

ЭЛЕКТРОНИКА, ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА • ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ  
И УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

УДК 519.8:531

Н. Г. ЧИКУРОВ

СИНТЕЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОАНАЛОГИЙ

Разработаны исходные положения, подходы и технология математического моделирования методом электроанalogий. Даны примеры построения имитационных моделей механических систем на основе метода электроанalogий. *Математическое моделирование ; метод электроанalogий ; электромеханические аналогии ; метод имитационного моделирования ; моделирование механических систем*

ОСОБЕННОСТИ  
МЕТОДА ЭЛЕКТРОАНАЛОГИЙ

С появлением электротехники в ней стали широко применяться электрические схемы в качестве наглядных образов исследуемых объектов. Электрические схемы глубоко изучены. В отличие от механической энергии электрическая энергия передается в электрических цепях посредством ветвей, содержащих резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности и др., а перераспределяется электрическая энергия между ветвями посредством узлов. Поэтому электрические процессы можно исследовать с помощью известных понятий: электрического тока, напряжения, э.д.с. Математическое описание электрических процессов часто совпадает с описанием процессов в объектах иной физической природы. В связи с этим появляется возможность заменить исследования в неэлектрических системах исследованиями явлений в электрических цепях [1], [2]. В литературе сравниваются компонентные уравнения различных видов систем (таблица 1) и показывается их динамическая аналогия [1], [2], [3], [4], [5]. Известны построенные методом электроанalogий математические модели простейших технических устройств [5], [6].

Чтобы расширить применение метода электроанalogий для моделирования технических объектов, необходимо выявить и оценить особенности метода электроанalogий, а также разработать подходы и технологию математического моделирования этим методом.

Обратимся к механическим системам. Метод электроанalogий не сводится к простой замене законов механики законами электротехники. Такая замена в общем случае невозможна. Например, чтобы построить электромеханическую модель движения твердого тела вокруг неподвижной точки, необходимо рассматривать векторную функцию изменения момента количества движения и тензор инерции, определяющие динамику твердого тела [2]. При движении такого тела его моменты инерции и центробежные моменты инерции в неподвижной системе координат будут переменными величинами, так как тело при своем движении изменяет свое положение относительно этих осей. Законы электрических цепей математически выражаются скалярными функциями и в этом смысле не могут полностью заменить законы теоретической механики. Это не означает, что метод электроанalogий нельзя использовать для моделирования движений твердого тела вокруг неподвижной точки. В данном случае содержащиеся в электрических цепях индуктивности, которые эквивалентны моментам инерции твердого тела относительно координатных осей, должны быть переменными. Изменение этих индуктивностей во времени определяется законами теоретической механики.

Концепция метода электроанalogий основана на том, что этот метод добавляет к законам теоретической механики законы электротехники. Это позволяет расширить представление о происходящих явлениях и формализовать синтез математических моделей сложных механических систем. Отметим основные аспекты данной концепции.

Первый аспект – возможность применения для решения задач электротехники законов Кирхгофа. Они дают электрическим моделям значительное преимущество перед моделями иной физической природы, так как в других областях техники нет законов, полностью адекватных законам Кирхгофа. Это замечание, прежде всего, относится к механическим объектам, которые обычно представляют в виде структурно-кинематических схем. Кинематическая схема характеризует одновременно геометрию механизма и его движение, что затрудняет топологическое представление механических систем.

Таблица 1  
Компонентные уравнения

Вид системы	Тип компонента		
	инерционный	диссипативный	упругий
Механическая поступательная	$F_u = m \frac{dv_u}{dt}$	$F_\partial = \mu \cdot v_\partial$	$F_y = \frac{1}{g} \int v_y dt$
Механическая вращательная	$M_u = J \frac{d\omega_u}{dt}$	$M_\partial = \mu \cdot \omega_\partial$	$M_y = \frac{1}{g} \int \omega_y dt$
Гидравлическая	$P_u = m_z \frac{dQ_u}{dt}$	$P_\partial = \mu_z \cdot Q_\partial$	$P_y = \frac{1}{g_z} \int Q_y dt$
Тепловая	–	$T_\partial = \mu_T \cdot \Phi_\partial$	$T_y = \frac{1}{C_T} \int \Phi_y dt$
Электрическая	$U_u = L \frac{di_u}{dt}$	$U_\partial = R \cdot i_\partial$	$U_y = \frac{1}{C} \int i_y dt$

Наиболее сложно в механике применить аналог первого закона Кирхгофа, в соответствии с которым сумма токов в узле электрической схемы равна нулю. Продифференцировав уравнение токов в узле, получим важное следствие, вытекающее из первого закона Кирхгофа: сумма производных токов (применительно к механике – ускорений) в узле также равна нулю. Данное утверждение в терминах механики не столь очевидно, как в электротехнике.

Второй аспект – применение в эквивалентных электрических схемах замещения идеальных трансформаторов как с постоянными, так

и с переменными коэффициентами трансформации. Трансформатор с переменным коэффициентом трансформации (случаи плоских криволинейных и пространственных движений тел) представляет собой амплитудный модулятор напряжений, токов и производных токов. Математическое описание таких объектов уравнениями механики затруднительно.

