моделей сенсорного и целевого преобразований с прямой ориентацией от источников причин $\Gamma\to u$ к следствиям – результатам наблюдений y и целевому, истинному значению результатов идеального исследования x. Обратная задача исследования заключается в построении наилучшей модели B рефорного процесса обработки информации с обратной ориентацией связей от следствия сенсорного процесса y к его причинам u и далее к оценке цели $\hat{x} = B(y, J)$, наилучшим образом представляющей истинное значение x. Различают прямое и косвенное обращение сенсора A. Если вектор причин u содержит цель x в качестве компонента, то рефор B реализует прямое обращение сенсора, если же x есть результат нетривиального преобразования вектора причин целевым оператором C, то рефор B выполняет косвенное обращение сенсора A. Например, истинная принадлежность проблемного объекта к определенному классу вычисляется моделью C по свойствам объекта, включаемым в вектор причин, и не является исходной причиной, поэтому, скажем, распознавание образов есть обратная задача классификации и косвенного обращения процесса наблюдения.

Помимо получения наилучшей оценки цели $\hat{x}$ по критериям точности или полезности в обратную задачу включают также процедуры построения адекватного рефора $B_a(y, J)$, который оценивает адекватность (точность, погрешность) основного процесса наблюдения и обработки его результатов. Оценки адекватности и ценности существенно зависят от качества априорной информации и ее источников, поэтому в задачах анализа и синтеза информационных процессов исследования необходимо оценивать последствия искажений априорики.

Решение принципиальных теоретических вопросов медицинской и технической диагностики, идентификации объектов, распознавания образов, тестирования в педагогике, прямой и обратной классификации социальных явлений и т.п. серьезно упрощается, если перевести количественные и качественные параметры и характеристики проблемной ситуации в наборы двоичных признаков и воспользоваться формализмами классической и частотной логики, которые позволяют получить строгие оценки истинности и погрешности логических и частотных (статистических) зависимостей между двоичными признаками [1, 3].

Итак, пусть все фактические данные переведены в двоичную форму: $y = \{y_j\}$, $y_j = A_j(u) \in \{0, 1\}$, {да, нет}, {истина, ложь}, где j изменяется от 1 до k – число источников двоичной информации, оно обычно существенно больше исходного числа m (для факта y_i и сенсора A_i оставим прежние обозначения). Легко показать, что любой наблюдаемый двоичный признак $y_j = A_j(u)$ косвенного наблюдения можно представить дифференциальным сенсором прямого наблюдения $y_j = x \oplus v_j$ искомого свойства x с ошибкой v_j, зависящей от вектора причин u (см. далее). Качество такого фактического источника информации зависит от того, как часто возникают ошибки $v_j = 1$. Оно определяется уровнем помех наблюдений, который измеряется в частотной логике удельным объемом искаженных данных, численностью N_v из общего числа $N = |U_s|$ информационных ситуаций универсума U_s решаемой проблемы: $\underline{v} = N_v / N$ – частость, обобщенная вероятность детерминированных, либо случайных ошибок наблюдения $y = x \oplus v$. Более полная характеристика информационных свойств источника информации определяется соотношением между объемами цели $\underline{x} = N_x / N$ и ошибочных результатов $\underline{v}$, а также зависимостью между переменными x и v, которая описывается объемом пересечения $\underline{xv} = \dfrac{N_{xv}}{N}$ классов объектов со свойствами $x = 1$ и $v = 1$, представленных на диаграмме Эйлера кругами, вне которых $\bar{x} = 1$ и $\bar{v} = 1$ (рис. 1).

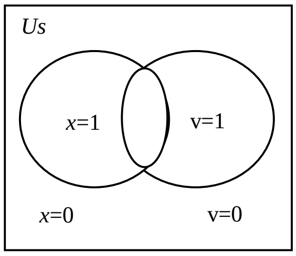


Рис. 1

Внутри круга v значению $x = 1$ соответствует *ошибка* v_1 *первого рода – пропуск цели*, $x = 1$, $y_j = 0$, частость этой ошибки $\underline{v_1} = \underline{xv}$, а значению $x = 0$, $y_j = 1$ – *ошибка второго рода – ложная цель*, ложная тревога с удельным объемом $\underline{v_2} = \underline{\bar{x}v} = \underline{v} - \underline{xv}$. Разность частостей $\underline{v_2} - \underline{v_1}$ определяет *регулярную* (систематическую) *составляющую* ошибок источника информации $v_r = \underline{v} - 2\underline{xv}$, она равна нулю при $\underline{v_1} = \underline{v_2}$. *Нерегулярная*, «случайная» составляющая ошибок $v_{nr} = \min\{\underline{v_1}, \underline{v_2}\}$, тогда сумма нерегулярной и модуля систематической составляющих равна полному удельному объему ошибочных данных – частости $v = 1$: $\underline{v} = |v_r| + v_{nr}$ [1]. Наиболее простые формулы ошибок частотной логики получаются при независимости переменных: $\underline{x\text{v}} = \underline{x} \cdot \underline{\text{v}}$. Источники фактических данных по уровню ошибок наблюдений делятся на *информативные*, $\underline{\text{v}} < 0{,}5$, *неинформативные*, $\underline{\text{v}} = 0{,}5$ – предельная неопределенность факта, 50 на 50 процентов, и *дезинформативные источники* со средней ошибкой $\underline{\text{v}} > 0{,}5$, однако, зная эту априорную информацию о степени недостоверности факта y, можно перейти к его отрицанию $\overline{y} = x \oplus \overline{\text{v}} = \overline{x} \oplus \text{v}$ и получить полезную информацию $\overline{y}$ с достоверностью $0 \leq \underline{\text{v}} < 0{,}5$. Неинформативные источники, уровни ошибок которых $\underline{\text{v}} \approx 0{,}5$, можно исключить из постановки проблемы, если логическая переменная v не зависит от других переменных проблемы.

Предельную ошибочность источника информации $\underline{\text{v}} = 1$ изучали древнегреческие логики в связи с парадоксом лжеца «критянин сказал: все критяне лжецы», в более поздней форме «я всегда лгу». В этом случае круг Эйлера v = 1 совпадает с универсумом U_s. В формализме классической логики при толковании смысла подобных высказываний возникают противоречия или неопределенности смысла высказывания в оценках его истинности и состояния действительности. В частотной логике противоречия снимутся, если допустить редкие исключения: «почти все критяне…» и «почти всегда…» или «слишком часто я лгу», $\underline{\text{v}} \approx 1$.

АПРИОРНЫЕ РЕШЕНИЯ

В реальной жизни человек часто принимает решения только по априорным знаниям, которые он считает достоверными, не обращаясь к фактам, либо фактические данные отсутствуют, $k = m = 0$, неинформативны при $k \geq 1$, неизвестного происхождения или достоверность их весьма сомнительна и т. п. Априорная информация J_x о целевом двоичном признаке есть величина частости $\underline{x}$ логического значения $x = 1$. Если удельный объем признака большой, $\underline{x} \approx 1$, или весьма малый $\underline{x} \approx 0$, то априорные решения имеют весьма высокую достоверность.

