Уфа : УГАТУ, 2009 Вестник УГАТУ • Управление, ВТ и И Т. 12, № 1(30). С. 17–24

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.71

Р. Р. АКЧУРИН, В. Н. ЕФАНОВ

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ОБЛАСТЕЙ ПРИТЯЖЕНИЯ

Предлагается метод оценки эффективности сложных технических систем с летательными аппаратами на основе анализа областей притяжения. Этот метод основан на следующих принципах: концепции формирования гибких адаптивных траекторий движения, оптимальных по времени полета и топливным ресурсам; методе оценки области притяжения нелинейной динамической системы; задании области притяжения на основе концепции сверхустойчивости динамических систем. *Фаза полета ; траектория ; эффективность ; область притяжения ; сверхустойчивость*

ВВЕДЕНИЕ

Глобальная модернизация национальных систем управления воздушным движением, вызванная необходимостью более эффективной организации воздушного пространства, становится все более актуальной и для российской Единой системы организации воздушного движения (ЕС ОВД). «Концепция модернизации и развития ЕС ОВД РФ», утвержденная постановлением № 144 Правительства РФ от 22.02.2000г., предусматривает реализацию десяти инвестиционных проектов, направленных на интеграцию ЕС ОВД РФ в мировую аэронавигационную систему. Для этого планируется существенное повышение степени технического обеспечения действующих и вновь открываемых международных и внутренних воздушных трасс средствами воздушной и наземной связи, наблюдения и управления, отвечающими требованиям ИКАО.

Внедрение новейших технологий позволит снизить себестоимость авиаперевозок и аэронавигационного обслуживания на 20–30% при обеспечении безопасности воздушного движения в соответствии с нормами ИКАО: риск столкновения воздушных судов составит 6×10^{-8} на час налета в период до 2010 года и $1{,}5\times10^{-8}$ – после 2010 года. При этом устраняется необходимость в негибких и экономически неэффективных наземных системах проводки и обеспечения воздушных трасс, а также в связанных с ними навигационных инфраструктурах. Планируется провести укрупнение районных центров управления воздушным движением: к 2010 году из более 120 центров останется только 24 центра, осуществляющих передачу радиолокационной информации и радиообмен с воздушными судами. В этих условиях наземные диспетчеры должны будут руководствоваться концепцией тактического (локального) эшелонирования, основанной на параметрах местоположения и вектора скорости самолетов, а не концепцией стратегического эшелонирования, основанной на параметрах траектории полета и подразумевающей выполнение полетов по назначенным маршрутам, с заданными высотами и скоростями полета под непосредственным контролем системы УВД, как это делается сегодня. Таким образом, реализуется совершенно иной подход к управлению воздушным движением, который вкладывает новый смысл в понятие «полет по приборам».

Перед будущей системой управления воздушным движением ставятся следующие задачи:

- увеличение пропускной способности воздушного пространства и, как следствие, увеличение пассажиропотоков и регулярности выполнения авиарейсов;
- снижение эксплуатационных затрат за счет выбора кратчайших и наиболее экономичных маршрутов к пунктам назначения, что обеспечивает сокращение требуемых топливных резервов, особенно на трансокеанских перелетах;
- повышение безопасности полетов при росте интенсивности воздушного движения.

Комплексное решение перечисленных задач требует разработки новой идеологии формирования целостной окружающей среды, в которой

Контактная информация: (347)273-06-88

происходит управление воздушным движением. Суть этой идеологии состоит в устранении существующих ограничений воздушного пространства, предусматривающих последовательное движение самолета вдоль предопределенных воздушных трасс, и в переходе к концепции свободного воздушного пространства. Тем самым экипажам воздушных судов предоставляется возможность свободно выбирать оптимальную траекторию полета по маршруту, скорость и профиль, причем даже в большей степени, чем это позволяют правила визуальных полетов.