Третьим аспектом концепции метода электроаналогий являются электрические разъемные соединения, с помощью которых эквивалентные электрические схемы замещения можно собирать из отдельных независимых модулей (подсистем), что позволяет конструировать математические модели по агрегатному (расширяемому) принципу.

Применение метода электроаналогий приводит к новым решениям известных задач. Эти решения формализованы и предусматривают декомпозицию, т. е. разделение сложных динамических систем на элементарные звенья трех видов: инерционные, диссипативные и упругие (табл. 1). В результате создается имитационная математическая модель, которая в конечном итоге представляет собой совместную систему дифференциальных и линейных алгебраических уравнений. При моделировании на ЭВМ эти уравнения имеют устойчивое численное решение.

Методом электроаналогий полезно решать кинематические и динамические задачи многозвенных механизмов, включая манипуляционные роботы. Метод позволяет получить для роботов универсальные и в то же время надежные программы решения так называемых обратных кинематических задач по положению, скорости и ускорению. Содержащиеся в эквивалентных электрических схемах виртуальные разъемы (3-й аспект концепции) позволяют строить кинематические и динамические модели роботов по модульному принципу, что имеет важное практическое значение.

Основной подход математического моделирования с использованием электромеханических аналогий сводится к следующей последовательности действий:

- 1) разделить механическую систему на отдельные подсистемы, каждая из которых включает одну сосредоточенную массу;
- 2) применяя принцип Даламбера, составить уравнения кинестатики, определяющие движение тела с выделенной массой;
- 3) спроектировать векторные уравнения кинестатики на координатные оси и заменить векторные соотношения скалярными;

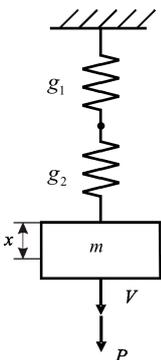
4) используя таблицу электроаналогий (табл. 1), выделить в механической системе инерционные, диссипативные и упругие элементы;

5) построить на основе полученных уравнений эквивалентную электрическую схему замещения;

6) на основе электрической схемы записать уравнения по первому закону Кирхгофа и уравнения трансформаторов. Продифференцировать эти уравнения и добавить к уравнениям теоретической механики. Уравнения по второму закону Кирхгофа записывать не нужно, так как они совпадают с уравнениями кинестатики для сил и моментов.

**Пример 1**

Составить математическую модель груза массой  $m$ , подвешенного на двух пружинах с податливостями  $g_1=1/c_1$  и  $g_2=1/c_2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  – жесткости пружин (рис. 1).



**Рис.1.** Груз на двух пружинах

В соответствии с таблицей электроаналогий строим электрическую схему, эквивалентную данному механическому устройству. Индуктивности, емкости, э.д.с., напряжения и токи в электрических схемах будем обозначать с помощью соответствующих символов, принятых в механике.

В данном механизме скорости деформаций пружин  $V_1$  и  $V_2$  складываются. Усилие на обеих пружинах  $F_y$  одинаковое. Этому условию соответствует параллельное включение конденсаторов в электрической схеме (рис. 2).

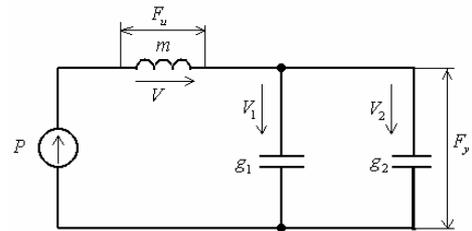
Уравнения Кирхгофа для этой схемы:

$$P - F_u - F_y = 0, \tag{1}$$

$$V - V_1 - V_2 = 0. \tag{2}$$

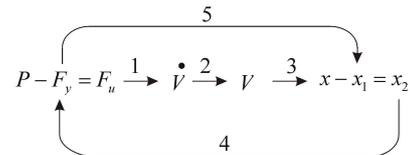
На основании уравнений Кирхгофа строим сеть связей (рис. 3). В уравнении (1) выносим

вправо от знака равенства инерционную составляющую  $F_u$ .



**Рис.2.** Электрическая схема

От нее с помощью соотношения для индуктивности  $F_u = m \cdot \dot{V}$  переходим к скорости изменения тока  $\dot{V}$ . Интегрируя скорость изменения тока  $\dot{V}$ , определяем ток  $V$ , а интегрируя ток  $V$ , получаем суммарный заряд на конденсаторах  $x$ . Заметим, что соотношение токов и напряжений для индуктивности аналогично 2-му закону Ньютона. Скорость изменения тока является аналогом ускорения, ток – аналогом скорости, а суммарный заряд на конденсаторах – аналогом суммарного перемещения груза.



