Уфа : УГАТУ, 2009 Вестник УГАТУ • Управление, ВТ и И Т. 12, № 1(30). С. 146–150

УДК 519.6:532

О. С. БОРЩУК

О МОДИФИКАЦИИ ДВУХСТУПЕНЧАТОГО МЕТОДА ПРЕДОБУСЛАВЛИВАНИЯ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Для решения линейной системы, возникающей при численном моделировании многофазной фильтрации вязкой сжимаемой смеси в пористой среде, рассмотрен предобуславливатель CPR. Предложена модификация предобуславливателя CPR на основе декомпозиции расчетной области на устойчивую и неустойчивую при фиксированном временном шаге и неявной дискретизации по времени. Проведено сравнение эффективности предобуславливателей CPR и ACPR на реальных двух и трехфазных задачах. *Фильтрация ; предобуславливатель ; пористая среда ; линейная система*

ВВЕДЕНИЕ

Задача полномасштабного гидродинамического моделирования процессов нефтегазодобычи сопряжена с ресурсоемкими вычислениями, кроме того, размеры моделей постоянно увеличиваются. Так, еще 5–6 лет назад большинство гидродинамических моделей содержало не более 100 тысяч ячеек, теперь же средний размер модели достигает 1 млн ячеек и более. С учетом роста размерности моделей особую роль играет эффективность методов решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений большой размерности, тем более, что процент времени решения линейной системы в общем времени расчета составляет от 80% до 90%.

В статье предложена модификация предобуславливателя CPR, который совместно с каким либо методом подпространства Крылова, является одним из самых быстрых при решении линейных систем в пакетах гидродинамического моделирования залежей углеводородов. Тестирование нового метода проводилось на 2-х и 3-х фазных моделях и показало преимущество в скорости в среднем на 20%, в количестве требуемой оперативной памяти на 35–40%.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему уравнений, описывающих двухфазную фильтрацию вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде [1] (все изложенное ниже может быть продолжено на случай трехфазной фильтрации):

$$\frac{\partial M_w}{\partial t} - \nabla\left(K\lambda_w \nabla\Phi_w\right) = q_w, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial M_o}{\partial t} - \nabla\left(K\lambda_o \nabla\Phi_o\right) = q_o, \qquad (2)$$

где $M_w = \varphi\rho_w S_w$, $M_o = \varphi\rho_o(1 - S_w)$, $\lambda_p = \frac{k_{rp}}{\mu_p}\rho_p$ – мобильность фазы $p=\{o, w\}$, $\Phi_o = p - \rho_o g\nabla D$, $\Phi_w = p + p_{\mathrm{cow}} - \rho_w g\nabla D$, t – время, $\varphi = \varphi(\mathrm{p})$ – пористость, S_w – насыщенность воды, $\rho_w = \rho_w(\mathrm{p}, S_w)$, $\rho_\mathrm{o} = \rho_\mathrm{o}(\mathrm{p})$ – плотности воды и нефти, $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{xx} & & \\ & k_{yy} & \\ & & k_{zz} \end{bmatrix}$ – диагональный тензор абсолютной проницаемости, $k_{rw} = k_{rw}(S_w)$, $k_{ro} = k_{ro}(S_w)$ – относительные фазовые проницаемости воды и нефти, $\mu_w = \mu_w(p, S_w)$, $\mu_0 = \mu_o(p)$ – вязкости воды и нефти, p – давление, $p_{\mathrm{cow}} = p_{\mathrm{cow}}(S_w)$ – капиллярное давление между нефтяной и водной фазой, g – ускорение свободного падения, D – глубина и q_w, q_o – массовые плотности источников воды и нефти.

Отметим, что уравнения (1, 2) представляют собой уравнения сохранения массы для воды и нефти.

Дискретизируя уравнения (1, 2) по пространству с помощью метода конечных объемов, получим систему нелинейных уравнений:

$$V^i \frac{\overline{(M_w^i)} - (M_w^i)}{\Delta t} = \sum_{j \in N^i(\Omega)} \overline{F}_w^{i,j} + \overline{Q}_w^i, \ \forall i \in \Omega, \quad (3)$$

$$V^i \frac{\overline{(M_o^i)} - (M_o^i)}{\Delta t} = \sum_{j \in N^i(\Omega)} \overline{F}_o^{i,j} + \overline{Q}_o^i, \forall i \in \Omega, \quad (4)$$