1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА

Методической основой для разработки гибких траекторий полета, отвечающих концепции свободного воздушного пространства, служит метод типовых фаз [1]. Согласно этому методу полет рассматривается как совокупность взаимосвязанных действий, направленных на решение поставленной задачи в условиях сложившейся обстановки. Причем чередование взаимосвязанных действий представляется последовательностью характерных фаз полета – условно выделяемых частей, направленных на решение промежуточных задач операции, выполняемой летательным аппаратом. Каждая фаза включает в себя универсальную часть – типовую фазу, которая может использоваться без изменения для некоторого диапазона условий применения летательного аппарата, и варьируемую часть, учитывающую специфику сложившейся ситуации. Для типовых фаз формируется соответствующая совокупность типовых траекторий. Состав этих траекторий зависит от вида и назначения используемого летательного аппарата, от характера выполняемого полетного задания и отражает набор оптимальных программ управления применительно к типовым фазам полета:

- начальной фазе полета – взлету, набору высоты, которые характеризуются оптимальными законами изменения тяги для максимизации высоты или скорости полета при заданной массе расходуемого топлива, либо для обеспечения заданных параметров полета при минимальном расходе топлива;
- крейсерскому полету на максимальную дальность при минимальном расходе топлива;
- участкам выполнения индивидуальных и групповых пространственных маневров с минимальным временем разворотов при обеспечении минимального расхода топлива;
- фазе снижения с минимальным расходом топлива до высоты, определяемой заходом на посадку с выходом в точку визуального наблюдения полосы при заданной степени сложности метеоусловий.

Взаимная увязка типовых траекторий осуществляется на основе рационального перераспределения располагаемых расходуемых ресурсов летательного аппарата. Большинство компонентов авиационных систем обладают определенной мерой располагаемых ресурсов, которые расходуются на реализацию различных целей полета. В качестве наиболее важных расходуемых ресурсов при формировании гибких траекторий полета можно указать запас топлива, дальность полета, время выполнения операции. Очевидно, что все типовые траектории взаимосвязаны через отмеченные характеристики. Ресурсы, сэкономленные на какой-либо фазе полета, могут расходоваться для повышения эффективности операции в целом. Анализ возможностей перераспределения ресурсов играет важную роль как средство компенсации неопределенных условий полета, в результате чего летательный аппарат приобретает возможность приспосабливаться к динамически изменяющимся условиям его применения. Чтобы расширить подобные возможности, необходимо на всех участках траектории движения расходовать ресурсы оптимальным образом. Отсюда вытекает основное требование к построению гибких траекторий – требование оптимальности по расходуемым ресурсам.

В настоящее время используется большое количество разнообразных подходов к оптимизации траекторного движения летательных аппаратов применительно к конкретным видам ограничений, определяемых уравнениями их движения, и ограничений, налагаемых на возможные значения некоторых физических параметров. При этом уравнения динамики представляют собой достаточно сложную систему нелинейных дифференциальных уравнений, которая включает кинематические уравнения, уравнения сил, уравнения моментов, а также совокупность уравнений связей параметров движения в различных системах координат.

Поясним сказанное на примере модели продольного движения летательного аппарата

$$m\left(\frac{dV}{dt}\right) = P\cos\alpha - X - G\sin\theta + X_{\text{B}};$$
$$mV\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = P\sin\alpha + Y - G\cos\theta + Y_{\text{B}}; \quad (1)$$

$$J_Z\left(\frac{d\omega_Z}{dt}\right) = M_Z + M_{ZB};\ \ \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_z;\ \ \vartheta = \alpha + \theta;$$

$$\frac{dH}{dt} = V\sin\theta;\ \ \frac{dL}{dt} = V\cos\theta,$$

где V, H и L – соответственно скорость, высота полета и пройденное расстояние; m – масса летательного аппарата; P – сила тяги; $X = C_X Sq$ – сила лобового сопротивления; $Y = C_Y Sq$ – подъемная сила; $q = \rho V^2/2$ – скоростной напор; S – площадь крыльев; C_x и C_y – коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы; G – сила тяжести; $X_в$, $Y_в$ – возмущения; J_z – центробежный момент инерции; $M_z = m_z bSq$ – суммарный момент аэродинамических сил; m_z – коэффициент момента тангажа; $M_{zв}$ – возмущающий момент.