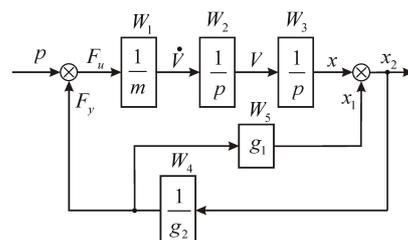
**Рис.3**

Проинтегрируем уравнение (2). В результате получаем уравнение

$$x - x_1 - x_2 = 0.$$

Это соотношение баланса зарядов на конденсаторах  $g_1$  и  $g_2$ , которое позволяет завершить построение сети связей для рассматриваемого устройства. Каждой ветви сети связей соответствует элементарное звено со своей передаточной функцией (табл. 2).

Используя выражения передаточных функций для элементарных звеньев, переходим от сети связей к структурной схеме динамической модели (рис. 4).



**Рис. 4**

Таблица 2  
Передаточные функции элементарных звеньев

Физические зависимости	Передаточные функции
1. $F_u = m \cdot \dot{V}$	$W_1 = \frac{\dot{V}}{F_u} = \frac{1}{m}$
2. $\dot{V}_1 = p \cdot V_1$	$W_2 = \frac{V_1}{\dot{V}_1} = \frac{1}{p}$
3. $V = p \cdot x$	$W_3 = \frac{x}{V} = \frac{1}{p}$
4. $F_y = \frac{1}{g_2} \cdot x_2$	$W_4 = \frac{F_y}{x_2} = \frac{1}{g_2}$
5. $F_y = \frac{1}{g_1} \cdot x_1$	$W_5 = \frac{x_1}{F_y} = g_1$

**Пример 2**

Построить эквивалентную электрическую схему механического устройства (рис. 5).

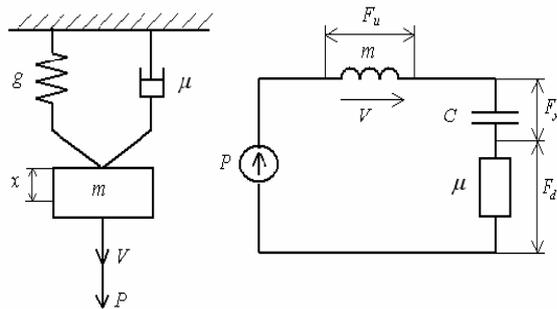


Рис.5 Механическое устройство и его эквивалентная схема

В данном устройстве скорости деформаций пружины и демпфера одинаковы и равны скорости движения груза. В электрической схеме этому условию соответствует последовательное соединение индуктивности, ёмкости и сопротивления. Записываем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$P - F_u - F_y - F_d = 0. \tag{3}$$

Построим сеть связей. Для этого в уравнении (3) выносим вправо от знака равенства инерционную составляющую  $F_u$ , с помощью уравнения  $F_u = m \cdot \dot{V}$  определяем скорость изменения тока (ускорение)  $\dot{V}$ , дважды интегрируем эту переменную и вводим в систему обратные связи по диссипативной составляющей  $F_d$  и по упругой составляющей  $F_y$  (рис. 6).

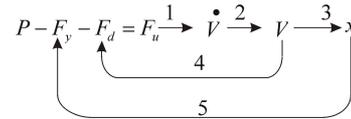


Рис. 6

Каждую ветвь сети связей представляем в виде передаточной функции элементарного звена (табл. 3). Заменяем в сети связей ветви на элементарные звенья и переходим к структурной схеме динамической системы (рис. 7).

Таблица 3  
Передаточные функции элементарных звеньев

Физические зависимости	Передаточные функции
1. $F_u = m \cdot \dot{V}$	$W_1 = \frac{\dot{V}}{F_u} = \frac{1}{m}$
2. $\dot{V}_1 = p \cdot V_1$	$W_2 = \frac{V_1}{\dot{V}_1} = \frac{1}{p}$
3. $V = p \cdot x$	$W_3 = \frac{x}{V} = \frac{1}{p}$
4. $F_d = h \cdot V$	$W_4 = \frac{F_d}{V} = h$
5. $F_y = \frac{1}{g} \cdot x$	$W_5 = \frac{F_y}{x} = \frac{1}{g}$

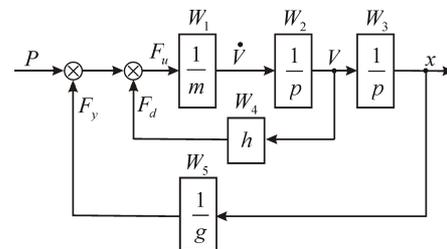


Рис.7

В настоящее время разработаны простой и структурно-матричный методы построения математических моделей с использованием электроаналогий. В данной статье рассматривается синтез математических моделей простым методом электроаналогий.

**ПОСТРОЕНИЕ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОАНАЛОГИЙ**

Чтобы понять сущность метода электроаналогий, рассмотрим простейший механизм с двумя степенями свободы (рис. 8). Ставится задача построить имитационную математическую модель механизма, состоящую из набора

типовых усилительных и интегрирующих звеньев.

Разделим систему на отдельные подсистемы, придерживаясь следующих правил.

