Уфа : УГАТУ, 2009 Вестник УГАТУ Т. 13, № 1 (34). С. 32–37

МАШИНОСТРОЕНИЕ • ТЕПЛОВЫЕ, ЭЛЕКТРОРАКЕТНЫЕ ДВИГАТЕЛИ И ЭНЕРГОУСТАНОВКИ ЛА

УДК 533.6

**Э. Г. ГИМРАНОВ**

# ОБОБЩЕННАЯ ИМПУЛЬСНАЯ ФУНКЦИЯ СЕМЕЙСТВА ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В КАНАЛАХ ДЛА И ЭУ

Приводится обобщенная импульсная функция течения газа в каналах ДЛА и ЭУ, выраженная в модифицированных газодинамических функциях полного импульса. Решение системы уравнений законов сохранения дано для газодинамики торможения вязкого сверхзвукового потока, для псевдоскачков в каналах, принадлежащих к семейству со степенной зависимостью между давлением и площадью поперечного сечения. *Импульсная функция*; *торможение вязкого сверхзвукового потока*; *псевдоскачок*

Установление закономерностей изменения параметров газового потока на псевдоскачке [1] имеет важное значение для решения целого ряда практических задач, разработки методов расчета газодинамики технических устройств.

Параметры газа за псевдоскачком определяются законами сохранения массы, импульса и энергии. Эти законы связывают между собой значения параметров газа перед псевдоскачком с параметрами газа за псевдоскачком со скоростью движения газа. Под параметрами газа на псевдоскачке здесь понимаются приведенные скорости $\lambda_1$ в начальном $x_1$ и $\lambda_2$ ; в конечном $x_2$ сечении полностью развитого псевдоскачка отношение статических давлений $\overline{p} = p_2 / p_1$ и полных $\sigma = p^*_2 / p^*_1$ – коэффициент восстановления полного давления на псевдоскачке.

Приближенное определение соотношения параметров развитого псевдоскачка производится методами одномерной газовой динамики установившихся течений с использованием модифицированных газодинамических функций потока полного импульса, учитывающих неравномерность распределения параметров газа в каналах газодинамических установок или струях по площади поперечного сечения.

## 1. ОБОБЩЕННАЯ ИМПУЛЬСНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ИНТЕГРАЛЫ

Уравнение импульсов для течения газа с трением, подводом или отводом массы вторичного газа в канале переменного поперечного сечения запишется в виде

$$d\Phi = pdF + u_x dM - \tau_w dF_w. \qquad (1)$$

Контактная информация: (347) 273-09-44

Здесь $u_x$ – осевая составляющая скорости вторичной массы газа; $\tau_w = C_f \dfrac{\rho u^2}{2}$ – касательное напряжение на стенке канала, $C_f$ – коэффициент гидравлического трения.

После несложных преобразований уравнения (19) получим

$$d\Phi = pdF + Gu\frac{u_x}{u}\frac{dG}{G} - \frac{1}{2}\xi Gu\frac{dx}{D_\text{г}}, \qquad (2)$$

где $\xi = 4C_f$ – коэффициент гидравлического сопротивления (важнейшая гидравлическая характеристика канала); $D_\text{г} = 4\,F/\Pi$ – гидравлический диаметр канала; $\Pi$ – периметр сечения канала.

Уравнение состояния совершенного газа записывается в виде

$$p = \rho R_\text{г}\, T\,. \qquad (3)$$

Связь между заторможенными изоэнтропическими параметрами и параметрами газа в потоке определется известными газодинамическими функциями:

$$\frac{T}{T^*} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2 = \tau(\lambda);$$

$$\frac{P}{P^*} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \pi(\lambda); \qquad (4)$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \varepsilon(\lambda).$$

Используя выражения для потока полного импульса типа (3), представим уравнение (2) в следующих трех различных видах:

$$d\left[\frac{\gamma+1}{\gamma}Ga_\text{кр}Z^i(\lambda_0)\right] = pdF + Gu\frac{u_x}{u}\frac{dG}{G} - \frac{1}{2}\xi Gu\frac{dx}{D_\text{г}}; \qquad (5)$$

$$d\left[pF\frac{1}{R^{i}(\lambda_0)}\right]=pdF+Gu\frac{u_x}{u}\frac{dG}{G}-\frac{1}{2}\xi Gu\frac{dx}{D_{\text{г}}};$$

$$d\left[p^{*}F\,F^{i}(\lambda_0)\right]=pdF+Gu\frac{u_x}{u}\frac{dG}{G}-\frac{1}{2}\xi Gu\frac{dx}{D_{\text{г}}}.$$

В уравнениях (5) индексом $i$ обозначены формы записи модифицированных газодинамических функций потока полного импульса.