Существуют только два априорных рефора: *единичный* $\hat{x} = B_1(J_x) = 1$, который решает, что целевой признак (высказывание x) всегда имеет значение «истина», $x = 1$, и *нулевой* рефор $\hat{x} = B_0(J_x) = 0$ – высказывание x ложное, $x = 0$. Например, прогноз x = «завтра утром взойдет Солнце» имеет 100-процентную достоверность, $\underline{x} \approx 1$, а прогноз z = «в середине лета в Сочи наступят заморозки» имеют достоверность $\underline{z} \approx 0$.

Средняя ошибка нулевого рефора $\hat{x} = 0 = B_0(J_x)$ равна $\Delta_0 = \underline{x}$, а единичный рефор $\hat{x} = B_1(J_x) = 1$ имеет частотную меру ошибок априорного решения $\Delta_1 = 1 - \underline{x}$. В зависимости от априорики $J_x = \{\underline{x}\}$ выбирается рефор B_0 или B_1 по критерию $\min\{\Delta_0, \Delta_1\}$, следовательно, рефор B_1, оптимален по точности, если $\Delta_1 < \Delta_0$, $\underline{x} > 0{,}5$, в противном случае выбирают рефор B_0. Однако минимальная ошибка априорного решения $\Delta_{\min}$ часто бывает выше допустимого граничного уровня $\Delta_г$, поэтому вместо двоичной шкалы рефора вводят шкалу трилогики {да, нет, не знаю}={1, 0, θ }, θ – биноль, базисный информационный ноль, двоичная неопределенность: либо да, либо нет, которая означает возможность отложенного решения и необходимость привлечения дополнительной информации [1].

Априорная информация также может быть отягощена большими погрешностями: $J_x = \left\{ \hat{\underline{x}}, \Delta_a \right\} = \left\{ \hat{\underline{x}} - \Delta_a \leq \underline{x} \leq \hat{\underline{x}} + \Delta_a \right\}$, $\hat{\Delta}_a$ – ошибка априорики. Учет последней усложняет априорные решения, особенно в ситуациях с ненадежными оценками этой величины: $\hat{\Delta}_a = \Delta_a + \Delta\Delta_a$, $\Delta\Delta_a$ – погрешность погрешности. Простой, но не вполне обоснованный выход из этой сложной иерархии неопределенностей состоит в квадратическом суммировании оценок всех существенных погрешностей:

$$\hat{\Delta}^2 = \hat{\Delta}_a^2 + \hat{\Delta}\Delta_a^2 + \ldots$$

ОДИН ФАКТ И АПРИОРИКА

Добавим к априорному источнику знаний источник фактической информации $y = x \oplus \text{v}$ – одно прямое наблюдение за свойством x проблемного объекта, либо одно косвенное наблюдение $y = A(u)$, $k = 1$, в котором вектор причин может содержать в качестве компонента искомый двоичный признак x, тогда рефор $B(y, J)$ выполняет прямое обращение косвенного сенсора A, в противном случае $x = C(u)$ и рефор выполняет косвенное обращение косвенного сенсорного процесса наблюдения за проблемным объектом.

Значения всех причин, входящих в вектор u и влияющих на результат наблюдения, неизвестны и в данном случае не измеряются, что приводит к размытию связи между двоичными переменными – искомым x и фактом y, превращая ее в корреляционную зависимость между частичной причиной x и следствием y, которая описывается частотным распределением $q(x, y)$ как для косвенного, так и для прямого наблюдения $y = x \oplus \mathrm{v}$, если помеха $\mathrm{v} \neq 0$. В этих случаях различия между прямыми и косвенными наблюдениями чисто терминологические, а косвенное наблюдение всегда можно представить в виде прямого источника значения признака $y = x \oplus \mathrm{v}$, где помеха $\mathrm{v} = x \oplus A(u)$.

Для последующего анализа функциональную (причинную) модель сенсора $y = A(u)$ удобно заменить реляционной моделью размытой связи между фактом y и искомым свойством x – частотным распределением

$$q(x, y)= \sum_u q(u)\delta(y-A(u))\cdot(x-C(u))$$

где $\delta(.)$ – дельта-функция Кронекера, $q(u)$ – функция распределения частости причин u, Σ – сигматор, оператор интегрального связывания неизвестных причин u: интегрирования по непрерывным компонентам и суммирования по дискретным компонентам вектора причин [1]. Следовательно, априорная информация о процессе наблюдения, о влияющих факторах и связях, о целевом признаке возможного состояния проблемного объекта редуцируется в параметры – моменты распределения частости $q(x, y)$, это полная априорика $J_{xy} = (\underline{x}, \underline{y}, \underline{xy})$, содержащая частости ситуаций классов $x = 1$, $y = 1$, $xy = 1$. Более удобной для анализа задач диагностики и классификации является априорика $J_{x\mathrm{v}} = (\underline{x}, \underline{\mathrm{v}}, \underline{x\mathrm{v}})$ о возможных вариациях вектора причин $u = (x, \mathrm{v})$, которая в точности эквивалентна модели J_{xy} частотной связи факта y и целевого свойства x. В самом деле, $\underline{y} = \underline{x} + \underline{\mathrm{v}} - 2\underline{x\mathrm{v}}$, $\underline{xy} = \underline{x} - \underline{x\mathrm{v}}$ и обратно, $\underline{\mathrm{v}} = \underline{y} + \underline{x} - 2\underline{xy}$, $\underline{x\mathrm{v}} = \underline{x} - \underline{xy}$. Следует отметить, что при соответствующих значениях моментов и связях между полезным сигналом x и помехой v дифференциальная модель сенсора $y = x \oplus v$ воспроизводит все унарные (но не бинарные) операции классической логики: $y = 0(x) = 0(\mathrm{v}) = 0(x,\mathrm{v})$ при $\underline{x} = \underline{\mathrm{v}} = \underline{x\mathrm{v}}$; $y = 1(x) = 1(\mathrm{v}) = 1(x, \mathrm{v})$ при $\underline{x} = 1 - \underline{\mathrm{v}}$, $\underline{x\mathrm{v}} = 0$; $y = A(x) = x$ при $\underline{\mathrm{v}} = 0$ – идеальный сенсор; $y = A(\mathrm{v}) = \mathrm{v}$ при $\underline{x} = 0$; $y = \bar{A}(x) = \bar{x}$ при $\underline{\mathrm{v}} = 1$, $\underline{x} > 0$ – злостный лжец; $y = \bar{A}(\mathrm{v}) = \bar{\mathrm{v}}$ при $\underline{x} = 1$, $\underline{\mathrm{v}} > 0$. Принятие решения $\hat{x}$ по факту y и априорике $J = J_{x\mathrm{v}}$, либо J_{xy} выполняет рефор $B(y, J) = \hat{x}$. Временно полагаем, что априорная информация известна точно. Существуют всего четыре возможных преобразования двоичной переменной y в оценку целевого признака $\hat{x}$ – это *нулевой* B_0 и *единичный* рефор B_1 априорных решений, которые пренебрегают фактом $y = 0$ либо 1, *тождественное* преобразование факта в решение $\hat{x} = y$ при априорном доверии фактическому источнику данных и *отрицание* факта $\hat{x} = \bar{y}$, считая его ложным, но информативным, более ценным, чем априорные решения B_0 и B_1, в которых y является фиктивным аргументом константных функций.

