Уфа : УГАТУ, 2009 Вестник УГАТУ • Управление, ВТ и И Т.12, № 1(30). С. 161–165

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 517

Э. М. АСАДУЛЛИН, Ф. С. НАСЫРОВ

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОМЕРНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассматривается задача нелинейной фильтрации одномерных диффузионных процессов. Данную задачу удалось свести к решению цепочки нестохастических дифференциальных уравнений в частных производных, что существенно упрощает задачу. Рассмотрен пример решения задачи нелинейной фильтрации диффузионных процессов. Произведено моделирование диффузионных процессов и построена оценка для ненаблюдаемого процесса. *Диффузионные процессы ; фильтрация ; наилучшая оценка ; уравнение для фильтрационной плотности ; цепочка нестохастических дифференциальных уравнений*

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена задаче одномерной фильтрации диффузионных процессов. Пусть фиксировано вероятностное пространство (Ω, F, P) с потоком σ-алгебр $\{F_t\}_{t\in[0,T]}$ и независимые стандартные винеровские процессы $v(t)$, $w(t)$, $t \in [0, T]$. Рассмотрим диффузионный процесс $(x(t), y(t))$, удовлетворяющий следующей системе уравнений:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b_1(s, x(s), y(s))\,ds + \int_0^t \sigma_1(s, x(s), y(s))\,dv(s) + \int_0^t \sigma(s, x(s), y(s))\,dw(s), \quad (1)$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t b_2(s, x(s), y(s))\,ds + \int_0^t \sigma_0(s, y(s))\,dw(s), \quad (2)$$

где интегралы по винеровским процессам – стохастические интегралы Ито. Предполагается, что процесс $y(t)$ доступен наблюдениям, а процесс $x(t)$ – нет. Задача фильтрации заключается в нахождении условного математического ожидания $m_t = E[f(x(t))|Y_t]$, где Y_t – σ-алгебра, порожденная значениями процесса $y(t)$, при $s \in [0, t]$, $f(x)$ – детерминированная функция.

В работах Р. Ш. Липцера, А. Н. Ширяева [2], Г. Каллианпура [1], Б. Л. Розовского [4] данная проблема (в многомерном случае) была сведена к задаче нахождения ненормализованной фильтрационной плотности, которая является решением стохастического дифференциального уравнения в частных производных. Показано (см. [4]), что условное математическое ожидание m_t можно вычислить по формуле

$$m_t = E[f(x(t))\,|\,Y_t] = \frac{\int_R f(x)V(t,x)\,dx}{\int_R V(t,x)\,dx}, \quad (3)$$

где $V(t, x)$ – так называемая ненормализованная фильтрационная плотность, которая удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению в частных производных

$$\begin{aligned} V(t,x) - V(0,x) &= \int_0^t \{[a(s,x,y(s))V(s,x)]''_{xx} - [b_1(s,x,y(s))V(s,x)]'_x\}\,ds + \\ &+ \int_0^t \{h(s,x,y(s))V(s,x) - [\sigma(s,x,y(s))V(s,x)]'_x\}\,d\tilde{w}(s), \quad (4)\\ V(0,x) &= \pi_0(x). \end{aligned}$$

Здесь $a := \frac{1}{2}[\sigma_1^2 + \sigma^2]$, $h := \frac{b_2}{\sigma_0}$, $\pi_0(x)$ – условная плотность $x(0)$ относительно Y_0, а $\tilde{w}(t)$ – винеровский процесс, полученный в процессе применения теоремы Гирсанова с целью «уничтожения сноса» в уравнении для наблюдаемой компоненты (2):

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \sigma_0(s, y(s))\,\tilde{w}(s). \quad (5)$$

Решить стохастическое дифференциальное уравнение (4) ранее удавалось только в линейном случае (фильтр Калмана–Бьюси), в других отдельных случаях задачу пытались решить методами статистического моделирования, что представляет собой крайне трудоемкую и сложную задачу.