1) систему разделяют на подсистемы так, чтобы каждая подсистема содержала одну сосредоточенную массу. Количество подсистем должно быть равно числу сосредоточенных масс механического устройства;

2) векторы внутренних сил в каждой паре взаимодействующих подсистем обозначают одинаковыми символами, но направляют векторы этих сил на кинематических схемах взаимодействующих подсистем противоположно;

3) за положительное направление сил, скоростей и ускорений можно принять направление движения сосредоточенной массы в первоначальный момент времени  $t = 0$ .

В результате для рассматриваемого примера получаем три подсистемы.

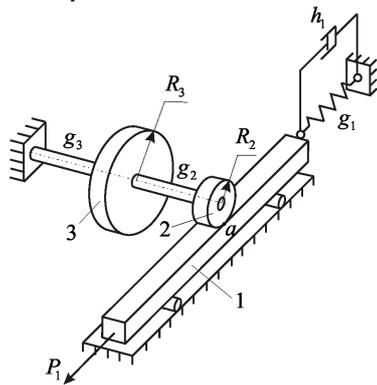


Рис. 8. Механизм с двумя степенями свободы

**Подсистема 1** (рис. 9, а)

Включает катающийся столик массой  $m_1$ . На него действует внешняя сила  $P_1$ , под действием которой тело движется со скоростью  $V_1$ . Силами сопротивления здесь являются инерционная сила  $F_1^u$  и сила в зубчатом зацеплении  $R_a$  (внутренняя сила).

Используя метод кинестатики [2], составим уравнение равновесия указанных выше сил:

$$P_1 - F_1^u - F_1^y - F_1^d - R_a = 0,$$

Оно служит основой для построения эквивалентной электрической схемы замещения (рис. 9, б).

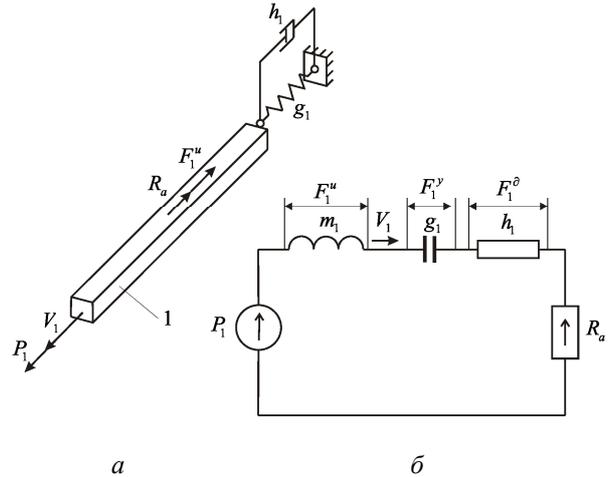


Рис. 9. Подсистема 1: а – кинематическая схема; б – электрическая схема

Эквивалентные электрические схемы конструируют по следующим правилам:

1) внешние движущие силы представляют на электрической схеме в виде источников э.д.с.;

2) внутренним силам (силам сопротивления), действующим на отдельную сосредоточенную массу, отвечают напряжения между определенными точками электрической схемы. Чтобы показать полярность каждого из этих напряжений, к соответствующим двум точкам электрической схемы присоединяют прямоугольник, внутри которого изображают стрелку, обращенную к точке с положительным потенциалом;

3) скорость движения сосредоточенной массы эквивалентна току в цепи с индуктивностью;

4) скорость деформации упругого элемента эквивалентна току в цепи с емкостью;

5) скорость движения демпфирующего элемента эквивалентна току в цепи с активным сопротивлением;

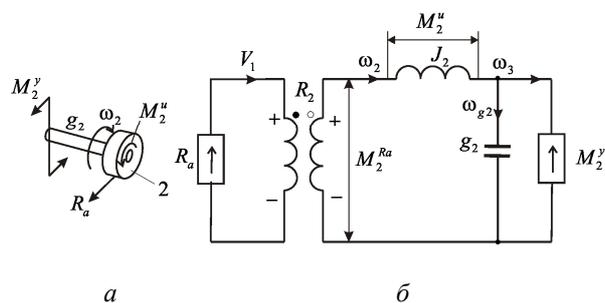
6) индуктивности, конденсаторы, сопротивления, э.д.с., напряжения и токи на электрической схеме обозначают с помощью соответствующих символов, принятых в механике.

**Подсистема 2** (рис. 10, а).

Состоит из колеса с моментом инерции  $J_2$ . Сила в зацеплении  $R_a$  создает на колесе 2 вращающий момент  $M_2^{Ra}$  и приводит его в движение с угловой скоростью  $\omega_2$ . По отношению к звену 2 это движущая сила.

Инерционный момент  $M_2^u$  и момент упругих сил  $M_2^y$  препятствуют вращению колеса и,

следовательно, являются силами сопротивления.



**Рис.10.** Подсистема 2: *a* – кинематическая схема; *б* – электрическая схема

Запишем уравнение равновесия моментов, действующих на звено 2:

$$M_2^{Ra} - M_2^u - M_2^y = 0,$$

где  $M_2^{Ra} = Ra \cdot R_2$ .