Из этих четырех возможностей необходимо выбрать, используя априорику, наилучший рефор по критерию наибольшей точности или наименьшего риска. Итак, мы имеем четыре априорные оценки средних ошибок реформов в универсуме U_s информационных ситуаций проблемы $\{\Delta_0, \Delta_1, \Delta_y, \Delta_{\bar{y}}\} = \{\underline{x}, 1-\underline{x}, \underline{\mathrm{v}}, 1-\underline{\mathrm{v}}\}$, выбирая из которых наименьшую, получаем оптимальные по точности рефор B_{opt}, решение $\hat{x}_{\mathrm{opt}}$ и минимальную среднюю оценку ошибки решения $\Delta_{\min}$ в классе ситуаций, определенных априорикой $J_{x\mathrm{v}}$. Полученное оптимальное решение B_{opt} не зависит от результата наблюдения y и априорного знания меры частотной (в пределе логической) связи между полезным сигналом x и помехой v, определяемой смешанным моментом $\underline{x\mathrm{v}}$, однако если различать ошибки первого и второго рода, стоимости рисков пропуска цели и выделения ложной цели, то априорика $\underline{x\mathrm{v}}$ становится существенной. Ошибки нулевого рефора B_0 есть ошибки первого рода, пропуска цели $\Delta_0 = \underline{x}$, частость ложной тревоги равна нулю, а единичный рефор B_1 допускает только ошибки второго рода: $\Delta_1 = 1 - \underline{x}$, пропуск цели отсутствует. Решение $\hat{x} = y$ по наблюдаемому факту y сопровождается ошибками первого рода $\underline{\mathrm{v}}_1 = \underline{\mathrm{v}}(y = 0) = \underline{x\mathrm{v}}$ и второго рода $\underline{\mathrm{v}}_2 = \underline{\mathrm{v}}(y = 1) = \underline{\mathrm{v}} - \underline{x\mathrm{v}}$, определяемые двоичным значением факта y. Решение $\hat{x} = y$ по отрицаемому факту имеет среднюю ошибку первого рода $\underline{\mathrm{v}}_1 = \underline{x} - \underline{x\mathrm{v}}$ при $y = 1$ и второго рода $\underline{\mathrm{v}}_2 = 1 - \underline{x} - \underline{\mathrm{v}} + \underline{x\mathrm{v}}$ при $y = 0$, их сумма $\underline{\mathrm{v}}_1 + \underline{\mathrm{v}}_2 = 1 - \underline{\mathrm{v}}$.

Априорика $J_{x\mathrm{v}}$ определяет частотные свойства универсума U_s информационных ситуаций конкретной решаемой проблемы, а все возможные информационные миры с одним источником фактических данных составляют *метауниверсум*, который можно представить трехмерным *априорным пространством* с координатами $\underline{x}$, $\underline{\mathrm{v}}$, $\underline{x\mathrm{v}}$ и пределами изменений координат $0 \leq \underline{x}, \underline{\mathrm{v}} \leq 1$, $0 \leq \underline{x\mathrm{v}} \leq \underline{x}, \underline{\mathrm{v}}$, тогда конкретная проблема изображается точкой внутри части единичного куба, рассеченного плоскостями $\underline{x\mathrm{v}} =$

$= \underline{x}$ и $\underline{xv} = \underline{v}$, соответствующими ограничениям $\underline{xv} \le \underline{x}$, $\underline{xv} \le \underline{v}$. Из полного метауниверсума всех мыслимых проблемных ситуаций выделим *мир объективных знаний*, в котором отсутствуют грубые ошибки, обман и все источники фактических данных имеют ожидаемые средние погрешности $\underline{v} < 0{,}5$. Тогда остальной части метауниверсума соответствует субъективный мир (или его часть), в котором существует преднамеренная ложь, личные интересы превалируют над истиной и т. п.: $\underline{v} > 0{,}5$. Внутри полного метауниверсума выделяют подпространства логически зависимых вариаций переменных *x и* v, а также линейчатую поверхность их частотной независимости, определяемой условием $\underline{xv} = \underline{x} \cdot \underline{v}$. В последнем случае (а также, если не анализируется род ошибок) априорика проблем содержит только два параметра: $J_{xv} = (\underline{x}, \underline{v})$ и метауниверсум становится двумерным единичным квадратом, он разбивается на 4 треугольника, внутри которых оптимальным по точности является один из четырех рефоров. Все рефоры имеют одинаковые удельные объемы в полном метауниверсуме, равные ¼, и в этом смысле все нульарные и унарные операции равноправны при описании оптимальных по точности логических решений (рис. 2).

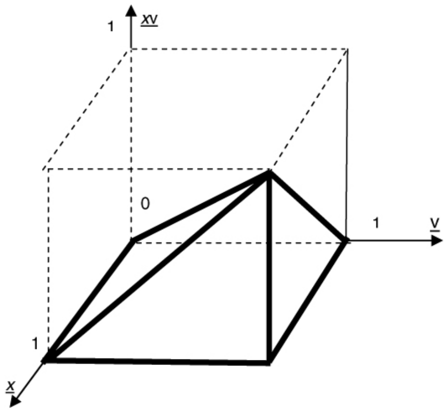


Рис. 2. Полный метауниверсум

В объективном метауниверсуме (половинка единичного квадрата) превалируют фактически положительные решения с удельным объемом ¼ и априорные решения B_0 и B_1 объемом 1/8 каждый, удельный объем отрицательного рефора равен нулю (рис. 3).

И в полном, и объективном метауниверсуме априорный источник имеет тот же объем оптимальности ½ и ¼, что и фактический источник информации, и в этом смысле они информационно равнозначимы.

На границах оптимальных областей, определяемых уравнениями $\Delta_0 = \Delta_y$, $\Delta_1 = \Delta_y$ и т. д., возникают неоднозначности выбора оптимального по точности рефора. Предельная неоднозначность выбора и неопределенность решения возникают при неинформативности фактического и априорного источника – это центр квадрата $\underline{x} = \underline{v} = 0{,}5$, в котором все четыре рефора имеют одинаковую предельную ошибку $\Delta_{\min} = 0{,}5$. Если при постановке проблемы допускаются отложенные решения введением ограничения ошибки $\Delta_{\min} \le \Delta_г$ при больших рисках и соответствующего *рефора неопределенности* $\hat{x} = B_\theta(y, J) = \theta$, то в центре метауниверсума появляется квадрат неопределенных решений (отказов решить проблему) со стороной $1 - 2\Delta_г$, например, граничное значение отсечки неопределенностей решений $\Delta_г = 1/4$ – половина предельной неопределенности ½, то сторона квадрата неопределенных решений равна ½ (рис. 4).