Первые два уравнения системы (1) определяют силы, действующие на летательный аппарат, третье и четвертое – воздействие моментов сил относительно поперечной оси, а пятое является кинематическим уравнением, связывающим углы наклона траектории θ, тангажа ϑ и атаки α. В свою очередь, шестое и седьмое уравнения описывают движение летательного аппарата по отношению к системе координат, связанной с землей.

Разделение траекторий на типовые участки позволяет существенно упростить исходную совокупность уравнений движения летательного аппарата. Сегодня можно говорить о том, что, помимо качественного анализа полученных частных типовых моделей движения, получены экспериментальные количественные характеристики, позволяющие оценить точность подобного разделения математических моделей.

Как показывают исследования, наиболее эффективными оказываются сингулярные, в частности сингулярные периодические, режимы управления траекторным движением летательного аппарата и тягой его силовой установки, на которых оптимальная величина последней меняется в широких пределах в зависимости от параметров движения и внешних условий. Наиболее характерным с этой точки зрения является крейсерский участок траектории, который обычно бывает наиболее протяженным и длительным по времени. Он характеризуется ограниченным диапазоном изменения высоты и скорости полета. Основные задачи оптимизации сводятся в этом случае к максимизации дальности полета при минимальном расходе топлива. Если снять ограничения на постоянную высоту полета, то максимальный выигрыш обеспечивают периодические по форме крейсерские режимы, состоящие из участков набора высоты при больших значениях тяги и последующего снижения при малой или нулевой тяге. При этом сингулярные (особые) участки траектории соответствуют минимальным затратам топлива на единицу дальности. В качестве показателя расхода топлива обычно используется критерий производительности

$$J = m_T(x_l)/x_l\,, \tag{2}$$

где m_T – потребляемое топливо; x_l – длина вдоль горизонтали одного периода траектории.

Применительно к одному периоду, уравнения движения можно выразить относительно горизонтальной координаты x

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= \frac{P\cos\alpha - X - G\sin\theta}{mV\cos\theta}; \\ \frac{d\theta}{dx} &= \frac{P\sin\alpha + Y - G\cos\theta}{mV^2\cos\theta}; \\ \frac{dH}{dx} &= \mathrm{tg}\theta;\ \ \frac{dm_T}{dx} = \frac{m_T}{V\cos\theta}. \end{aligned} \tag{3}$$

Зависимость расхода топлива и модель управления тягой выражаются в функции от следующих параметров: скорости V, высоты H, положения дросселя (ручки управления двигателем) δ и удельного расхода топлива на реализацию единицы тяги при полностью открытом дросселе σ

$$\begin{aligned} &P(V,H,\delta) = \delta P_{\max}(V,H); \\ &m_T = m_{T0} + \sigma(V)\delta P_{\max}(V,H). \end{aligned} \tag{4}$$

Периодический характер траектории соответствует выполнению условий: $V(x_l) = V(0)$; $\theta(x_l) = \theta\,(0)$; $H(x_l) = H(0)$; кроме того $m_T\,(0) = 0$.

Задача периодического управления состоит в определении зависимости C_y и δ, которые минимизируют критерий J при сформулированных ограничениях и $C_{y\min} \le C_y \le C_{y\max}$; $0 \le \delta \le 1$. Гамильтониан для поставленной задачи оптимизации имеет вид

$$W = \lambda_1\frac{P\cos\alpha - X - G\sin\theta}{mV\cos\theta} + \lambda_2\frac{P\sin\alpha + Y - G\cos\theta}{mV^2\cos\theta} + \\ + \lambda_3 tg\theta + \lambda_4\frac{m_{T0} + \sigma P}{V\cos\theta}.$$

Особая дуга траектории существует, если на конечном интервале x выполняются равенства

$$\begin{aligned} &\partial[dS(y,\lambda,C_y,\delta)/dx]/\partial\delta = 0; \\ &S(y,\lambda,C_y,\delta) = 0; \\ &\partial[d^2S(y,\lambda,C_y,\delta)/dx^2]/\partial\delta \ne 0; \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$y=[V;\theta;H;m_T]^T;\ \lambda=[\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3;\lambda_4]^T;$$
$$S(y,\lambda,C_y,\delta)=\partial W(y,\lambda,C_y,\delta)/\partial\delta.$$

В настоящее время удалось получить только численные решения этих уравнений. Наиболее существенная для нашего анализа оценка эффективности сингулярного управления крейсерским режимом состоит в том, что сокращение расхода топлива в зависимости от ситуации может достигать 35%.