В настоящей работе данную задачу удалось свести к решению пары нестохастических дифференциальных уравнений в частных производных, что существенно упрощает нахождение

Контактная информация: (347)273-77-35

решения задачи. В работе приведен пример построения решения задачи нелинейной фильтрации диффузионных процессов, произведено численное моделирование.

1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ ПЛОТНОСТИ

Найдем структуру наблюдаемого процесса, который определяется уравнением (5). Воспользуемся методом, предложенным в работе [3]. Наблюдаемый процесс будем искать в виде $y(t)=y(t,\tilde{w}(t))$, где $y(t,u)$ – гладкая функция. Запишем уравнение (5) в форме Стратоновича:

$$y(t,\tilde{w}(t))-y(0,\tilde{w}(0))= \\ =\int_0^t \sigma_0(s,y(s,\tilde{w}(s)))d\tilde{w}(s)- \qquad (6) \\ -\tfrac{1}{2}\int_0^t \sigma'_{0y}(s,y(s,\tilde{w}(s)))\,y'_u(s,\tilde{w}(s))\,ds .$$

Левую часть уравнения (6) можно записать в виде:

$$y(t,\tilde{w}(t))-y(0,\tilde{w}(0))=\int_0^t y'_s(s,\tilde{w}(s))\,ds+ \\ +\int_0^t y'_u(s,\tilde{w}(s))d\tilde{w}(s) .$$

Пользуясь тем, что стохастический интеграл Стратоновича может быть вычислен по формуле (см. [3])

$$\int_0^t f(s,w(s))dw(s)= \\ =\int_{w(0)}^{w(t)} f(t,u)\,du-\int_0^t\int_{w(0)}^{w(s)} f'_s(s,u)\,du\,ds ,$$

можно записать уравнение (6) следующим образом:

$$\int_0^t\Big[y'_s(s,\tilde{w}(s))-\int_{w(0)}^{w(s)} y''_{su}(s,u)\,du\Big]ds+ \\ +\int_{\tilde{w}(0)}^{\tilde{w}(t)} y'_u(t,u)\,du=\int_{\tilde{w}(0)}^{\tilde{w}(t)}\sigma_0(t,y(t,u))\,du+ \\ +\int_0^t\Big[-\tfrac{1}{2}\sigma'_{0y}(s,y(s,\tilde{w}(s)))\,y'_u(s,\tilde{w}(s))- \\ -\int_{\tilde{w}(0)}^{\tilde{w}(s)}\sigma'_{0s}(s,y(s,u))\,du\Big]ds .$$

Сгруппируем слагаемые

$$\int_0^t\Big[y'_s(s,\tilde{w}(s))+ \\ +\tfrac{1}{2}\sigma'_{0y}(s,y(s,\tilde{w}(s)))\,y'_u(s,\tilde{w}(s))- \\ -\int_{\tilde{w}(0)}^{\tilde{w}(s)}[y'_u(s,u)-\sigma_0(s,y(s,u))]'_s\,du\Big]ds= \\ =\int_{\tilde{w}(0)}^{\tilde{w}(t)}[\sigma_0(t,y(t,u))-y'_u(t,u)]du .$$

В силу того, что в левой части мы имеем гладкую функцию, а в правой – функцию неограниченной вариации, решение будем искать из условий равенства нулю подынтегральных выражений. Получим

$$y'_u(t,u)=\sigma_0(t,y(t,u)) , \\ y'_s(t,\tilde{w}(t))= \\ =-\tfrac{1}{2}\sigma'_{0y}(t,y(t,\tilde{w}(t)))\,\sigma_0(t,y(t,\tilde{w}(t))) , \qquad (7) \\ y(0,\tilde{w}(0))=y_0 .$$