Этим уравнениям отвечает эквивалентная электрическая схема на рис. 10, б. Чтобы выполнить содержащуюся в последнем выражении операцию умножения, в электрической схеме применен трансформатор. Трансформаторы на электрических схемах изображают по следующим правилам:

1) возле изображения трансформатора должны быть указаны полярности напряжений на первичной и на вторичной обмотках и направления токов через эти обмотки в начальный момент времени  $t = 0$ ;

2) начало первичной обмотки каждого трансформатора отмечают на электрической схеме черной точкой, а начало вторичной обмотки – прозрачной точкой. Токи в этих обмотках должны быть направлены в противоположные стороны. Так, например, если ток в первичной обмотке «втекает в точку», то во вторичной обмотке ток должен «вытекать из точки»;

3) для всех трансформаторов указывают коэффициенты передач. Они могут быть постоянными и переменными, безразмерными или иметь размерности физических величин.

**Подсистема 3** (рис. 11, *a*).

Подсистема включает колесо 3, которое под влиянием движущего момента  $M_3^y$  совершает вращательное движение  $\omega_3$ , и упругий вал с коэффициентом податливости  $g_3$ . Силами сопротивления движению являются инер-

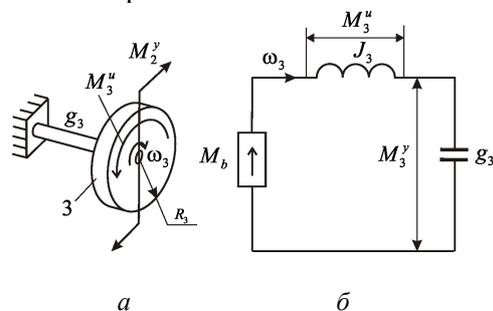
ционный момент  $M_3^u$  и момент упругих сил  $M_3^y$ .

Запишем уравнение равновесия моментов, действующих на звено 3:

$$M_2^y - M_3^u - M_3^y = 0.$$

Последнее уравнение использовано для построения эквивалентной электрической схемы (рис. 11, б).

Далее объединяем отдельные электрические схемы в единую схему замещения. Прямоугольники с обозначениями напряжений  $R_a$  и  $R_b$  рассматриваем теперь как две части электрического биполярного разъема (рис.12), причем направления стрелок внутри прямоугольников соответствуют полярностям э.д.с. на контактах разъема.

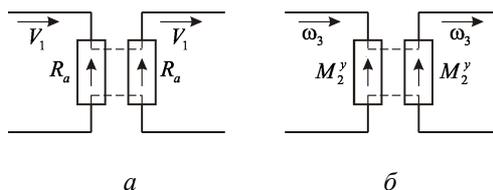


**Рис. 11.** Подсистема 3: *a* – кинематическая схема; *б* – электрическая схема

Непосредственно из схем разъемных соединений следуют очевидные правила:

1) токи, протекающие через две одноименные части разъема, равны между собой по модулю;

2) направления токов, протекающих через две одноименные части разъема, противоположны по отношению к э.д.с. на контактах разъема. Это означает, что если в правой части разъема ток втекает в «стрелку», то в левой части разъема он вытекает из «стрелки», и наоборот.



**Рис.12.** Соединения подсистем: *a* – первой со второй; *б* – второй с третьей

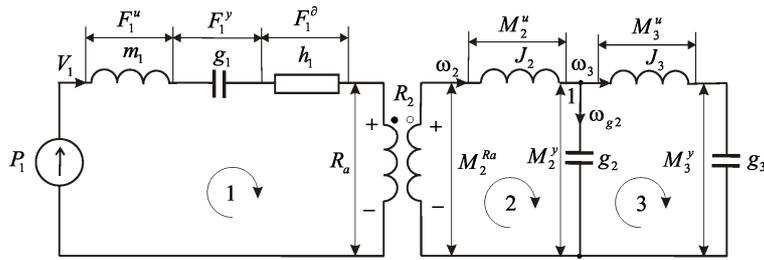


Рис. 13. Общая электрическая схема замещения

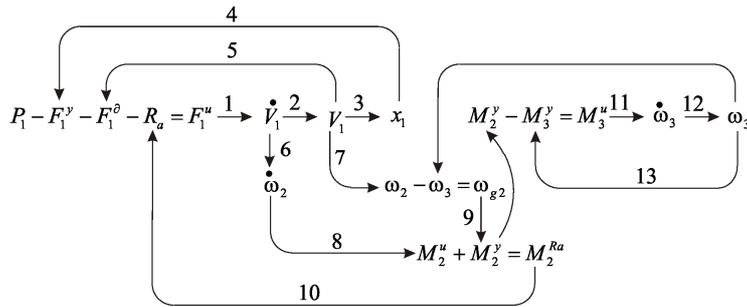


Рис. 14. Сеть связей

Общая электрическая схема замещения (рис. 13) содержит три контура и один трансформатор. Уравнения Кирхгофа для контуров 1–3 совпадают с уравнениями сил и моментов. Запишем уравнение Кирхгофа для узла 1.