Таким образом, существующие методы позволяют рассчитать оптимальные программы управления параметрами траекторного движения летательного аппарата, что может служить основой для формирования гибких траекторий полета. Однако для их реализации необходимо, чтобы система управления полетом сохраняла устойчивость для широкого диапазона режимов и условий полета. Рассмотрим методику исследования устойчивости систем данного класса на основе оценки и задания областей притяжения.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим обобщенную форму записи уравнений возмущенного движения летательного аппарата в следующем виде

$$\dot{x}(t)=X(x,t),\quad \mathrm{X}(0,t)=0. \qquad (6)$$

Считаем, что функции $X_i(x_1,\ \dots,\ x_n,\ t)$, $i=\overline{1,n}$ определены и непрерывны в некоторой области G пространства $x\in R^n$ при всех значениях $t\geq 0$. Будем также предполагать, что в каждой замкнутой области $\overline{G}_\delta\subset G$ функции X_i удовлетворяют условиям Липшица по переменным x_j, т. е.

$$\left|X_i\left(x^{(0)},t\right)-X_i\left(x^{(1)},t\right)\right|\leq L_\delta \sup\left(\left|x_i^{(0)}-x_i^{(1)}\right|\right),$$
$$L_\delta=\mathrm{const},\ i=\overline{1,n}.$$

Наибольшую область начальных отклонений $x(0)$, при которых решения системы (6) являются асимптотически устойчивыми, называют областью притяжения (Ω) этой системы, т.е. устойчивые решения, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned}&x(x_0,t_0,t)\in\Omega,\quad \forall t\geq t_0;\\&\lim_{t\to\infty}\|x(x_0,t_0,t)\|=0,\quad \forall x_0\in\Omega,\end{aligned} \qquad (7)$$

принадлежат области притяжения нулевого положения равновесия системы (6).

Если для системы (6) определена область притяжения, то система асимптотически устойчива в большом. Если область притяжения распространяется на все пространство R^n, т. е. решения системы удовлетворяют условиям (6) для всех начальных условий $x_0\in R^n$, то система асимптотически устойчива в целом.

Отыскание области притяжения является весьма важной и в то же время трудной задачей. Эффективные вычислительные методы предложены только для систем низкого порядка. Для систем высокого порядка область притяжения в общем виде построить не удается. Поэтому используют оценки этой области, большинство из которых базируется на втором методе Ляпунова. С этой целью воспользуемся линеаризованной моделью следующего вида

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+X_1(x,t),\quad X_1(0,t)=0, \qquad (8)$$

где $X_1(x,t)$ – совокупность только нелинейных членов выше первого порядка малости относительно $x(t)$.

Пусть собственные числа матрицы A системы (8) располагаются в левой полуплоскости комплексной плоскости. Тогда производная положительно определенной квадратичной формы $V(x)=x^TPx$ будет определенно отрицательной в некоторой окрестности Ω начала координат пространства состояний этой системы. Если в эту окрестность вписать поверхность $V(x)=R$, то область $V(x)\leq R$ может служить оценкой Ω_R области притяжения нулевого положения равновесия системы (8). Оптимальная оценка области притяжения может быть получена как результат решения задачи условной оптимизации следующего вида: требуется найти максимум функции Ляпунова $V(x)$, производная которой допускает бесконечно малый высший предел в некоторой области начала координат, при условии, что $V'(x)\leq 0$. Таким образом,

$$\Omega_R=\{x:\ \ \max V(x),\ \text{при}\ V'(x)\leq 0\}. \qquad (9)$$

При решении задачи (9) необходимо учитывать следующее обстоятельство. Вид области Ω_R существенно зависит от характера распределения собственных чисел матрицы P. Если величины абсолютных значений наибольшего и наименьшего собственных чисел этой матрицы существенно отличаются, то оценка области притяжения будет иметь вид вытянутого эллипсоида. Тогда допустимые пределы начальных условий для различных переменных состояния, принадлежащих области притяжения, также будут сильно отличаться. Пусть модули наибольшего и наименьшего собственных чисел матрицы P равны соответственно ρ_{max} и ρ_{min}. В этом случае для оценки области притяжения справедливо следующее выражение