Таким образом, мы получили уравнения, которым удовлетворяет наблюдаемый процесс. Рассмотрим теперь уравнение (4), решение которого будем искать в виде

$$V=V(t,x,y(t,\tilde{w}(t))) .$$

Перепишем уравнение (4) в форме Стратоновича (для простоты записи опустим аргументы коэффициентов a, b_1, h, σ, σ_0):

$$V(t,x,y(t,\tilde{w}(t)))-V(0,x,y(0,\tilde{w}(0)))= \\ =\int_0^t\{[aV(s,x,y(s,\tilde{w}(s)))]''_{xx}- \\ -[b_1V(t,x,y(t,\tilde{w}(t)))]'_x\}\,ds+ \\ +\int_0^t\{hV(t,x,y(t,\tilde{w}(t)))- \\ -[\sigma V(t,x,y(t,\tilde{w}(t)))]'_x\}\,d\tilde{w}(s)- \\ -\tfrac{1}{2}\int_0^t\{hV(t,x,y(t,\tilde{w}(t)))- \\ -[\sigma V(t,x,y(t,\tilde{w}(t)))]'_x\}'_y\,\sigma_0\,ds$$

(здесь мы воспользовались первым уравнением из (7) – заменили y'_u на σ_0).

В силу (6) и формулы замены переменной в (симметричном) интеграле Стратоновича, правая часть уравнения равна:

$$\int_0^t\frac{hV-(\sigma V)'_x}{\sigma_0}\sigma_0 d\tilde{w}(s)- \\ -\tfrac{1}{2}\int_0^t\frac{hV-(\sigma V)'_x}{\sigma_0}\sigma'_{0y}\,\sigma_0 ds+ \\ +\tfrac{1}{2}\int_0^t\frac{hV-(\sigma V)'_x}{\sigma_0}\sigma'_{0y}\,\sigma_0\,ds+\int_0^t\{(aV)''_{xx}- \\ -(b_1V)'_x-\tfrac{1}{2}[hV-(\sigma V)'_x]'_y\sigma_0\}\,ds= \\ =\int_0^t\frac{hV-(\sigma V)'_x}{\sigma_0}\,dy(s)+ \\ +\int_0^t\sqrt{2}y(s)dv(s)-\tfrac{1}{2}\int_0^t\sqrt{2}y'_v(s)\,ds \\ y(t)=y_0+\int_0^t x(s)y^2(s)\,ds+ .$$

По формуле стохастического дифференциала в форме Стратоновича

$$V(t,x,y(t))-V(0,x,y(0))= \\ =\int_0^t V'_s(s,x,y(s))\,ds+\int_0^t V'_y(s,x,y(s))dy(s) .$$

Тогда

$$\int_0^t V'_s(s,x,y(s))\,ds+\int_0^t V'_y(s,x,y(s))dy(s)=$$

$$= \int_0^t \frac{hV - (\sigma V)'_x}{\sigma_0} dy(s) +$$
$$+ \int_0^t \{(aV)''_{xx} - (b_1 V)'_x - \tfrac{1}{2}[hV -$$
$$- (\sigma V)'_x]'_y \sigma_0 + \tfrac{1}{2}[hV - (\sigma V)'_x]\sigma'_{0y}\} ds .$$

Путем рассуждений, аналогичных используемым при выводе уравнений (7), имеем:

$$V'_y(t,x,y) = \frac{\sigma}{\sigma_0} V'_x(t,x,y) + \frac{h - \sigma'_x}{\sigma_0} V(t,x,y) , \quad (8)$$

$$V'_t(t,x,y(t)) = [aV(t,x,y(t))]''_{xx} - [b^1 V(t,x,y(t))]'_x + \tfrac{1}{2}[hV(t,x,y(t)) - (\sigma V(t,x,y(t)))'_x]\sigma'_{0y} - \tfrac{1}{2}[hV(t,x,y(t)) - (\sigma V(t,x,y(t)))'_x]'_y \sigma_0 , \quad (9)$$

$$V(0,x,y(0)) = \pi_0(x) . \quad (10)$$

С помощью (8) уравнение (9) приводится к виду

$$V'_t(t,x,y(t)) = AV''_{xx}(t,x,y(t)) + BV'_x(t,x,y(t)) + CV(t,x,y(t)) , \quad (11)$$