Разделив почленно соответственно первое уравнение на $\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}Ga_{\text{кр}}\right)$, второе на $(pF)_1$ и третье на $(p^*F)_1$, после ряда преобразований уравнения (1) запишутся в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{dZ^{i}(\lambda_0)}{Z^{i}(\lambda_0)}+\frac{d\psi}{\psi}-R^{i}(\lambda_0)\frac{d\bar F}{\bar F}-\left[1-R^{i}(\lambda_0)\right]\bar\lambda_{\bar G}\frac{d\bar G}{\bar G}+\\
&+\frac{1}{2}\xi\left[1-R^{i}(\lambda_0)\right]\frac{d\bar x}{\sqrt{\bar F}}=0;\\
&\frac{d\bar p}{\bar p}-\frac{dR^{i}(\lambda_0)}{R^{i}(\lambda_0)}+\left[1-R^{i}(\lambda_0)\right]\frac{d\bar F}{\bar F}-\left[1-R^{i}(\lambda_0)\right]\bar\lambda_{\bar G}\frac{d\bar G}{\bar G}+\\
&+\frac{1}{2}\xi\left[1-R^{i}(\lambda_0)\right]\frac{d\bar x}{\sqrt{\bar F}}=0;\\
&\frac{d\sigma}{\sigma}-\frac{dF^{i}(\lambda_0)}{F^{i}(\lambda_0)}+\left[1-R^{i}(\lambda_0)\right]\frac{d\bar F}{\bar F}-\left[1-R^{i}(\lambda_0)\right]\bar\lambda_{\bar G}\frac{d\bar G}{\bar G}+\\
&+\frac{1}{2}\xi\left[1-R^{i}(\lambda_0)\right]\frac{d\bar x}{\sqrt{\bar F}}=0.
\end{aligned}\tag{6}$$

Здесь $\psi$ – комплексный параметр

$$\psi=\frac{G}{G_1}\sqrt{\frac{T^*}{T_1^*}}\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}R_{\text{г}}\right)\Big/\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}R_{\text{г}}\right)_1}=\bar G\theta\vartheta,$$

где $\bar G=G/G_1$ – коэффициент массового воздействия; $\theta=\sqrt{T^*/T_1^*}$ – коэффициент теплового воздействия; $\vartheta=\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}R_{\text{г}}\right)\Big/\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}R_{\text{г}}\right)_1}$ – коэффициент термического воздействия; $\bar F=F/F_1$ – безразмерная площадь поперечного сечения канала; $\bar\lambda_{\bar G}=\lambda_{Gx}/\lambda_0$ – относительная безразмерная скорость подведенной (отведенной) массы газа, приведенной к расчетному сечению.

Общие интегралы дифференциальных уравнений (6) будут определять изменение приведенной скорости и относительного давления в конечном сечении псевдоскачка в функции начальных условий, физических воздействий и изменения геометрии канала:

$$\begin{aligned}
&\frac{dZ^{i}(\lambda_0)}{Z^{i}(\lambda_0)}+\frac{d\psi}{\psi}-R^{i}(\lambda_0)\frac{d\bar F}{\bar F}-\\
&-\left[1-R^{i}(\lambda_0)\right]\bar\lambda_{\bar G}\frac{d\bar G}{\bar G}+\\
&+\frac{1}{2}\xi\left[1-R^{i}(\lambda_0)\right]\frac{d\bar x}{\sqrt{\bar F}}=0;\\
&\frac{d\bar p}{\bar p}-\frac{dR^{i}(\lambda_0)}{R^{i}(\lambda_0)}+\left[1-R^{i}(\lambda_0)\right]\frac{d\bar F}{\bar F}-\\
&-\left[1-R^{i}(\lambda_0)\right]\bar\lambda_{\bar G}\frac{d\bar G}{\bar G}+\\
&+\frac{1}{2}\xi\left[1-R^{i}(\lambda_0)\right]\frac{d\bar x}{\sqrt{\bar F}}=0;\\
&\frac{d\sigma}{\sigma}-\frac{dF^{i}(\lambda_0)}{F^{i}(\lambda_0)}+\left[1-R^{i}(\lambda_0)\right]\frac{d\bar F}{\bar F}-\\
&-\left[1-R^{i}(\lambda_0)\right]\bar\lambda_{\bar G}\frac{d\bar G}{\bar G}+\\
&+\frac{1}{2}\xi\left[1-R^{i}(\lambda_0)\right]\frac{d\bar x}{\sqrt{\bar F}}=0.
\end{aligned}\tag{7}$$