$$\Omega_R = \sqrt{\rho_{\min}/\rho_{\max}}\,\Omega. \qquad (10)$$

Таким образом, для малых значений величины $\sqrt{\rho_{\min}/\rho_{\max}}$ оценка будет существенно отличаться от действительной области притяжения. Чтобы улучшить оценку, необходимо выбирать матрицу P с незначительным разбросом собственных чисел.

Кроме того, если собственные числа матрицы квадратичной формы $V(x)$ имеют большой разброс, то эта функция оказывается сильно вытянутой вдоль направления наибольшего собственного вектора, и численные методы поиска экстремума (9) медленно сходятся. Имеет место так называемый эффект оврагов. Поэтому и с этой точки зрения более предпочтительной является матрица квадратичной формы, у которой наибольшее и наименьшее значения собственных чисел отличаются незначительно.

С этой целью предлагается использовать каноническую форму функции Ляпунова

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 x_i^2. \qquad (11)$$

Однако, как показали исследования [2, 3], форма (11) гарантирует отрицательную определенность производной $V'(x)$ только для случая простых вещественных собственных чисел матрицы A системы (8).

Применительно к кратным вещественным и комплексным числам этой матрицы предлагаются специальные виды эквивалентных преобразований $y = Mx$, в результате которых оказывается возможным использование канонической формы записи функции Ляпунова в новом базисе

$$W(y) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2 y_i^2. \qquad (12)$$

Так в случае вещественного собственного числа λ_k матрицы системы (8) кратности, равной m_k, предлагается использовать следующее преобразование, обеспечивающее «растяжение» переменных состояния исходной системы

$$y_{m_k} = x_{m_k},\ y_{m_k-1} = a_{m_k-1}x_{m_k-1}, \ldots,$$
$$y_1 = a_1 a_2 \cdots a_{m_k-1} x_1.$$

В результате получаем следующую каноническую форму записи для линейной части системы (8)

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= \lambda_k y_1 + a_1 y_2;\\
\dot{y}_2 &= \lambda_k y_2 + a_2 y_3;\\
&\cdots\\
\dot{y}_{m_k} &= \lambda_k y_{m_k}.
\end{aligned} \qquad (13)$$

Введение такого преобразования не изменяет собственные числа матрицы линейной части исходной системы, поскольку ненулевые недиагональные элементы матрицы коэффициентов системы (13) не влияют на их собственные числа, так как эти матрицы являются треугольными.

В результате в качестве функции Ляпунова можно выбрать каноническую квадратичную форму $W(y) = \sum_{i=1}^{m_k} y_i^2$, производная которой в силу уравнений (13) будет определенно отрицательной.

В случае комплексного собственного числа $\lambda_k = \alpha_k + j\beta_k$ кратности m_k, существует и комплексно сопряженное собственное число $\overline{\lambda}_k = \alpha_k - j\beta_k$ той же кратности. Каноническая форма Жордана над полем комплексных чисел для линеаризованной части системы, соответствующая этим собственным значениям, будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \lambda_k x_1 + x_2; & \dot{x}_{m_k+1} &= \overline{\lambda}_k x_{m_k+1} + x_{m_k+2};\\
\dot{x}_2 &= \lambda_k x_2 + x_3; & \dot{x}_{m_k+2} &= \overline{\lambda}_k x_{m_k+2} + x_{m_k+3};\\
&\cdots & &\cdots\\
\dot{x}_{m_k} &= \lambda_k x_{m_k}; & \dot{x}_{2m_k} &= \overline{\lambda}_k x_{2m_k}.
\end{aligned} \qquad (14)$$

Проведя замену переменных

$$\begin{aligned}
&y_1 = a_1 x_1;\ y_2 = a_2 x_2;\ \ldots;\ y_{m_k} = a_{m_k} x_{m_k};\\
&y_{m_k+1} = a_{m_k+1} x_{m_k+1};\ y_{m_k+2} = a_{m_k+2} x_{m_k+2};\ \ldots;\\
&y_{2m_k} = a_{2m_k} x_{2m_k},
\end{aligned} \qquad (15)$$