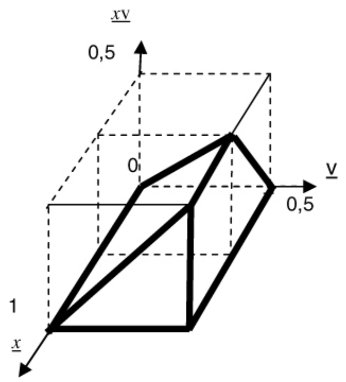


Рис. 3. Объективный метауниверсум

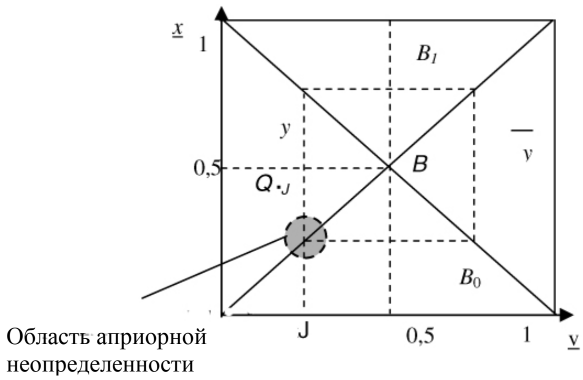


Рис. 4. Области оптимальности четырех рефоров

Априорная информация $J_{xv} = \{\underline{x}, \underline{v}\}$ часто характеризуется большой неопределенностью и искажениями оценок $\hat{J}_{xv} = \left\{\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{v}}\right\} = J_{xv} + \quad + \Delta J$, $\hat{\underline{x}} = \underline{x} + \Delta x, \hat{\underline{v}} = \underline{v} + \Delta v$, то же можно сказать и о границе допустимых определенных решений

$\hat{\Delta}_{\text{г}} = \Delta_{\text{г}} + \Delta\Delta_{\text{г}}$. Переход от точной априорики $J_{x\mathrm{v}}$ к искаженным оценкам $\hat{J}_{x\mathrm{v}}$ переводит *оптимальные* по точности решения в класс *квазиоптимальных решений*. Если область *априорной неопределенности* $Q_{\Delta J}$ не пересекает границ, разделяющих зоны оптимальности реформ в метауниверсуме, то квазиоптимальное решение совпадает с оптимальным, искаженными останутся только оценки точности – погрешности $\hat{\Delta}_{\min}$ оптимального решения $\hat{x}$. В противном случае анализ усложняется и проводится на основе вычислительных экспериментов или упрощающих приближений.

Так, если область априорной неопределенности охватывает два рефора B_0 и y, как показано на рисунке, то возможны два решения ($\hat{x}_1, \hat{x}_2$), в общем случае согласованные (00) и (11), либо противоречивые (01) и (10). Эти два решения имеют «веса», обратно пропорциональные удельным объемам пересечений $Q_1 = Q_{\Delta J} \cdot Q_0$ и $Q_2 = Q_{\Delta J} \cdot Q_y$. Ошибки решений Δ_0 и Δ_y, вычисляемые в центрах областей Q_1 и Q_2, взвешиваются нормированными весами. Формулы оценок ошибок решений для согласованных и противоречивых значений $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ приводятся ниже.

ДВА ФАКТА И АПРИОРИКА

Теперь изучим информационные ситуации с тремя источниками: два фактических источника знаний $y_1 = x \oplus \mathrm{v}_1, y_2 = x \oplus \mathrm{v}_2$ и источник априорики $J_u = \{\underline{x}, \underline{\mathrm{v}_1}, \underline{\mathrm{v}_2}, \underline{x\mathrm{v}_1}, \underline{x\mathrm{v}_2}, \underline{\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2}, \underline{x\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2}\}$ – это полная априорная информация о зависимых вариациях вектора причин $u = (x, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)$, о распределении частости $q(u)$. Процесс порождения априорных знаний, точных или приближенных, описывается моделью *рефора априорики* B_a. Модель обработки фактических и априорных данных и принятия решения представляется рефором $\hat{x} = B(y_1, y_2, J)$. Теоретически возможны 16 преобразований двоичного вектора наблюдений $y = (y_1, y_2)$ в двоичное решение $\hat{x} \in \{0,1\}$ – это две нульарные операции B_0 и B_1 с фиктивным аргументом y, четыре унарные операции тождественного преобразования фактов y_1, y_2 и их отрицаний $\overline{y_1}, \overline{y_2}$ в решение $\hat{x}$ и 10 бинарных логических операций над фактами: логические сложение $y_1 + y_2$, вычитание $y_1 - y_2$, $y_2 - y_1$, умножение $y_1 \cdot y_2$, дифференция $y_1 \oplus y_2$, а также отрицания результатов этих операций: стрелка Пирса $y_1 \downarrow y_2$, импликации $y_1 \to y_2$, $y_2 \to y_1$, штрих Шеффера $y_1 | y_2$, эквиваленция $y_1 \leftrightarrow y_2$. Вычисляя по априорике J_u средние погрешности этих преобразований в классе информационных ситуаций решаемой задачи и выбирая наилучший рефор $B_{\text{opt}} \in \{B_k\}$ по критерию $\min\limits_k \Delta_k = \Delta_{\min}$, $0 \le k \le 15$, получаем оптимальное по точности решение $\hat{x} = B_{\text{opt}}(y)$, которое соответствует точностному обращению сенсорного процесса наблюдения за проблемным объектом: $y = A(u)$.

Средние ошибки нульарных и унарных реформ были приведены выше: $\Delta_0 = \underline{x}$, $\Delta_1 = 1 - \underline{x}$, $\Delta_{y1} = \underline{\mathrm{v}}_1$, $\Delta_{y2} = \underline{\mathrm{v}}_2$, $\Delta_{\overline{y1}} = 1 - \underline{\mathrm{v}_1}$, $\Delta_{\overline{y2}} = 1 - \underline{\mathrm{v}_2}$. Ошибки бинарных логических операций выводятся по формулам частотной и классической логики [1, 3]. Найдем ошибку логического сложения:

$$\Delta'_+ = (y_1 + y_2) \oplus x = (y_1 + y_2) \cdot \overline{x} + \overline{y_1} \cdot \overline{y_2} \cdot x =$$
$$= (x\overline{\mathrm{v}_1} + \overline{x}\mathrm{v}_1 + x\overline{\mathrm{v}_2} + \overline{x}\mathrm{v}_2) \cdot \overline{x} +$$
$$+ (x\mathrm{v}_1 + \overline{x}\overline{\mathrm{v}_1}) \cdot (x\mathrm{v}_2 + \overline{x}\overline{\mathrm{v}_2}) \cdot x =$$
$$= \overline{x}\mathrm{v}_1 + \overline{x}\mathrm{v}_2 + x\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2.$$

Средняя погрешность сложения

$$\Delta_+ = M(\Delta'_+) = \underline{\overline{x}\mathrm{v}_1} + \underline{\overline{x}\mathrm{v}_2} + \underline{x\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2} - \underline{\overline{x}\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2} =$$
$$= \underline{\mathrm{v}_1} + \underline{\mathrm{v}_2} - \underline{x\mathrm{v}_1} - \underline{x\mathrm{v}_2} - \underline{\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2} + 2\underline{x\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2},$$

здесь M – математическое ожидание, вычисление среднего значения.