$$\omega_2 - \omega_{g2} - \omega_3 = 0.$$

Записываем уравнения трансформатора, куда включаем соотношения напряжений, токов и производных токов.

$$R_a R_2 = M_2^{Ra}, \quad \omega_2 R_2 = V_1, \quad \dot{\omega}_2 R_2 = \dot{V}_1.$$

Записываем компонентные уравнения инерционных, диссипативных и упругих элементов:

$$\begin{aligned} 1) F_1^u &= m_1 \dot{V}_1, & 5) M_2^y &= \frac{1}{g_2} \int \omega_{g2} dt, \\ 2) F_1^y &= \frac{1}{g_1} x_1, & 6) M_3^y &= \frac{1}{g_3} \int \omega_3 dt, \\ 3) F_1^o &= h V_1, & 7) M_3^u &= J_3 \dot{\omega}_3, \\ 4) M_2^u &= J_2 \dot{\omega}_2, \end{aligned}$$

Далее строим сеть связей физических величин (рис. 14). Подобно структурным схемам, сети связей физических величин или просто сети связей мы будем использовать для наглядного изображения физических зависимостей динамических систем.

Между структурной схемой системы и сетью связей имеется прямое соответствие: прямоугольнику структурной схемы отвечает ветвь,

а линии передачи сигнала – узел сети. При этом номер ветви соответствует номеру передаточной функции элементарного звена. Ветвь, соединяющая одноименные величины, не имеет номера (передаточная функция для такой ветви равна единице). Элементу сравнения на сети связей соответствует разность, а сумматору – сумма двух величин, равная третьей величине (результату). Результат вычитания или суммирования всегда записывают справа от знака равенства.

Сети связей надо строить, соблюдая следующие правила:

1) в уравнениях Кирхгофа для контуров можно выносить вправо от знака равенства только напряжения на индуктивностях и напряжения на активных сопротивлениях, а также напряжения, соответствующие внутренним реакциям связей;

2) напряжения на емкостях выносить вправо от знака равенства нельзя;

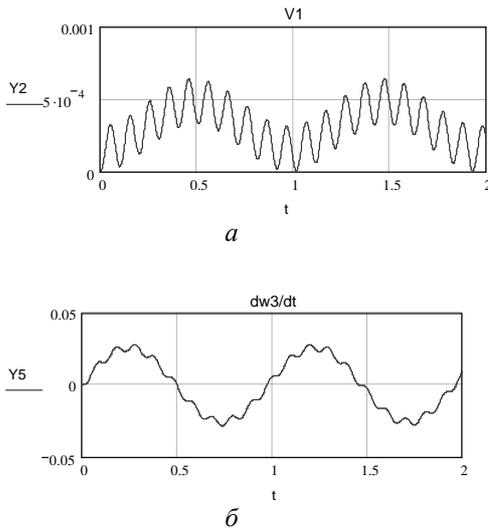
3) если инерционное звено соединено с другими звеньями упругими связями, то в уравнении Кирхгофа напряжение на индуктивности, эквивалентной рассматриваемому инерционному звену, всегда выносят вправо от знака равенства;

4) если два или более инерционных звена соединены жесткой кинематической связью, то из этой группы звеньев надо выбрать одно – ведущее звено. Соответственно в уравнениях Кирхгофа надо вынести вправо от знака равенства только то напряжение, которое эквива-

лентно инерционной силе на ведущем звене. Напряжения на остальных инерционных звеньях рассматриваемой группы выносить вправо от знака равенства нельзя. Чтобы перейти от сети связей к структурной схеме динамической системы, надо записать передаточные функции элементарных звеньев и заменить в сети связей ветви на передаточные функции элементарных звеньев. Полученная в результате таких преобразований структурная схема будет содержать пять интегрирующих звеньев. Их дифференциальные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} pY_1 &= U_1, & pY_4 &= U_4, \\ pY_2 &= U_2, & pY_5 &= \frac{1}{g_3}U_5, \\ pY_3 &= \frac{1}{g_2}U_3, \end{aligned}$$

где  $p = \frac{d}{dt}$  – оператор дифференцирования.



**Рис.15.** Движения механизма: *a* – изменение линейной скорости  $V_1$ ; *b* – изменение углового ускорения  $\dot{\omega}_3$

Уравнения связи будут

$$U_1 = \frac{P_1 - \frac{1}{g_1}Y_2 - hY_1 - \frac{1}{R_2}Y_3}{m_1 + \frac{J_2}{R_2^2}}, \quad U_2 = Y_1,$$

$$U_3 = \frac{1}{R_2}Y_1 - Y_4, \quad U_4 = \frac{1}{J_3}(Y_3 - Y_5), \quad U_5 = Y_4.$$

Подставив уравнения связи в уравнения для интегрирующих звеньев, получим общую сис-

тему дифференциальных уравнений математической модели.

Результаты моделирования показаны в виде графиков (рис. 15). Движения механизма под действием внешней силы веса  $P_1$  представляют собой сложный колебательный процесс.