получаем преобразованную систему, аналогичную (13)

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= \lambda_k y_1 + \frac{a_1}{a_2} y_2; & \dot{y}_{m_k+1} &= \overline{\lambda}_k y_{m_k+1} + \frac{a_1}{a_2} y_{m_k+2};\\
\dot{y}_2 &= \lambda_k y_2 + \frac{a_2}{a_3} y_3; & \dot{y}_{m_k+2} &= \overline{\lambda}_k y_{m_k+2} + \frac{a_2}{a_3} y_{m_k+3};\\
&\cdots & &\cdots\\
\dot{y}_{m_k} &= \lambda_k y_{m_k}; & \dot{y}_{2m_k} &= \overline{\lambda}_k y_{2m_k}.
\end{aligned}$$

Однако на практике часто требуется выполнение более жестких условий устойчивости системы. В частности, требуется, чтобы система была экспоненциально устойчивой. Покажем, что предложенный подход к оценке области притяжения может быть распространен и на случай экспоненциальной устойчивости.

Пусть правые части $X_i(x,t)$, $i=\overline{1,n}$, системы (6) имеют ограниченные частные производные, т. е. удовлетворяют неравенству

$$\left|\partial X_i(x,t)/\partial x_j\right| \le L,\ i,j=\overline{1,n} \tag{16}$$

при всех $\|x\| < \infty$. Тогда условие экспоненциальной устойчивости

$$\left\|x(t,x_0,t_0)\right\| \le B\left\|x_0\right\| e^{-\alpha(t-t_0)},\ \forall t \ge 0 \tag{17}$$

равносильно существованию функции $V(x,t)$, удовлетворяющей следующим ограничениям

$$\begin{gathered} c_1\|x\| \le V(x,t) \le c_2\|x\|; \\ \left(\frac{dV}{dt}\right) \le -c_3\|x\|; \quad \left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right| \le c_4\|x\|;\ i=\overline{1,n}, \end{gathered} \tag{18}$$

где $c_1, \ldots, c_4$ – положительные постоянные.

С учетом сделанных допущений оценка области притяжения $\Omega : \|x\| \le R$ имеет вид

$$\Omega_R : \|x\| \le \frac{c_1}{c_2} R. \tag{19}$$

По своей структуре выражение (19) оказывается аналогичным (10). И в данном случае для малых значений величины (c_1/c_2) оценка будет существенно отличаться от действительной области притяжения.

Таким образом, достоверность рассмотренных оценок областей притяжения во многом зависит от свойств исследуемой системы. В некоторых случаях их достоверность можно существенно увеличить за счет выбора соответствующего базиса переменных состояния. Однако при решении практических задач гораздо важнее бывает найти условия, при выполнении которых область притяжения исследуемой системы будет иметь заданную конфигурацию. Рассмотрим ряд таких условий, вывод которых базируется на концепции сверхустойчивости динамических систем.

3. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассмотрим случай, когда область притяжения Ω задается в виде многомерного параллелепипеда в пространстве состояний исследуемой системы

$$p_i \le x_i \le q_i, \quad i=\overline{1,n}. \tag{20}$$

Чтобы найти соотношения, при выполнении которых система (6) будет устойчивой в области (20), построим интервальную линеаризованную модель следующего вида

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + X(x,t), \quad X(0,t)=0. \tag{21}$$

Здесь интервальная матрица $\tilde{A} \in M_{n\times n}(I(R))$, $\tilde{A} = \left[\tilde{a}_{ij}\right]_{n\times n}$, где $M_{n\times n}(I(R))$ – множество матриц, элементами которых являются вещественные интервалы $I(R)$; $\tilde{a}_{ij} = \left[\underline{a}_{ij}; \overline{a}_{ij}\right]$ – интервальные элементы этой матрицы, нижние и верхние границы которых вычисляются следующим образом

$$\underline{a}_{ij} = \min_{x\in\Omega} a_{ij}; \quad \overline{a}_{ij} = \max_{x\in\Omega} a_{ij};\ \text{где}\ i,j=\overline{1,n}.$$