где

$$A = \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 , \qquad B = 2a'_x - b_1 + \tfrac{1}{2}[\sigma\sigma'_{0y} + 2\sigma h - 3\sigma\sigma'_x] ,$$
$$C = a''_{xx} - b'_{1x} + \tfrac{1}{2}[\sigma(h'_x - \sigma''_{xx}) - \sigma - \sigma_0(h'_y - \sigma''_{xy}) + \sigma'_{0y}(h - \sigma'_x) - (h - \sigma'_x)^2] .$$

Уравнение (8) – линейное уравнение в частных производных первого порядка. Оно решается методом характеристических кривых. Решая уравнение для характеристик

$$\frac{dt}{0} = \frac{dy}{\sigma_0(t,y)} = \frac{dx}{\sigma(t,x,y)} = \frac{dV}{V[h(t,x,y) - \sigma'_x(t,x,y)]} , \quad (12)$$

получим первые интегралы

$$dt = 0 : \ t = C_1 ,$$
$$\frac{dy}{\sigma_0(C_1,y)} = \frac{dx}{\sigma(C_1,x,y)} : \ z(t,x,y) = C_2 \ \Rightarrow \ \Rightarrow x = \tilde{x}(C_1,C_2,y) ,$$
$$\frac{dV}{V} = \frac{[h - \sigma'_x](C_1, \tilde{x}(C_1,C_2,y), y)}{\sigma_0(C_1,y)} dy : \quad \ln V = g(t,x,y) + C_3 .$$

Таким образом, решение (8) имеет вид:

$$V(t,x,y) = F(t, z(t,x,y)) \exp(g(t,x,y)) , \quad (13)$$

здесь $F(t, z)$ – неизвестная функция двух переменных. Подставив (13) в (10), (11), получим

$$F'_t = \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 (z'_x)^2 F''_{xx} + [A(z''_{xx} + 2z'_x g'_x) + Bz'_x - z'_t]F'_x + [A(g''_{xx} + (g'_x)^2) + Bg'_x + C - g'_t]F , \quad (14)$$

$$F(0,z) = \frac{\pi_0(\tilde{x}(0,z,y(0)))}{\exp(g(0,\tilde{x}(0,z,y(0)),y(0)))} . \quad (15)$$

Таким образом, верна

Теорема *Пусть* $(x(t), y(t))$ *– диффузионный процесс, удовлетворяющий системе (1), (2). Тогда условное математическое ожидание* m_t *вычисляется по формуле (3), где ненормализованная фильтрационная плотность* $V(t, x, y(t))$ *находится из (11)–(15).*

Уравнение (14) – обычное (не стохастическое) дифференциальное уравнение параболического типа со случайными коэффициентами, которое не содержит стохастических интегралов. Поэтому задачу (14), (15) можно решать стандартными численно-аналитическими методами.

2. ПРИМЕР

Пусть процесс $(x(t), y(t))$ удовлетворяет следующей системе уравнений Ито:

$$x(t) = x_0 - \int_0^t x(s)y^2(s)\,ds + \int_0^t \sqrt{2}\,y(s)\,dv(s) ,$$
$$y(t) = y_0 + \int_0^t x(s)y^2(s)\,ds + \int_0^t y(s)\,dw(s) , \quad (16)$$

с начальными условиями $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

Ненормализованная фильтрационная плотность для данной задачи имеет следующую структуру:

$$V(t,x,y(t)) = F(t,x)\exp(x\,y(t)) , \quad (17)$$

где $F(t, x)$ – функция, удовлетворяющая задаче Коши

$$F'_t = y^2(t)F''_{xx} + [2y^3(t) - x\,y^2(t)]F'_x + [y^4(t) - y^2(t) - x\,y^3(t) - \tfrac{1}{2}x^2y^2(t)]F ,$$
$$F(0,x) = \pi_0(x)\exp(-x\,y(t)) .$$