Аналогично вычисляются средние погрешности других реформ: умножение

$$\Delta_\bullet = \underline{x\mathrm{v}_1} + \underline{x\mathrm{v}_2} + \underline{\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2} - 2\underline{x\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2},$$

вычитание

$$\Delta(y_1 - y_2) = \underline{x} + \underline{\mathrm{v}}_1 - \underline{x\mathrm{v}}_1 - \underline{x\mathrm{v}}_2 - \underline{\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2} + 2\underline{x\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2},$$

дифференция

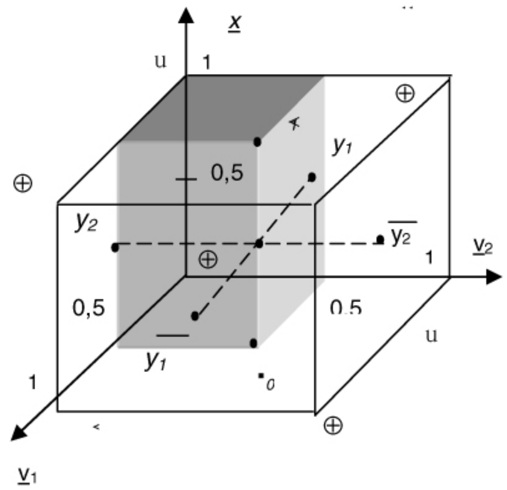
$$\Delta_\oplus = \underline{x} + \underline{\mathrm{v}_1} + \underline{\mathrm{v}_2} - 2\underline{x\mathrm{v}_1} - 2\underline{x\,\mathrm{v}_2} - 2\underline{\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2} + 4\underline{x\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2}.$$

Остальные формулы получаются перестановкой аргументов y_1 и y_2 и отрицанием результатов операций: ошибка импликации $\Delta_\to = 1 - \Delta_-$ есть отрицание вычитания, для штриха Шеффера ошибка $\Delta_| = 1 - \Delta_\bullet$, стрелки Пирса $\Delta_\downarrow = 1 - \Delta_+$, эквиваленции $\Delta_\leftrightarrow = 1 - \Delta_\oplus$.

Совокупность проблем с двумя источниками фактической и третьим – априорной информации – образуют метауниверсум и семимерное априорное пространство, координаты которого определяют семь параметров априорики с учетом ограничений высших моментов распределения $q(u)$ низшими. Если вариации компонентов вектора причин независимы, то априорика проблемы определяется тремя параметрами: $J = \{\underline{x}, \underline{v_1}, \underline{v_2}\}$ – точкой в трехмерном априорном пространстве, а высшие моменты вычисляются через первые моменты, скажем, $\underline{x v_1 v_2} = \underline{x} \cdot \underline{v_1} \cdot \underline{v_2}$. Тогда метауниверсум есть трехмерный единичный куб, который разбивается на оптимальные области Q_k, внутри которых рефор B_k является наилучшим по точности получаемого решения $(\hat{x}, \Delta_{\min})$. На границах оптимальных областей наивысшую точность решения обеспечивают 2, 4 или 8 реформ, а в центре единичного куба $x = v_1 = v_2 = 0{,}5$ все три источника неинформативны, $\Delta_{\min} = 0{,}5$ – предельная неопределенность решения для всех 16 реформ.

На гранях единичного куба минимум ошибки решения равен нулю, т. к. параметры $\underline{x}$, $\underline{v}_1$, или $\underline{v}_2$ принимают предельные значения 0 либо 1, поэтому каждой грани соответствует один из шести нульарных или унарных оптимальных реформ. На ребрах куба два параметра из трех принимают предельные значения и каждому ребру соответствует четыре оптимальных рефора, обеспечивающих точное решение $\hat{x} = x$. В вершинах куба 8 реформ имеют $\Delta_{\min} = 0$. К каждой вершине сходится 3 ребра по 4 оптимальных (идеальных) реформ, всего 12, из которых один повторяется в четверках три раза, три рефора повторяются дважды и три не встречаются в других четверках, итого 7 реформ, а восьмым оптимальным рефором является дифференция $\oplus$ либо эквиваленция $\leftrightarrow$, которые поочередно в соседних вершинах куба принимают значения ошибок, равные 0 и 1. Например, в начале координат $\underline{x} = \underline{v}_1 = \underline{v}_2 = 0$ оптимальными преобразованиями фактов являются 8 реформ с ошибкой $\Delta_{\min}=0$. Это B_0, y_1, y_2, $+$, $\cdot$, $y_1 - y_2$, $y_2 - y_1$, $\oplus$, остальные 8 из 16 реформ имеют ошибки $\Delta_k = 1$. На вертикальной оси $\underline{x}$ оптимальны и идеальны реформы y_1, y_2, $+$, $\cdot$, на оси $\underline{v}_1$ – реформы B_0, y_2, $\cdot$, $y_2 - y_1$, на оси $\underline{v}_2$ оптимальны B_0, y_1, $\cdot$, $y_1 - y_2$. В этих четверках логическое умножение встречается трижды, B_0, y_1, y_2 – дважды и один раз – реформы $+$, $y_1 - y_2$, $y_2 - y_1$. Эти соотношения получаются решением 16 уравнений $\Delta_k = 0$, $0 \le k \le 15$.

Из полного метауниверсума $0 \le \underline{x}, \underline{v}_1, \underline{v}_2 \le 1$ выделим мир объективных знаний: $0 \le \underline{x} \le 1$, $0 \le v_1, v_2 < 0{,}5$ с двумя информативными источниками фактов. Остальной – субъективный мир – разделяется на три класса проблемных ситуаций с одним или двумя источниками дезинформации, которые отрицанием переводятся в информативные факты: $(y_1, \bar{y}_2), (\bar{y}_1, y_2)$ и $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$. Тогда логические операции вычитания, импликации, функции Шеффера и Пирса сводятся к дизъюнкции и конъюнкции – логическому сложению и умножению. Из неравенства $\Delta_\bullet > \Delta_+$ следует, что сложение точнее умножения для больших целей $\underline{x} > 0{,}5$, а для малых целей более информативен рефор логического умножения фактов $y_1 \cdot y_2$. Таким образом, метауниверсум разделяется на 8 половинных кубиков со сторонами 0,5 = 50 процентов частости двоичных значений переменных x, v_1, v_2. В каждом кубике выделяются оптимальные по точности реформы, решая неравенства $\Delta_k < \Delta_l$ для 16 реформ, $0 \le k, l \le 15$ (рис. 5).