где Ω — множество ячеек дискретной сетки, V^i – объем i-ой ячейки, $N^i(\Omega)$ – множество соседних ячеек для ячейки i, Δt – шаг по времени, Q – источник или сток, $\overline{a}$ – означает, что значение переменной (функции) a берется с нового временного слоя, $F_w^{i,j} = T^{i,j}\lambda_w^{i,j}\left(\Phi_w^j - \Phi_w^i\right)$ – поток водной фазы через границу между ячейками i и j, $F_o^{i,j} = T^{i,j}\lambda_o^{i,j}\left(\Phi_o^j - \Phi_o^i\right)$ – поток нефтяной фазы через границу между ячейками i и j, $T^{i,j}$ – проводимость между ячейками i и j (зависит от тензора $\mathbf{K}$), g – ускорение свободного падения. Отметим, что мобильности $\lambda_w^{i,j}$ и $\lambda_o^{i,j}$ вычисляется против потока.

Нелинейная система (3, 4) состоит из $2 \times n$ уравнений (n – число ячеек сетки) и $2 \times n$ неизвестных (давление и насыщенность воды в каждой ячейке). Для решения систем нелинейных алгебраических уравнений наиболее часто используется метод Ньютона. Возникающая при этом несимметричная линейная система алгебраических уравнений (матрица Якоби) представляет собой разреженную матрицу состоящую из блоков:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial R_w^i}{\partial S_w^j} & \dfrac{\partial R_w^i}{\partial p^j} \\ \dfrac{\partial R_o^i}{\partial S_w^j} & \dfrac{\partial R_o^i}{\partial p^j} \end{bmatrix}, \quad i, j \in \Omega, \qquad (5)$$

где R_w – уравнения (3), а R_o – уравнение (4).

Отметим, что в строке i линейной системы количество ненулевых блоков равно количеству соседей ячейки i плюс диагональный блок.

2. ПРЕДОБУСЛАВЛИВАТЕЛЬ CPR

Как было показано ранее, система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \qquad (6)$$

получающаяся в методе Ньютона при решении системы (3, 4) представляет собой несимметричную разреженную матрицу с блочной структурой. При этом все блоки имеют размер 2×2.

Наиболее популярными и быстрыми методами решения разреженных систем большой размерности являются методы подпространства Крылова GMRES [4] и BiCGStab [4], в которых используются различные методы предобуславливания. При этом вместо системы (6) решается эквивалентная система

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b, \qquad (7)$$

где M – матрица предобуславливателя, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\det(M) \neq 0$;
2. M^{-1} – легко вычисляема;
3. $M \approx A$.

Отметим, что скорость сходимости метода напрямую зависит от выбора предобуславливателя M.

Сложность решения рассматриваемых нами систем связана со смешанным характером исходной системы уравнений (1, 2). Так, в [1] показано, что система (1, 2) является параболической по давлению p и гиперболической по насыщенности S_w. Для упрощения будем называть гиперболическими, эллиптическими или параболическими линейные системы алгебраических уравнений полученные при дискретизации дифференциальных уравнений в частных производных соответствующего типа.

Известно, что алгебраический многосеточный метод (AMG) [3] хорошо подходит (как предобуславливатель) для решения эллиптических и параболических линейных систем, но при этом неэффективен для гиперболических систем. С другой стороны неполное LU разложение (ILU0) [4] и его модификации хороши при решении гиперболических систем, но с трудом справляются с эллиптическими и параболическими системами.

Так как линейная система имеет смешанный характер, был предложен двухступенчатый предобуславливатель Constrained Pressure Residual (CPR) [2]:

- из исходной линейной системы построить систему на давление при условии, что насыщенность меняется слабо;
- решить полученную параболическую систему на давление (первая ступень CPR), используя алгебраический многосеточный метод;
- полученное решение на давление использовать как начальное приближение для неполного LU разложения (вторая ступень CPR).

Таким образом, CPR позволяет эффективно решать рассматриваемую систему смешанного типа. Результаты численных экспериментов можно найти в [5].

В матричном виде двухступенчатый предобуславливатель может быть записан как

$$M_{1,2}^{-1} = M_2^{-1}[E - AM_1^{-1}] + M_1^{-1}, \qquad (8)$$

где M_1 и M_2 – матрицы предобуславливателей первой и второй ступени, E – единичная матрица. В случае предобуславливателя CPR (8) примет вид:

$$M_{CPR}^{-1} = M_{ILU}^{-1}[E - AM_P^{-1}] + M_P^{-1}.$$

Рассмотрим алгоритм метода CPR подробнее. Для построения системы на давление отсортируем столбцы и строки линейной системы (6) таким образом, чтобы вначале шли переменные на давление (индекс p), а потом переменные на насыщенность (индекс s):