Используя модель (21), сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 1. Область (20) пространства состояний системы (6) является областью притяжения, если

$$\sigma(A) = \min_i \left(-\overline{a}_{ii} - \sum_{j\ne i} \max\left\{\left|\underline{a}_{ij}\right|; \left|\overline{a}_{ij}\right|\right\} \right) > 0; \quad i=\overline{1,n}. \tag{22}$$

Доказательство этого утверждения базируется на применении условия свехустойчивости, введенного в работах [4, 5], для наихудшей с точки зрения устойчивости матрицы A^* среди всех матриц, элементы которых ограничены заданными интервалами $\tilde{a}_{ij} = \left[\underline{a}_{ij}; \overline{a}_{ij}\right]$

$$\begin{gathered} a^*_{ii} = \overline{a}_{ii};\ a^*_{ij} = \max\left\{\left|\underline{a}_{ij}\right|; \left|\overline{a}_{ij}\right|\right\}, \\ i,j=\overline{1,n};\ i \ne j. \end{gathered} \tag{23}$$

Действительно, система является сверхустойчивой, если для ее матрицы $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ выполняется условие

$$\sigma(A) = \min_i \left(-a_{ii} - \sum_{j\ne i}\left|a_{ij}\right| \right) > 0. \tag{24}$$

Условие сверхустойчивости (24) непосредственно вытекает из теоремы Гершгорина, согласно которой каждое из собственных значений матрицы A лежит по крайней мере в одном из кругов

$$\left|z - a_{ii}\right| \le \sum_{j\ne i}\left|a_{ij}\right|,\ i=\overline{1,n},$$

комплексной плоскости. В самом деле, пусть μ – некоторое собственное значение матрицы A, а x – соответствующий ему собственный вектор. Тогда

$$Ax = \mu x,\ \text{или}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \mu x_i,\ i=\overline{1,n}.$$

Если $\left|x_k\right| = \max_i \left|x_i\right|$, то тогда

$$|\mu - a_{kk}||x_k| = \left|\sum_{j\neq k} a_{kj} x_j\right| \leq \sum_{j\neq k}|a_{kj}||x_j| \leq |x_k|\sum_{j\neq k}|a_{kj}|.$$

Поскольку $|x_k| \neq 0$, то отсюда следует $|\mu - a_{kk}| \leq \sum_{j\neq k}|a_{kj}|$. Таким образом, для локализации собственного числа μ в левой полуплоскости комплексной плоскости требуется, чтобы расстояние $-a_{kk}$ от мнимой оси до центра круга было больше его радиуса $\sum_{j\neq k}|a_{kj}|$, т. е.

$$-a_{kk} > \sum_{j\neq k}|a_{kj}|, \text{ или } -a_{kk} - \sum_{j\neq k}|a_{kj}| > 0.$$

Если подобное неравенство будет выполняться для минимальной величины

$$\sigma(A) = \min_i\left(-a_{ii} - \sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right) > 0,$$

то в остальных случаях оно будет выполняться заведомо.

В свою очередь, чтобы аналогичное неравенство выполнялось для интервальной матрицы, достаточно потребовать его выполнения для минимального расстояния от мнимой оси до центра круга $a_{ii}^* = \overline{a}_{ii}$ и для максимально возможного радиуса $a_{ij}^* = \max\{|\underline{a}_{ij}|; |\overline{a}_{ij}|\}$. Что завершает доказательство утверждения.

Однако следует отметить, что условие сверхустойчивости, непосредственно базирующееся на теореме Гершгорина, в ряде случаев накладывает слишком жесткие ограничения на параметры исследуемой системы. Более гибким представляется результат, основанный на теореме Фань Цзы.