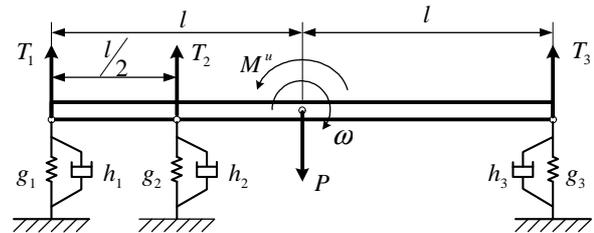
Параметры модели имели следующие значения:

$$P_1 = 10, \quad m_1 = 15, \quad m_2 = 3, \quad m_3 = 30, \quad R_3 = 0.4,$$

$$R_2 = 0,1R_3, \quad h = 0, \quad g_1 = 1/20, \quad g_2 = g_3 = 1/100.$$

### ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ЗВЕНЬЕВ

В качестве примера рассмотрим механическое устройство, которое представляет собой жёсткий вал на 3-х опорах, обладающих свойствами упругости и демпфирования (рис.16). Такое устройство может служить прототипом шпинделя металлорежущего станка, установленного на 3-х подшипниках.



**Рис. 16.** Механическое устройство

В рассматриваемом примере вал длиной  $2l$  под действием внешней силы  $P$  и сил реакций  $T_1, T_2, T_3$  в опорах совершает сложные колебания, которые можно представить как сумму поступательных движений вала параллельно самому себе и вращательных движений вала, совершаемых вокруг его центра масс. Внутренние силы  $T_1, T_2, T_3$  в опорах зависят от значений коэффициентов податливости  $g_1, g_2, g_3$  и коэффициентов демпфирования  $h_1, h_2, h_3$  опор.

Составим уравнение равновесия сил:

$$P_1 - F_u - T_3 - T_2 - T_1 = 0,$$

где

$$T_1 = F_{g1} + F_{h1}; \quad T_2 = F_{g2} + F_{h2}; \quad T_3 = F_{g3} + F_{h3}.$$

Составим уравнение равновесия моментов:

$$M_{T1} + M_{T2} - M_{T3} - M_u = 0,$$

где  $M_{T1} = T_1l$ ;  $M_{T2} = T_2 \frac{l}{2}$ ;  $M_{T3} = T_3 \frac{l}{2}$ .

На основании данных уравнений составляем эквивалентную электрическую схему (рис. 17).

Электрическая схема содержит 5 контуров, 3 узла и 3 трансформатора. Уравнения Кирхгофа для контуров 1–5 совпадают с уравнениями равновесия сил и с уравнениями равновесия моментов.

Записываем уравнения Кирхгофа для узлов 1, 2 и 3.

$$1) V - V_1 - V_{g1} = 0, \quad 3) V + V_3 - V_{g3} = 0,$$

$$2) V - V_2 - V_{g2} = 0,$$

Записываем уравнения трансформаторов.

$$1) T_1 l = M_{T1}, \quad 2) T_2 l / 2 = M_{T2}, \quad 3) T_3 l = M_{T3},$$

$$\omega l = V_1, \quad \omega l / 2 = V_2, \quad \omega l = V_3.$$

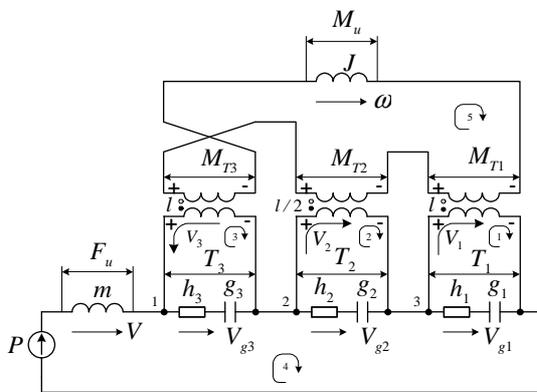


Рис. 17. Эквивалентная электрическая схема замещения

Рассматриваемое твердое тело имеет две степени свободы, так как оно может совершать прямолинейное движение и одновременно вращательное движение вокруг центра масс. По-

этому чтобы построить сеть связей динамической системы, необходимо в двух уравнениях: в уравнении равновесия сил и в уравнении равновесия моментов, вынести вправо инерционные составляющие. Используя дополнительно уравнения Кирхгофа 1–3 для узлов, а также уравнения трансформаторов, строим сеть связей динамической системы (рис.18).

Далее надо построить структурную схему динамической системы. С этой целью каждую ветвь сети связей следует заменить элементарным звеном. В соответствии с построенной структурной схемой были получены уравнения связей и дифференциальные уравнения элементарных звеньев в следующем виде:

$$T_1 = U_1 h_1 + Y_1,$$

$$T_2 = U_2 h_2 + Y_2,$$

$$T_3 = U_3 h_3 + Y_3,$$

$$U_1 = V_{g1} = Y_4 - Y_5 l,$$

$$U_2 = V_{g2} = Y_4 - Y_5 l / 2,$$

$$U_3 = V_{g3} = Y_4 + Y_5 l,$$

$$U_4 = \dot{V} = (P - T_1 - T_2 - T_3) / m,$$

$$U_5 = \dot{\omega} = (T_1 l + 0.5 T_2 l - T_3 l) / J,$$

$$pY_1 = \frac{1}{g_1} U_1,$$

$$pY_2 = \frac{1}{g_2} U_2,$$

$$pY_3 = \frac{1}{g_3} U_3,$$

$$pY_4 = U_4,$$

$$pY_5 = U_5.$$

Результаты моделирования представлены в виде графиков (рис. 19).