Здесь для краткости записи принято $I^{i}(\lambda_0)=1-R^{i}(\lambda_0)$. Правые части уравнений (7) представляют собой произведения четырех сомножителей, где первый сомножитель $1/\psi$ учитывает влияние внутренних воздействий теплом $\theta$ массой $\bar G$ и изменением термодинамических свойств потока газа $\vartheta$; второй сомножитель

$$\exp\left[\int_1^{\bar F}R^{i}(\lambda_0)d\ell n\bar F\right]\ \text{или}\ \exp\left[\int_1^{\bar F}I^{i}(\lambda_0)d\ell n\bar F\right]$$

учитывает влияние изменения геометрии канала $\bar F=\bar F(\bar x)$; третий сомножитель

$$\exp\left[\int_1^{\bar G}I^{i}(\lambda_0)\bar\lambda_{\bar G}d\ell n\bar G\right]$$

учитывает влияние изменения потока полного импульса за счет подведенной (отведенной) массы газа $G=\bar G(\bar x)$; четвертый сомножитель

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^{\bar x}I^{i}(\lambda_0)\xi\frac{d\bar x}{\sqrt{\bar F}}\right]$$

учитывает влияние закона трения $\xi=\xi(\bar x)$.

Влияние начальной неравномерности потока определяют модифицированные газодинамические функции потока полного импульса $Z^{i}(\lambda_0)$, $R^{i}(\lambda_0)$ и $I^{i}(\lambda_0)$, $F^{i}(\lambda_0)$. Таким образом, уравнения (6) представляют собой дифференциальные (а с учетом интегральных характеристик вязкого диссипативного слоя – интегро-дифференциальные) уравнения движения газа в псевдоскачке, а уравнения (7) – уравнения движения в интегральной форме. Указанные уравнения по форме и содержанию напоминают уравнения Л. А. Вулиса [2] – «условия обращения воздействия» и уравнения движения недиссоциированного газа В. Н. Крымасова [3], но при этом существенно отличаются от них модифицированными газодинамическими функциями потока полного импульса и дозвуковыми решениями при сверхзвуковых начальных условиях с высоким переходным непрерывным (только в одном частном случае локальным) градиентом параметров газового потока. В этом смысле уравнения (6–7) могут быть названы как общие условия перехода от сверхзвукового ($M > 1$) течения к дозвуковому ($M < 1$) в псевдоскачке. В частном случае, в предельно упрощающем предположении об отсутствии начальной неравномерности потока в канале, физических воздействий и трения в канале постоянной площади поперечного сечения уравнения (7) приводятся к виду

$$Z(\lambda_2) = Z(\lambda_1),$$
$$\bar{p} = r(\lambda_2)/r(\lambda_1),$$
$$\sigma = f(\lambda_1)/f(\lambda_2),$$

решение которых дает известные соотношения для единичного прямого скачка уплотнения: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$ – основное кинематическое соотношение для прямого скачка уплотнения;

$$\bar{p} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda_1^2 - \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}}{1 - \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_1^2};$$

$$\sigma_{\text{п.ск.}} = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \lambda_1^2 \left( \frac{1 - \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_1^2}{1 - \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\dfrac{1}{\lambda_1^2}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

по отношению к которым в последующих расчетах будут даны сравнительные оценки.

Точные решения уравнений (6–7) можно получить, если известны зависимости $\psi = \psi(\bar{x})$ или $\bar{G} = \bar{G}(\bar{x})$, $\theta = \theta(\bar{x})$, $\gamma = \gamma(\bar{x})$, $\bar{F} = \bar{F}(\bar{x})$, $\xi = \xi(\bar{x})$, $\lambda_0 = \lambda_0(\bar{x})$ или $M_0 = M_0(\bar{x})$, а также начальные условия: числа $M_1$ и $Re_1$, профиль скорости вязкого слоя $u = u(\eta)$ (пограничного слоя или в сечении канала, заполненного вязким течением). При этом подынтегральные выражения получаются достаточно сложными, что приводит к существенным затруднениям аналитического метода, который рациональнее использовать для решения частных задач. В общем случае лучше переходить к приближенным или численным методам.