Пусть имеется неотрицательная матрица $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ такая, что $\max\{|\underline{a}_{ij}|; |\overline{a}_{ij}|\} \leq b_{ij}$ и μ – максимальное характеристическое число этой матрицы. Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Область (20) пространства состояний системы (6) является областью притяжения, если

$$\sigma(A) = \min_i\left(-\overline{a}_{ii} - \mu + b_{ii}\right) > 0;\ i = \overline{1,n}. \quad (25)$$

Доказательство. Рассмотрим собственный вектор $\lambda_\mu = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ матрицы B, соответствующий числу μ. Для этого вектора справедливо соотношение $\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\lambda_j = \mu\lambda_i$, $i = \overline{1,n}$. Далее, согласно свойствам матрицы B, имеет место неравенство

$$\frac{1}{\lambda_i}\sum_{j\neq i}\max\{|\underline{a}_{ij}|; |\overline{a}_{ij}|\}\lambda_j \leq \frac{1}{\lambda_i}\sum_{j\neq i} b_{ij}\lambda_j.$$

Преобразуем правую часть этого неравенства следующим образом

$$\frac{1}{\lambda_i}\sum_{j\neq i} b_{ij}\lambda_j = \frac{1}{\lambda_i}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\lambda_j - \frac{1}{\lambda_i} b_{ii}\lambda_i = \frac{1}{\lambda_i}\mu\lambda_i - b_{ii} = \mu - b_{ii}.$$

Рассмотрим теперь матрицу вида $(\lambda_\mu)^{-1} A^* \lambda_\mu$. Согласно теореме Гершгорина каждое из собственных чисел этой матрицы лежит по крайней мере в одном из кругов

$$|z - \overline{a}_{ii}| \leq \frac{1}{\lambda_i}\sum_{j\neq i}\max\{|\underline{a}_{ij}|; |\overline{a}_{ij}|\}\lambda_j.$$

Или $|z - \overline{a}_{ii}| \leq \mu - b_{ii}$. Откуда непосредственно следует (25).

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Предложен способ повышения эффективности применения летательных аппаратов за счет формирования гибких траекторий полета, оптимальных с точки зрения использования расходуемых ресурсов.

Показано, что для оценки устойчивости автоматической бортовой системы управления, способной управлять всеми фазами полета от взлета до посадки, целесообразно использовать подход, предусматривающий исследование области притяжения подобной системы.

Разработана методика оптимальной оценки области притяжения системы управления за счет выбора соответствующих функций Ляпунова.

Получены условия, при выполнении которых область притяжения имеет заданную конфигурацию в пространстве состояний исследуемой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ефанов, В. Н.** Пути повышения эффективности применения летательных аппаратов на базе быстросчетных моделей и средств искусственного интеллекта / В. Н. Ефанов, С. Д. Бодрунов // Мир авионики : ежекварт. журнал корпорации «Аэрокосмическое оборудование». 2002. № 2. С. 33–36.

2. **Акчурин, Р. Р.** Оценка области притяжения нелинейных систем построением канонической квадратичной формы / Р. Р. Акчурин // Аспирант и соискатель. № 2 (33). 2006. С. 232–237.

3. **Акчурин, Р. Р.** Об одном приеме построения квадратичной формы с переменными коэффициентами для исследования устойчивости нестационарных систем / Р. Р. Акчурин // Аспирант и соискатель. 2006. № 3 (34). С. 203.

4. **Поляк, Б. Т.** Сверхустойчивые линейные системы управления. I: Анализ / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков // АиТ. 2002. № 8. С. 37–53.

5. **Поляк, Б. Т.** Сверхустойчивые линейные системы управления. II: Синтез / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков // АиТ. 2002. № 11. С. 56–75.

6. **Polyak, B.** Superstable control systems / B. Polyak, M. Sznaier, M. Halpern, P. Scherbakov // Proc. 15th IFAC World Congress. Barcelona, Spain. 2002. P. 799–804.

ОБ АВТОРАХ

Акчурин Ришад Рашидович, вед. инженер ООО «Экопластик» (Уфа). Дипл. инж.-электромех. по авиац. приборам и изм.-выч. комплексам (УАИ, 1991). Иссл. в обл. эффективности применения сложных техн. систем с летательн. аппаратами

Ефанов Владимир Николаевич, проф., зав. каф. авиац. приборостроения. Дипл. инженер электр. техники (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по управл. в техн. системах (УГАТУ, 1995). Иссл. в обл. создания интеллектуализированных комплексов бортового оборудования.