$\underline{v}_2$	$0 \le \underline{v}_1 < 0{,}5$	$0{,}5 \le \underline{v}_1 \le 1$
0.5 – 1	$y_1 + \bar{y}_2 = y_2 \to y_1$ $y_1 \cdot \bar{y}_2 = y_1 - y_2$	$\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = y_1 \mid y_2$ $\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2 = y_1 \downarrow y_2$
0 – 0.5	$y_1 + y_2$ $y_1 \cdot y_2$	$\bar{y}_1 + y_2 = y_1 \to y_2$ $\bar{y}_1 \cdot y_2 = y_2 - y_1$

Рис. 5. Полный и объективный метауниверсумы для двух фактов

Оценим объемы, размеры и положения оптимальных областей Q_k реформ B_k в единичном кубе полного метауниверсума решаемых проблем, которые удобно выразить в корреляционном приближении, т. к. области Q_k односвязны, что следует из полилинейности функций Δ_k. Центр оптимальной области есть $\underline{u}_0^k = M_k(\underline{u})$ – математическое ожидание *вектора метапричин* $\underline{u} = (\underline{x}, \underline{v}_1, \underline{v}_2)$ при условии $\underline{u} \in Q_k$, размеры области описывает условная ковариационная матрица $K_u{}^k = M_k(\underline{u}\underline{u}^T) - \underline{u}_0{}^k \underline{u}_0{}^{kT}$, ожидаемый удельный объем оптимальной области есть $q_k = M(\varepsilon(\underline{u}, Q_k))$ – частость попадания вектора $\underline{u}$ в область Q_k при равномерном распределении $q(\underline{u})$ в однородном метауниверсуме, ε – двоичная функция принадлежности вектора метапричин k-й оптимальной области.

Но прежде следует выделить из полного набора рефоров $\{B_k\}$ неинформативные преобразования фактов, никак не связанных с искомой целью x. Если полезный сигнал x не зависит от помех v_1 и v_2, то результаты преобразования наблюдений y_1 и y_2 не зависят от x для операций дифференции и эквиваленции, поэтому их объемы бесконечно малы – имеют меры нуль и только случайно $\Delta_\oplus$ и $\Delta_\leftrightarrow$ могут совпасть с $\Delta_{\min}$. В самом деле, $y_1 \oplus y_2 = x \oplus v_1 \oplus x \oplus v_2 = v_1 \oplus v_2$, $y_1 \leftrightarrow y_2 = v_1 \leftrightarrow v_2$ – результаты логических преобразований фактов зависят только от помех. Поэтому, эти функции попадают в оптимальный набор из 8 рефоров в четырех вершинах куба каждая, в которых $\Delta_{\min} = 0$, и обе функции попадают в набор из всех 16 рефоров в центре куба, когда все они неинформативны: $\Delta_{\min} = 0{,}5$.

Остальные 14 рефоров максимально информативны в своих конечных областях оптимальности. Результаты расчетов частотных моментов позволяют разбить все логические операции на три класса в зависимости от объемов областей, их точности и корреляционных характеристик в полном метауниверсуме. *Первый класс* содержит два нульарных B_0, B_1 и четыре унарных рефора y_1, y_2, $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$, им соответствуют шесть граней единичного куба, на которых они обеспечивают идеальное решение $\hat{x} = x$, рефоры имеют одинаковые удельные объемы в однородном метауниверсуме: $q_k = 0{,}115$ – частость их использования в наилучших решениях, одинаковую среднюю ошибку решений, $\Delta_k = M_k(\Delta_{\min}) = 0{,}105$, различные среднеквадратические размеры σ вариаций и центры областей оптимальных решений x_0, v_{01}, v_{02}, которые сведены в табл. 1. Сплющенность оптимальных областей рефоров первого класса отсутствует: коэффициенты корреляции между $\underline{x}$, $\underline{v}_1$ и $\underline{v}_2$ равны нулю.

Во *второй класс* попали информативные бинарные логические операции над фактами y_1 и y_2, они также имеют одинаковые удельные объемы $q_k = 0{,}039$ – равноправие их применимости в однородном метауниверсуме, но частость их применения в 3,5 раза меньше, чем оптимальных рефоров первого класса с меньшим числом аргументов. Средняя минимальная погрешность решения у них также одинаковая, $\Delta_k = 0{,}131$, на 2,6% выше, чем у рефоров первого класса. Среднеквадратические размеры оптимальных областей одинаковы по трем параметрам $\sigma_{\underline{x}} = \sigma_{\underline{v1}} = \sigma_{\underline{v2}} = 0{,}116$, сплющенность областей также одинаковая, положительная или отрицательная, коэффициенты корреляции $r = +0{,}373$ либо $r = -0{,}373$ для всех парных связей r_{xv1}, r_{xv2}, r_{v1v2}.

Положения центров оптимальных областей сведены в табл. 2, они на 0,03 отличаются от геометрических центров восьми половинных кубиков метауниверсума с координатами $\underline{x}$, $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2 = 0{,}25$ и 0,75, приближаясь к соответствующим граням куба, а центры оптимальных областей шести рефоров из первого класса, удалены от геометрических центров на величину частости 0,145 в сторону своих граней, сами же области первого класса охватывают пары кубиков.

Третий класс содержит два неинформативных рефора: дифференцию $y_1 \oplus y_2$ и ее отрицание – эквиваленцию $y_1 \leftrightarrow y_2$. В численном эксперименте удельные объемы этих логических операций составили частость менее 10^{-7}. Сумма всех удельных объемов оптимальных областей $\sum_k^{16} q_k = 6 \cdot 0{,}115 + 8 \cdot 0{,}0387 = 1$.

Таблица 1

B_k	$\underline{x}_0$	$\underline{v}_{10}$	$\underline{v}_{20}$	$\sigma_{\underline{x}}$	$\sigma_{\underline{v1}}$	$\sigma_{\underline{v2}}$
B_0	0,105	0,5	0,5	0,094	0,202	0,202
B_1	0,895	0,5	0,5	0,094	0,202	0,202
y_1	0,5	0,105	0,5	0,202	0,094	0,202
$\overline{y}_1$	0,5	0,895	0,5	0,202	0,094	0,202
y_2	0,5	0,5	0,105	0,202	0,202	0,094
$\overline{y}_2$	0,5	0,5	0,895	0,202	0,202	0,094

Таблица 2

B_k	$\underline{x}_0$	$\underline{\text{v}}_{10}$	$\underline{\text{v}}_{20}$
$y_1 + y_2$	0,780	0,220	0,220
$y_1 \cdot y_2$	0,220	0,220	0,220
$y_1 - y_2$	0,220	0,220	0,780
$y_2 - y_1$	0,220	0,780	0,220
$y_1 \to y_2$	0,780	0,780	0,220
$y_2 \to y_1$	0,780	0,220	0,780
$y_1 \mid y_2$	0,780	0,780	0,780
$y_1 \downarrow y_2$	0,220	0,780	0,780

Численный эксперимент был проведен и для мира объективных знаний, $\underline{\text{v}}_1$, $\underline{\text{v}}_2 \le 0{,}5$. В нем удельные объемы априорных реферов B_0 и B_1 оказались отличными от объемов оптимальных областей реферов y_1 и y_2 и равными $q_0 = q_1 = 0{,}118$ (вместо 0,115 для полного метауниверсума), а удельные объемы оптимальных решений $\hat{x} = y_1$ и $\hat{x} = y_2$ равны $q_k = 0{,}231$ – вдвое больше объемов априорных решений, однако средние значения точности априорных и фактических решений по одному источнику фактов совпали: $\Delta_k = 0{,}107$.