$$\begin{bmatrix} A_{pp} & A_{ps} \\ A_{sp} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_p \\ b_s \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Предполагая, что насыщенность в ячейках меняется слабо и не зависит от соседних ячеек, исключим из A_{ps} все недиагональные элементы $D_{ps}=D(A_{ps})$, то же самое проделаем и с A_{ss}, то есть $D_{ss}=D(A_{ss})$. С учетом этого приближения система (9) примет вид

$$\begin{bmatrix} A_{pp} & D_{ps} \\ A_{sp} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_p \\ b_s \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Далее, так как D_{ss} – диагональная матрица, а следовательно, D_{ss}^{-1} легко вычисляема, выразим x_s из второго матричного уравнения системы (10)

$$x_s = D_{ss}^{-1}b_s - D_{ss}^{-1}A_{sp}x_p \qquad (11)$$

и подставив это выражение в первое матричное уравнение системы (10) получим систему на давление:

$$(A_{pp} - D_{ps}D_{ss}^{-1}A_{sp})x_p = b_p - D_{ps}D_{ss}^{-1}b_s,$$

или

$$A_p x_p = r_p.$$

В матричном виде систему на давление можно представить как $A_p = C^T NAC$, где $C^T = [E \quad 0]$, $N = \begin{bmatrix} E & -D_{ps}D_{ss}^{-1} \\ 0 & E \end{bmatrix}$, а матрицу предобуславливателя M_p как $M_P^{-1} = CA_p^{-1}C^T N$.

Пусть нам надо решить $M_{CPR}x = b$ (или $x = M_{CPR}^{-1}b$), тогда алгоритм будет следующим:

1) $r_p = b_p - D_{ps}D_{ss}^{-1}b_s$ ($r_p = C^T Nb$) – расчет правой части для системы на давление;

2) $A_p = A_{pp} - D_{ps}D_{ss}^{-1}A_{sp}$ ($A_p = C^T NAC$) – построение системы на давление;

3) $A_p\delta x_p = r_p$ – решение системы на давление;

4) $\delta x = (\delta x_p, 0)^T$ ($\delta x = C\delta x_p$) – расширение вектора δx_p;

5) $b = b - A\delta x$ – обновление правой части;

6) $M_{ILU}x = b$ – решение системы, где $M_{ILU} = ILU0(A)$ матрица неполного LU разложения для A;

7) $x = x + \delta x$ – коррекция решения.

Отметим, что в пункте 4 алгоритма не используется выражение переменных x_s через переменные x_p, это связано с нестабильностью получаемых при этом результатов вблизи источников, стоков или фронта вытеснения.

3. ПРЕДОБУСЛАВЛИВАТЕЛЬ ACPR

При всех преимуществах предобуславливателя CPR (быстрая сходимость, фактически линейный рост времени решения в зависимости от размерности задачи) он обладает одним существенным недостатком. Этим недостатком является повышенное требование к объему оперативной памяти. Так, для решения системы с использованием предобуславливателя CPR требуется в среднем в 1,5–2,0 раза больше оперативной памяти, чем при использовании предобуславливателя ILU0.

В данном разделе предложена модификация предобуславливателя CPR, названная ACPR (Adaptive Constrained Pressure Residual), которая позволяет сократить затраты оперативной памяти, а также уменьшить общее время построения решения.

Основная идея ACPR состоит в разделении всего множества ячеек сетки Ω на два непересекающихся подмножества Ω_e и Ω_i, где Ω_e – множество ячеек, для которых решение на насыщенность может быть получено из решения на давление с использованием формулы (11), а $\Omega_i = \Omega/\Omega_e$ – все оставшиеся ячейки. Так как решение на давление мы получаем на первом шаге предобуславливателя CPR, то для ячеек из множества Ω_e строить неполное LU разложение не требуется. Таким образом, матрица предобуславливателя M_{ILU} строится не на основе матрицы A, а на основе матрицы A', которая получается из матрицы A по следующим правилам:

- если $i \in \Omega_i$ и $j \in \Omega_i$, то $a'_{i,j} = a_{i,j}$;
- если $i \in \Omega_i$ и $j \in \Omega_e$, то $a'_{i,j} = 0$;
- если $i = j$ и $i \in \Omega_e$, то $a'_{i,j} = a_{i,j}$;
- если $i \in \Omega_e$ и $i \neq j$, то $a'_{i,j} = 0$.

Здесь i – индекс строки, j – индекс столбца, $a'_{i,j}$ и $a_{i,j}$ – блоки матриц A и A' соответственно.