Форма записи уравнений (7) позволяет рассматривать раздельно и в любой комбинации воздействия на газовый поток на длине псевдоскачка.

Выражение для определения изменения площади поперечного сечения канала $\bar{F} = \bar{F}(\bar{x})$ (обратная задача) находится из решения первого дифференциального уравнения (6), которое после ряда преобразований приводится к линейному неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка относительно искомой функции $\sqrt{\bar{F}}$ и производной $\dfrac{d\sqrt{\bar{F}}}{d\bar{x}}$;

$$\frac{d\sqrt{\bar{F}}}{d\bar{x}} + \frac{1}{2R^i(\lambda_0)}\left\{ I^i(\lambda_0)\bar{\lambda}_{\bar{G}}\frac{d\ln\bar{G}}{d\bar{x}} - \frac{d\ln\left(\psi Z^i(\lambda_0)\right)}{d\bar{x}} \right\}\sqrt{\bar{F}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{R^i(\lambda_0)} - 1\right]\xi(\bar{x}). \qquad (8)$$

Общее решение уравнения (8) запишется в виде

$$\sqrt{\bar{F}} = \exp\left[-\int p(\bar{x})d\bar{x}\right]\left\{\int Q(\bar{x})\left[\exp\int p(\bar{x})d\bar{x}\right]d\bar{x} + C_1\right\},$$

где

$$p(\bar{x})\frac{1}{2R^i(\lambda_0)}\left\{ I^i(\lambda_0)\bar{\lambda}_{\bar{G}}\frac{d\ln\bar{G}}{d\bar{x}} - \frac{d\ln\left(\psi Z^i(\lambda_0)\right)}{d\bar{x}} \right\},$$

$$Q(\bar{x}) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{R^i(\lambda_0)} - 1\right]\xi(\bar{x}).$$

Если возмущающая функция $Q(x) \equiv 0$, то уравнение (8) становится линейным однородным и решается способом разделения переменных

$$d\ln\sqrt{\bar{F}} = -\frac{1}{R^i(\lambda_0)}\left\{ I^i(\lambda_0)\bar{\lambda}_{\bar{G}} d\ln\bar{G} - d\ln\left(\psi Z^i(\lambda_0)\right)\right\}.$$

Тогда после интегрирования получим

$$\sqrt{\bar{F}} = \exp\left\{ \frac{1}{2}\int_0^{\bar{x}} \frac{1}{R^i(\lambda_0)} d\ln\left[\psi Z^i(\lambda_0)\right] - \frac{1}{2}\int_0^{\bar{x}} \frac{1}{R^i(\lambda_0)}\bar{\lambda}_{\bar{G}} d\ln\bar{G} \right\}.$$

К обратной задаче можно отнести определение из первого уравнения (6) при известном характере изменения площади поперечного сечения канала $\bar{F} = \bar{F}(\bar{x})$ коэффициента внутреннего воздействия на газовый поток на длине псевдоскачка, $\psi = \psi(\bar{x})$. Эта зависимость имеет вид

$$\psi = \frac{Z^i(\lambda_{01})}{Z^i(\lambda_0)}\exp\left[\int_1^{\bar{F}} R^i(\lambda_0) d\ln\bar{F} + \int_1^{\bar{G}} I^i(\lambda_0)\bar{\lambda}_{\bar{G}} d\ln\bar{G} - \frac{1}{2}\int_0^{\bar{x}} I^i(\lambda_0)\xi(\bar{x}) d\bar{x}\right]. \quad (9)$$

## 2. СЕМЕЙСТВО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В КАНАЛАХ, ДЛЯ КОТОРЫХ ДАВЛЕНИЕ И ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ СВЯЗАНЫ СТЕПЕННОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ

Пусть зависимости вида $\bar{p}(\bar{x})$ и $\bar{F}(\bar{x})$ будут объединены функцией $\left[\bar{p}(\bar{x}), \bar{F}(\bar{x})\right]$, которая представляет собой степенное выражение вида

$$pF^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \text{const}\,, \quad (10)$$

заимствованное из [1]. Предполагается существование течения в таком канале, для которого в каждом сечении справедливо соотношение

$$pF^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = p_1 F_1^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = p_2 F_2^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = \text{const}\,.$$

Рассмотрим семейство сверхзвуковых течений с переходом от $M > 1$ к $M < 1$ (псевдоскачок) в таких каналах сначала в общем виде.