Удельные объемы оптимальных областей решений по двум фактам – логического сложения $y_1 + y_2$ и умножения $y_1 \cdot y_2$ равны $q_k = 0{,}15$, как и средние ошибки $\Delta_k = 0{,}131$ – такие же, как в полном метауниверсуме. Почти не изменились и сами области оптимальности конъюнкции и дизъюнкции. Остальные 10 реферов, как и следовало ожидать, в объективном мире не информативны и имеют почти нулевые удельные объемы (в пределах погрешностей вычислительного эксперимента).

Средние уровни ошибок реферов в конкретных ситуациях с известными результатами наблюдений $y = (y_1, y_2) \in \{00, 01, 10, 11\}$ могут сильно отличаться от интегральных средних во всех информационных ситуациях, приведенных выше. У двух источников фактических данных, скажем, двух свидетелей происшествия, результаты наблюдения могут быть согласованными (да, да) и (нет, нет), либо противоречивыми (да, нет) и (нет, да). Для точного вычисления зависимости локальной средней ошибки от результатов наблюдений y необходимо иметь полную априорику $J_u = (\underline{x}, \underline{\text{v}}_1, \underline{\text{v}}_2, \underline{x\text{v}_1}, \underline{x\text{v}_2}, \underline{\text{v}_1\text{v}_2}, \underline{x\text{v}_1\text{v}_2})$. В локальных оценках точности или погрешности $\Delta(y)$ решений $\hat{x} = B_k(y)$ проявляются ошибки только одного – либо первого, либо второго рода. Формулы ошибок априорных решений по одному факту $\Delta(y)$ даны выше, остается изучить точности дизъюнкции и конъюнкции фактов, остальные 8 реферов сводятся к ним переходом от дезинформации y_1 или y_2 к ее отрицанию.

Дизъюнктивное решение $\hat{x} = y_1 + y_2$ в информационной ситуации согласованных фактов $y = (00)$ равно 0, имеет среднюю ошибку только пропуска цели $\Delta_{+\text{П}}(00) = \underline{x\text{v}_1\text{v}_2}$, соответствующую значениям $x = 1$, $\text{v}_1 = 1$, $\text{v}_2 = 1$ – оба факта искажены. Например, два врача «пропустили» болезнь пациента, два эксперта дали отрицательные рецензии на ценную научную работу: $y_1 = y_2 = 0$. В трех оставшихся ситуациях с результатами наблюдений $y = 01$, 10, 11 возникают только ошибки второго рода, $\hat{x} = 1$, $x = 0$ – выделение ложной цели:

$$\Delta_{+\text{л}} = \Delta_+(01) + \Delta_+(10) + \Delta_+(11)\text{, где}$$

$$\Delta_+(01) = \underline{\bar{x}\bar{\text{v}}_1\text{v}_2} = \underline{\text{v}_2} - \underline{x\text{v}_2} - \underline{\text{v}_1\text{v}_2} + \underline{x\text{v}_1\text{v}_2},$$

$$\Delta_+(10) = \underline{\bar{x}\text{v}_1\bar{\text{v}}_2} = \underline{\text{v}_1} - \underline{x\text{v}_1} - \underline{\text{v}_1\text{v}_2} + \underline{x\text{v}_1\text{v}_2},$$

$$\Delta_+(11) = \underline{\bar{x}\text{v}_1\text{v}_2} = \underline{\text{v}_1\text{v}_2} - \underline{x\text{v}_1\text{v}_2}.$$

В первых двух формулах факты противоречат друг другу, $y_1 \ne y_2$, последняя формула характеризует ошибку решения при взаимном подтверждении фактами $y_1 = y_2 = 1$.

Из этих формул следует: точность решения существенно выше, когда факты согласуются: $y_1 = y_2$, чем когда они противоречивы: $y_1 \ne y_2$. Действительно, суммарная ошибка ложной тревоги в информационной ситуации противоречивых фактов

$$\Delta_+(01) + \Delta_+(10) = \underline{\text{v}_1} + \underline{\text{v}_2} - 2\underline{\text{v}_1\text{v}_2} + 2\underline{x\text{v}_1\text{v}_2}.$$

Суммарная ошибка решения – пропуска цели и ложной тревоги при согласованных фактических данных, $y_1 = y_2$, равна $\Delta_{+\text{П}}(00) + \Delta_{+\text{л}}(11) = \underline{\text{v}_1\text{v}_2}$. Она обнуляется, если ошибки двух источников информации не совместны (классы ошибок v_1 и v_2 на диаграмме Эйлера не пересекаются). Если же ошибки источников независимы $\underline{\text{v}_1\text{v}_2} = \underline{\text{v}}_1 \cdot \underline{\text{v}}_2$, суммарная ошибка логического сложения двух согласованных фактов существенно меньше ошибок каждого источника, например, если эксперты ошибаются в 1% ситуаций, то итоговая погрешность дизъюнктивного решения равна 10^{-4} – достоверность согласованных решений двух независимых экспертов равна 0,9999.

Другой крайний случай – позитивная логическая связь между переменными v_1 и v_2, например, $\underline{\mathrm{v}}_1\underline{\mathrm{v}}_2 = \underline{\mathrm{v}}_1$ – второй эксперт повторяет ошибки первого и, возможно, добавляет свои, тогда логическая сумма $y_1 + y_2$ имеет информативность первого источника $y_1 = x \oplus \mathrm{v}_1$. Суммарная ошибка ложного выделения цели $\Delta_{+\text{л}} = \underline{\mathrm{v}}_1 + \underline{\mathrm{v}}_2 - \underline{\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2} - \underline{x\mathrm{v}_1} - \underline{x\mathrm{v}_2} + \underline{x\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2}$, и если помехи наблюдений v_1 и v_2 не зависят от цели x, то $\Delta_{+\text{л}} = (\underline{\mathrm{v}}_1 + \underline{\mathrm{v}}_2 - \underline{\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2})(1 - \underline{x})$.

Конъюнктивное решение $\hat{x} = y_1 \cdot y_2$ в информационной ситуации согласованных фактов $y_1 = y_2 = 1$ равно 1, имеет среднюю ошибку ложной тревоги – оба факта искажены, пропуск цели отсутствует, он возникает в трех других ситуациях:

$$\Delta_\bullet(00) = \underline{x\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2}\,,\ \Delta_\bullet(01) = \underline{x\mathrm{v}_1\bar{\mathrm{v}}_2} = \underline{x\mathrm{v}_1} - \underline{x\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2}\,,$$

$$\Delta_\bullet(10) = \underline{x\bar{\mathrm{v}}_1\mathrm{v}_2} = \underline{x\mathrm{v}_2} - \underline{x\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2}\,,$$

полная ошибка пропуска цели конъюнкцией фактов $\Delta_{\bullet\text{П}} = \underline{x\mathrm{v}_1} + \underline{x\mathrm{v}_2} - \underline{x\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2}$ и если помехи не зависят от цели, то $\Delta_{\bullet\text{П}} = (\underline{\mathrm{v}_1} + \underline{\mathrm{v}_2} - \underline{\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2}) \cdot \underline{x}$. Суммарная ошибка конъюнктивного решения при согласованных фактах, $y_1 = y_2$, состоит из пропуска цели и ложной тревоги: $\Delta_\bullet(00) + \Delta_\bullet(11) = \underline{\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2}$ – совпадает с дизъюнктивным решением, а суммарная ошибка в ситуациях с противоречивыми фактами измеряет частость пропуска целей в противоречивых ситуациях: $\Delta_\bullet(01) + \Delta_\bullet(10) = \underline{x\mathrm{v}_1} + \underline{x\mathrm{v}_2} - 2\underline{x\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2}$, для независимой цели ошибка пропуска равна $(\underline{\mathrm{v}}_1 + \underline{\mathrm{v}}_2 - 2\underline{\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2}) \cdot \underline{x}$ – существенно больше, чем при согласованных фактах и меньше полной ошибки пропуска цели на величину $\underline{x \cdot \mathrm{v}_1\mathrm{v}_2}$.