Для разделения множества Ω на множества Ω_i и Ω_e будем использовать критерий CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) [6] (в русскоязычной литературе число Куранта). Критерий CFL является критерием устойчивости явной схемы дискретизации по времени для гиперболических дифференциальных уравнений, и позволяет определить величину шага по времени, при котором решение является устойчивым. Для случая уравнений многофазной фильтрации в пористых средах, величина CFL для ячейки *i* вычисляется по формуле:

$$CFL^i = \max(CFL^i_w, CFL^i_o), \tag{12}$$

где

$$\text{CFL}^i_w = \Delta t \Delta \text{p}^i \lambda^i_w \cdot \max\left(\frac{k^i_{xx}}{\Delta x^i}, \frac{k^i_{yy}}{\Delta y^i}, \frac{k^i_{zz}}{\Delta z^i}\right), \quad \text{а}$$

$$\text{CFL}^i_o = \Delta t \Delta p^i \lambda^i_o \cdot \max\left(\frac{k^i_{xx}}{\Delta x^i}, \frac{k^i_{yy}}{\Delta y^i}, \frac{k^i_{zz}}{\Delta z^i}\right).$$

Если выполнено условие $\text{CFL}^i \leq 1$, то ячейка *i* является устойчивой.

Будем выбирать множество Ω_e по следующему алгоритму:

1) $\Omega_e = \Omega$,

2) $\Omega_e = \Omega_e / \{i : |Q^i_w| + |Q^i_o| > 0\}$ – убрать все ячейки в которых есть источник или сток,

3) $\Omega_e = \Omega_e / \{i : CFL^i > 1\}$ – убрать все ячейки для которых не выполнено условие CFL.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные результаты получены в пакете гидродинамического моделирования трехфазных пластовых систем углеводородов «BOS» нефтяной компании Роснефть.

При тестировании были использованы следующие гидродинамические модели:

1) двухфазная модель SPE10 – 1122000 ячеек, 4 добывающих скважины, 1 нагнетательная;

2) трехфазная модель – около 850000 ячеек, 83 добывающих скважины, 17 нагнетательных.

Полученные результаты представлены в таблице (1)

Таблица 1

Результаты замеров, где N_t – число временных шагов, N_n – число Ньютоновских итераций, N_l – число линейных итераций, T – общее время решения линейных систем, V_m – объем оперативной памяти

		Модель 1 2-х фазная	Модель 2 3-х фазная
	N_t	408	163
	N_n	1235	540
CPR	N_l	3879	2371
	T (минут)	348	403
	V_m (ГБ)	1,25	1,89
ACPR	N_l	3886	2399
	T (минут)	276	268
	V_m (ГБ)	0,83	1,08

При этом доля ячеек множества Ω_e относительно множества Ω составила для 2-х фазной модели 3%, а для 3-х фазной 4,5%.

Отметим, что все результаты представленные в таблице (1) получены при следующем условии выхода из итерационного метода решения систем линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\|b - Ax\|_{L_2}}{\|b\|_{L_2}} < 10^{-4}.$$

ВЫВОДЫ

Предложена модификация предобуславливателя CPR, позволяющая сократить время решения разряженных систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при гидродинамическом моделировании залежей углеводородов, на 20% и объема требуемой оперативной памяти на 35–40%. Проведено тестирование предложенного алгоритма на 2-х и 3-х фазных задачах. Отметим, что при наличии в моделях свободного газа и больших градиентах по давлению, эффективность метода ACPR падает, так как при этом доля ячеек множества Ω_e, возрастает. В худшем случае $\Omega_e = \Omega$ и предобуславливатель ACPR становится эквивалентен предобуславливателю CPR.

Отличительной особенностью метода ACPR является его способность адаптироваться под условия в течении всего процесса численного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aziz, K.** Pertoleum reservoir simulation / K. Aziz, A. Settari. Blitzprint Ltd., 2002. 480 p.

2. **Wallis, J. R.** Constraint residual acceleration of conjugate residual Method / J. R. Wallis, R. P. Kendall, T. E. Little // SPE 13536, 1985.

3. **Stuben, K.** Algebraic multigrid (AMG): An introduction with applications / K. Stuben // GDM Report 53, 03.1999.

4. **Saad, Y.** Iterative methods for sparse linear systems / Y. Saad, 2002.

5. **Behie, A.** Comparison of nested factorization, constrained pressure residual, and incomplete factorization preconditionings / A. Behie // SPE 13531-MS, 1985.

6. **Coats, K. H.** A note on IMPES and some IMPES based simulation models / K. H. Coats // SPE 65092, 2000.

ОБ АВТОРЕ

Борщук Олег Сергеевич, асп. каф. математики. Дипл. магистр прикл. математики и информатики (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. числ. моделир-я течения вязких, сжимаемых многофазн. жидкостей в пористой среде.