Поток обобщенного полного импульса («обобщенная импульсная функция» по Л. Крокко) запишется следующим образом:

$$\Phi = GW + \varepsilon pF$$

или с помощью газодинамических функций для однородного потока

$$\Phi = \frac{\gamma+1}{\gamma} G a_{кр} Z(\varepsilon,\lambda_0);\ \Phi = pF\frac{1}{r(\varepsilon,\lambda_0)}; \quad (11)$$

$$\Phi = p^* F f(\varepsilon,\lambda_0),$$

где газодинамические функции обобщенного полного импульса имеют вид

$$Z(\varepsilon,\lambda_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{2\gamma-\varepsilon(\gamma-1)}{\gamma+1}\lambda_0 + \frac{\varepsilon}{\lambda_0}\right];$$

$$\frac{1}{r(\varepsilon,\lambda_0)} = \frac{1}{r(\lambda_0)} + (\varepsilon-1); \quad (12)$$

$$f(\varepsilon,\lambda_0) = (\varepsilon-1)\pi(\lambda_0) + f(\lambda_0).$$

Согласно (5) поток полного импульса представим в следующих трех различных видах:

$$d\left[\frac{\gamma+1}{\gamma} G a_{кр} Z^i(\varepsilon,\lambda_0)\right] = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} F dp + Gu\frac{u_x}{u}\frac{dG}{G} - \frac{1}{2}Gu\xi\frac{dx}{D_г};$$

$$d\left[pF\frac{1}{r(\varepsilon,\lambda_0)}\right] = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} F dp + Gu\frac{u_x}{u}\frac{dG}{G} - \frac{1}{2}Gu\xi\frac{dx}{D_г};$$

$$d\left[p^* F F^i(\varepsilon,\lambda_0)\right] = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} F dp + Gu\frac{u_x}{u}\frac{dG}{G} - \frac{1}{2}Gu\xi\frac{dx}{D_г}.$$

Разделив почленно соответственно первое уравнение на $\left(\frac{\gamma+1}{\gamma} G a_{кр}\right)_1$, второе на $(pF)_1$ и третье на $(p^* F)_1$, после преобразований уравнения импульса запишем в безразмерном виде

$$\frac{dZ^i(\varepsilon,\lambda_0)}{Z^i(\varepsilon,\lambda_0)} + \frac{d\psi}{\psi} + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} R^i(\varepsilon,\lambda_0)\frac{d\bar{p}}{\bar{p}} - \left[1-R^i(\varepsilon,\lambda_0)\right]\bar{\lambda}_{\bar{G}}\frac{d\bar{G}}{\bar{G}} + \frac{1}{2}\left[1-R^i(\varepsilon,\lambda_0)\right]\xi\frac{d\bar{x}}{\sqrt{\bar{F}}} = 0;$$

$$\frac{d\bar{p}}{\bar{p}} - \frac{dR^i(\varepsilon,\lambda_0)}{R^i(\varepsilon,\lambda_0)} + \left[\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} R^i(\varepsilon,\lambda_0) - 1\right]\frac{d\bar{p}}{\bar{p}} - \left[1-R^i(\varepsilon,\lambda_0)\right]\bar{\lambda}_{\bar{G}}\frac{d\bar{G}}{\bar{G}} + \frac{1}{2}\left[1-R^i(\varepsilon,\lambda_0)\right]\xi\frac{d\bar{x}}{\sqrt{\bar{F}}} = 0; \quad (13)$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{d\bar{F}}{\bar{F}} + \frac{dF^i(\varepsilon,\lambda_0)}{F^i(\varepsilon,\lambda_0)} + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} R^i(\varepsilon,\lambda_0)\frac{d\bar{p}}{\bar{p}} - \left[1-R^i(\varepsilon,\lambda_0)\right]\bar{\lambda}_{\bar{G}}\frac{d\bar{G}}{\bar{G}} + \frac{1}{2}\left[1-R^i(\varepsilon,\lambda_0)\right]\xi\frac{d\bar{x}}{\sqrt{\bar{F}}} = 0.$$

Общие интегралы дифференциальных уравнений (13) имеют такое же содержание, что и обобщенные уравнения движения газа в [4].