ВЫВОДЫ

Строгая формализация проблем диагностики, классификации явлений действительности основана на учете причинной и целевой, прямой и обратной ориентации информационных (знаковых, мыслительных) процессов, что ведет к различению в постановках прямых и обратных задач принятия решений. Прямая задача исследования состоит в построении перехода от причин к следствиям, от внутренних свойств проблемного объекта к внешним наблюдаемым параметрам и признакам, а также к истинной классификации объектов. Обратная задача состоит в переходе от результатов наблюдений и известных теоретических, априорных данных к наилучшим оценкам искомых свойств изучаемых явлений. Решение прямой задачи есть модель источника информации в виде функции либо распределения, заданного моментами (средними) влияющих причин и результатов наблюдений. Решение обратной задачи основано на решении прямой задачи и является алгоритмом обработки данных и принятия решений. Для двоичных источников информации все возможные значения параметров решаемых проблем образуют априорное пространство, каждая точка которого определяет свойства универсума информационных ситуаций конкретной задачи, а все точки априорного пространства составляют метауниверсум. В нем выделяют области объективных знаний, несущих полезную информацию, и области дезинформации, которые при определенных условиях можно превратить в полезные знания. Выше были изучены простейшие логические формы знаний с числом фактических источников информации k = 0, 1 и 2. В классах априорных решений k = 0 и с одним фактом k = 1 все логические функции, предикаты максимально информативны в своих областях оптимальности, которые имеют равные удельные объемы в метауниверсуме и одинаковые уровни средней максимальной точности.

Для двух фактических источников знаний k = 2 в полном информационном мире, который содержит как достоверные знания, так и грубые ошибки или преднамеренную ложь, все возможные логические связи (преобразования и предикаты) разбиваются на три класса равнозначимых логических операций по удельным объемам и средним погрешностям принимаемых решений: 1) нульарные и унарные операции, 2) информативные бинарные операции, 3) неинформативные операции дифференции и эквиваленции фактов, при этом априорный и фактический источники равнозначимы, а решения из второго класса, принимаемые по двум фактам и априорике, имеют значительно меньшие области оптимальности и более высокий уровень ошибок, чем решения из первого класса, т. е. информационно более выгодны априорные данные и один достоверный факт. В объективном метауниверсуме – виртуальном мире научных знаний – оптимальными по точности остаются нульарные, унарные логические операции без отрицаний фактов, дизъюнкция и конъюнкция информативных фактов, остальные логические связи менее информативны, либо порождают дезинформацию. По-видимому, эти особенности сохранятся и при $k > 2$. Число возможных логических преобразований растет гиперэкспоненциально с увеличением k: для трех фактов существует 256 различных рефоров, для четырех – их 65 тысяч. Однако если пренебречь зависимостями между ошибками, то полученные выше формулы для $k = 2$ можно приближенно перенести на произвольные k. Для этого необходимо выбрать два наиболее информативных факта y_1 и y_2 с наименьшими ошибками $\underline{v}_1$ и $\underline{v}_2$ и получить субоптимальное решение x_{12}, а также оценку его погрешности $\underline{v}_{12}$. Далее это решение можно последовательно улучшать, привлекая попарно другие факты в предположении независимости ошибок решений. Оптимальные и субоптимальные по точности дискретные и непрерывные решения с произвольным числом зашумленных фактических источников и искаженной априорике (см. [4]).

Итак, априорная информация о проблемном объекте, источниках фактических данных, о факторах, влияющих на объект и процесс наблюдений, является чрезвычайно важной во всех ситуациях принятия решений. В теоретической информатике этот источник знаний формально представлен рефором априорики $B_a \rightarrow J$, в предметных областях он зачастую слабо формализован, несмотря на большую ценность априорных данных, особенно недостатки формализации касаются оценок достоверности результатов рефора B_a [1]. В однородном метауниверсуме логические связи из одного класса «равноправны», однако реальный информационный мир неоднороден, распределение $q(J)$ в априорном пространстве неравномерное, в частности, обман встречается чаще в критических ситуациях и стремление к истине в целом превалирует над ложью.

Еще одно усложнение решенных выше задач состоит в учете распределения $q(\Delta J)$ ошибок априорики $\Delta J = (\Delta \underline{x}, \Delta \underline{v_1}, \Delta \underline{v_2}, \Delta \underline{x v_1}, \Delta \underline{x v_2}, \Delta \underline{v_1 v_2}, \Delta \underline{x v_1 v_2}, ...)$, особенно в проблемных ситуациях, в которых область неопределенности априорики $Q_{\Delta J}$ пересекает границы оптимальности рефоров B_k и рефора неопределенности B_θ при $\Delta_{\min} > \Delta_{\Gamma}$. Модели принятия решений становятся более адекватными информационной реальности, если в них учитываются противоречия между фактами и априорикой, например, в шкале тетралогики, содержащей критический информационный ноль □ – киноль, знак абсурдного результата информационного процесса [1]. Указанные усложнения моделей принятия решений доступны современным средствам информационного моделирования и представляют ближайшую перспективу информационных технологий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Зверев Г. Н.** Теоретическая информатика и ее основания. Т. 1. М.: Физматлит, 2007. 592 с.

2. **Дуда Р., Харт П.** Распознавание образов и анализ сцен. М.: Мир, 1976. 511 с.

3. **Зверев Г. Н.** Частотная логика – альтернатива классической логики в новых информационных технологиях // Информационные технологии. 1998. № 11. С. 3–11.

4. **Зверев Г. Н** Дискретно-непрерывная сенсформика // Основания теоретической информатики. Разд. 9. Уфа: УГАТУ, 1999. 204 с.

ОБ АВТОРАХ

Зверев Геннадий Никифорович, проф. каф. проектирования средств информатики. Дипл. инж.-геофизик (Грозненск. нефт. ин-т, 1958). Д-р техн. наук по геофизике (МИНХиГП, 1982). Иссл. в обл. информатики и искусственного интеллекта.

Боровская Радмила Владимировна, вед. прогр. ОПНПиНКВК УГАТУ. Дипл. инж.-системоаналитик по САПР (УГАТУ, 1993). Иссл. в обл. автоматиз. инф. систем.

Колупаева Наталья Александровна, инж. 1 кат. каф. КМ. Дипл. инж. по САПР (УГАТУ, 2001). Иссл. в обл. инф. технологий в мед. диагностике.