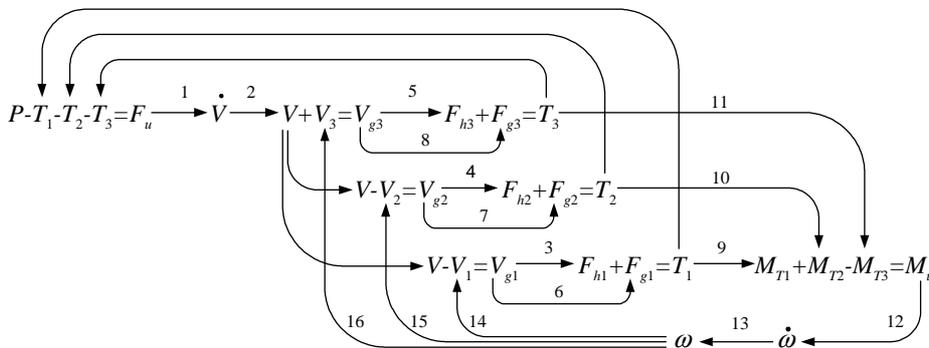


Рис. 18. Сеть связей

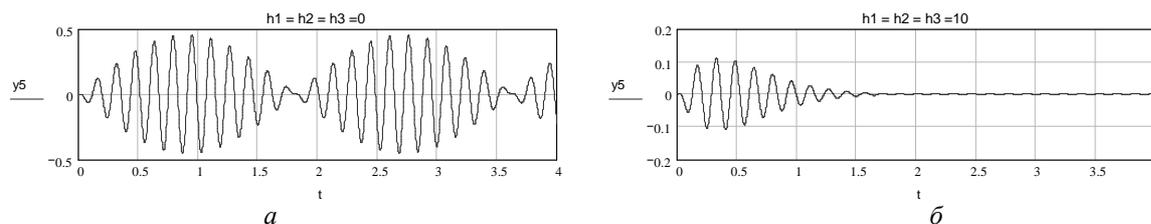


Рис.19. Графики линейных скоростей: *а* – без демпфирования; *б* – с демпфированием

С повышением сложности системы количество передаточных функций и уравнений связи, которые рассчитываются вручную, возрастает, и простой метод электроаналогий становится громоздким и трудоемким.

Чтобы исключить указанный недостаток, было разработано структурно-матричное представление метода электроаналогий, что позволило расширить сферу его применения.

Математическое описание моделей с помощью матриц позволяет формализовать процесс разработки моделей, избавляет от необходимости определять в явном виде передаточные функции элементарных звеньев и составлять вручную уравнения связи. Значения воздействий на входах интегрирующих звеньев определяются компьютером автоматически, путем решения системы линейных алгебраических уравнений.

Метод электроаналогий дает устойчивое численное решение обратных кинематических задач робототехники, задач, связанных с движениями гироскопов, и иных задач теоретической механики в области кинематики и динамики механизмов в 2-х и в 3-мерных пространствах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Преимущество рассмотренного простого метода электроаналогий в том, что синтез имитационной модели сопровождается построением структурной схемы динамической системы. Поскольку структурная схема содержит передаточные функции всех звеньев, то появляется возможность исследовать динамическую систему с привлечением методов теории управления. Однако такое моделирование оправдано лишь

для сравнительно простых систем, содержащих небольшое количество звеньев.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атабеков, Г. И. Теоретические основы электротехники. Ч. 1 / Г. И. Атабеков. М.-Л. : Энергия, 1966. 320 с.
2. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. СПб. : Лань, 2007. 736 с.
3. Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2. Динамика / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. М. : Наука, 1972. 624 с.
4. Тарасик, В. П. Математическое моделирование технических систем / В. П. Тарасик. Минск : ДизайнПРО, 1997. 640 с.
5. Зарубин, В. С. Математическое моделирование в технике / В. С. Зарубин. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. 496 с.
6. Papageorgiou, C. Positive real synthesis using matrix inequalities for mechanical networks: application to vehicle suspension / C. Papageorgiou, M. C. Smith // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2006. Vol. 14, № 3. P. 423–435.

## ОБ АВТОРЕ



**Чикуров Николай Георгиевич**, доц. Дипл. инж. по станкостроению и технологии машиностроения (УАИ, 1965). Канд. техн. наук по электрооборудованию металлорежущих станков (МОССТАНКИН, 1971). Иссл. в обл. комп. систем ЧПУ класса ICNC.