$$Z^i(\varepsilon,\lambda_0) = \frac{Z^i(\varepsilon,\lambda_{01})}{\psi(\bar{x})}\exp\left[\int_1^{\bar{F}} R^i(\varepsilon,\lambda_0) d\ln\bar{F}\right] \times \exp\left[\int_1^{\bar{G}} I^i(\varepsilon,\lambda_0)\bar{\lambda}_{\bar{G}}\frac{d\bar{G}}{\bar{G}}\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^{\bar{x}} I^i(\varepsilon,\lambda_0)\xi\frac{d\bar{x}}{\sqrt{\bar{F}}}\right];$$

$$\int_1^{\bar{F}} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} R^i(\varepsilon,\lambda_0) d\ln\bar{p} = \ln\frac{R^i(\varepsilon,\lambda_0)}{R^i(\varepsilon,\lambda_{01})} + \int_1^{\bar{G}} I^i(\varepsilon,\lambda_0)\bar{\lambda}_{\bar{G}}\frac{d\bar{G}}{\bar{G}} - \frac{1}{2}\int_0^{\bar{x}} I^i(\varepsilon,\lambda_0)\xi\frac{d\bar{x}}{\sqrt{\bar{F}}}; \quad (14)$$

$$\sigma = \frac{F^i(\varepsilon,\lambda_{01})}{F^i(\varepsilon,\lambda_0)}\exp\left[\int_1^{\bar{p}} \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} I^i(\varepsilon,\lambda_0) d\ln\bar{p}\right] \times \exp\left[\int_1^{\bar{G}} I^i(\varepsilon,\lambda_0)\bar{\lambda}_{\bar{G}}\frac{d\bar{G}}{\bar{G}}\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^{\bar{x}} I^i(\varepsilon,\lambda_0)\xi\frac{d\bar{x}}{\sqrt{\bar{F}}}\right].$$

Использование обобщенных уравнений (13) и (14) для решения практических задач по расчету параметров псевдоскачка требует определения значений ε. Так, в [1] показано, что физический смысл имеют значения ε, заключенных в пределах

$$0 \le \varepsilon \le \frac{\gamma - 1}{\gamma}.$$

Соответствующим образом представленные уравнения законов сохранения массы, энергии и обобщенного полного импульса приводит к «обобщенному уравнению Ренкина-Гюгонио» – «псевдоударная адиабата».

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{1 + u_{\text{кр}}^2}{u_{\text{кр}}^2} \frac{\left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}}{\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}},$$

где

$$u_{\text{кр}}^2 = \frac{\varepsilon(\gamma - 1)}{2\gamma - \varepsilon(\gamma - 1)}.$$

Для воздуха ($\gamma$ = 1,4) $0 \le \varepsilon \le 3{,}5$, а $u^2_{\text{кр}} = 0{,}4\varepsilon / (2{,}8 - 0{,}4\varepsilon)$. При ε = 0 имеет место течение с постоянным давлением без трения, $p$=const $(\overline{p} = 1)$. При ε = 1 – течение без трения в канале постоянной площади поперечного сечения, $F$ = const ( $\overline{F}$=1). При $\varepsilon = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$ «обобщенное уравнение Ренкина-Гюгонио» совпадает с уравнением изоэнтропы, $ds = 0$. При всех остальных значениях ε происходит увеличение энтропии, $ds > 0$, при условии $p_2/p_1 > 1$, т. е. в соответствии со вторым законом термодинамики физически осуществляются только течения сжатия.

Тогда может быть предложен следующий способ решения смешанной задачи при заданных $p_2/p_1 > 1$ и $F_2/F_1 < 1$ или $F_2/F_1 > 1$ (слаборасширяющийся или слабосужающийся канал без нарушения одномерности течения). Из условия Л. Крокко получим

$$\varepsilon = \ln \frac{p_2}{p_1} / \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\frac{F_2}{F_1}\right), \tag{15}$$

а затем из уравнений (13) или (14) определяются закономерности $\overline{p} = \overline{p}(\overline{x})$ и $\overline{F} = \overline{F}(\overline{x})$. Заметим, что разрешить уравнения относительно искомых функций в явном виде не удается. Вместо (15) может быть предложено соотношение, полученное с использованием уравнения расхода, записанного в виде

$$m_1 y(\lambda_{01}) F_1 \frac{p_1}{\sqrt{T_1^*}} = m_2 y(\lambda_{02}) F_2 \frac{p_2}{\sqrt{T_2^*}}$$

или

$$\frac{p_2}{p_1}\frac{F_2}{F_1} = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{T_2^*}{T_1^*}}\frac{y(\lambda_{01})}{y(\lambda_{02})}.$$

Тогда получим

$$\varepsilon = \ln \frac{p_2}{p_1} / \ln\left[\frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{T_2^*}{T_1^*}}\frac{y(\lambda_{01})}{y(\lambda_{02})}\right], \tag{16}$$

т. е. вместо геометрии канала (отношение площадей) можно использовать чисто газодинамические и термодинамические параметры потока. При $T^*$ = const будем иметь

$$\varepsilon = \ln \frac{p_2}{p_1} / \ln \frac{y(\lambda_{01})}{y(\lambda_{02})}. \tag{17}$$

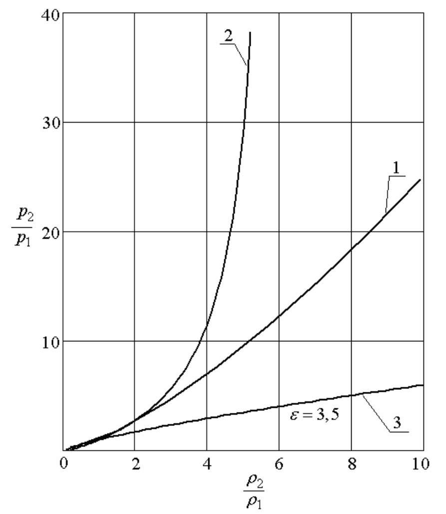


**Рис. 1.** Сравнительные характеристики: *1* – идеальной адиабаты Пуассона; *2* – ударной адиабаты Рэнкина-Гюгонио; *3* – псевдоударной обобщенной адиабаты Рэнкина-Гюгонио; γ = 1,4.

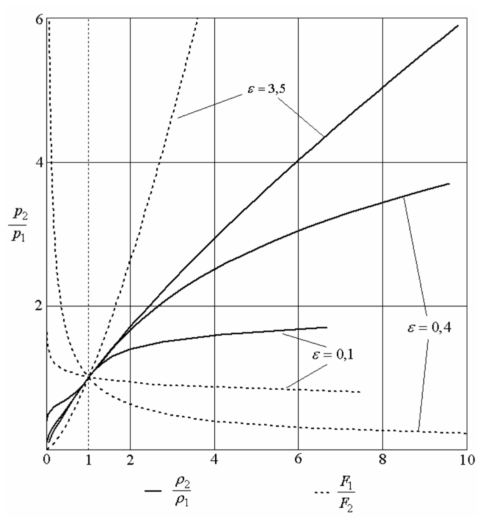


**Рис. 2.** Характеристики обобщенной псевдоударной адиабаты Рэнкина-Гюгонио; γ = 1,4

На рис. 1 и 2 представлены характеристики адиабаты Пуассона, ударной адиабаты и обобщенной псевдоударной адиабаты Рэнкина-Гюгонио.

## ВЫВОДЫ

Таким образом, получены:

● обобщенная импульсная функция семейства течений газа в каналах ДЛА и ЭУ, позволяющая рассматривать изменение параметров потока в условиях влияния начальных факторов и различных физических воздействий;

● уравнения законов сохранения массы, энергии и импульсов функции приводят к «обобщенному уравнению Рэнкина–Гюгонио – псевдоударная адиабата» в каналах, принадлежащих к степенному семейству между давлением и площадью поперечного сечения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Крокко Л.** Одномерное рассмотрение газовой динамики установившихся течений // Основы газовой динамики. 1963. С. 64–324.

2. **Вулис Л. А.** Термодинамика газовых потоков. М.: Госэнергоиздат, 1950. 320 с.

3. **Крымасов Н. Н.** Газодинамические течения в каналах при наличии тепломассообмена // Тр. ЦАГИ. 1973. Вып. 1443. 64 с.

4. **Гимранов Э. Г., Михайлов В. Г.** Обобщенные квазиодномерные уравнения движения газа в каналах ДЛА и их интегралы // Вестник УГАТУ. 2006. Т. 7, № 1(14). С.153–160.

## ОБ АВТОРЕ

**Гимранов Эрнст Гайсович**, проф. каф. прикладной гидромеханики. Дипл. инж.-мех. по авиац. двигателям (УАИ, 1965). Д-р техн. наук по тепловым двигателям (УАИ, 1990). Иссл. в обл. газовой динамики двигателей.