В качестве $\pi_0(x)$ возьмем плотность нормального распределения с параметрами (m_0, σ_0), где $m_0 = 3$, $m_0 = 0{,}5$. Решив эту задачу Коши и подставив (17) в (3), получим формулу для оценки значений ненаблюдаемого процесса по траектории наблюдаемого

$$m_t = \frac{2(C_1\varphi(t) + \sigma_0^2)(y(t) + \alpha(t))}{2 + C_1(\psi^2(t) - 1) - 2C_2\varphi^2(t)} + \frac{\psi(t)(2(m_0 - y_0\sigma_0^2) - C_1\lambda(t)}{2 + C_1(\psi^2(t) - 1) - 2C_2\varphi^2(t)} , \quad (18)$$

где

$$C_1 = 2+(1-\sqrt{3})\sigma_0^2\,,\ C_1 = 1-\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})\sigma_0^2\,,$$

$$\psi(t) = \exp\left(-\int_0^t \sqrt{3}y^2(s)\,ds\right),$$

$$\varphi(t) = \int_0^t y^2(s)\psi^2(s)\,ds\,,$$

$$\alpha(t) = \psi(t)\int_0^t \frac{-\sqrt{3}y^3(s)}{\psi(s)}\,ds\,,$$

$$\lambda(t) = 2\int_0^t (y^2(s)\alpha(s)+y^3(s))\psi(s)\,ds\,.$$

Для численного моделирования процессов $x(t)$, $y(t)$ запишем систему (16) в форме Стратоновича:

$$x(t) = x_0 - \int_0^t x(s)y^2(s)\,ds + \int_0^t \sqrt{2}y(s)dv(s) - \tfrac{1}{2}\int_0^t \sqrt{2}y'_v(s)\,ds\,,$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t x(s)y^2(s)\,ds + \int_0^t y(s)dw(s) - \tfrac{1}{2}\int_0^t y'_w(s)\,ds \qquad (16)$$

Решение системы (16) ищем в виде $x(t) = x(t, v(t))$, $y(t) = y(t, w(t))$, где $x(t, v)$ и $y(t, w)$ – гладкие функции. В силу рассуждений, приведенных в работе [3], решение (19) сводится к последовательному решению систем

$$x'_v(t,v) = \sqrt{2}y(t,w(t))\,, \qquad (20)$$
$$y'_w(t,w) = y(t,w)\,,$$

$$x'_t(t,v(t)) = -x(t,v(t))\,y^2(t,w(t))\,, \qquad (21)$$
$$y'_t(t,w(t)) = x(t,v(t))\,y^2(t,w(t)) - \tfrac{1}{2}y(t,w(t))$$

Решение системы (20) имеет вид:

$$x(t,v(t)) = \sqrt{2}C_1(t)e^{w(t)}v(t) + C_2(t)\,, \qquad (22)$$
$$y(t,w(t)) = C_1(t)e^{w(t)}\,,$$

где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ – произвольные функции. Подставив функции из (22) в систему (21), получим уравнения на неизвестные функции $C_1(t)$, $C_2(t)$:

$$C'_1(t) = (\sqrt{2}C_1(t)e^{w(t)}v(t) + C_2(t))C_1^2(t)e^{w(t)} - \tfrac{1}{2}C_1(t)\,, \qquad (23)$$

$$C'_2(t) = -(1+v(t))(\sqrt{2}C_1(t)e^{w(t)}v(t) + C_2(t))C_1^2(t)e^{2w(t)} + \tfrac{1}{2}C_1(t)e^{w(t)}v(t)\,.$$

Эту систему будем решать численно. Траектории независимых винеровских процессов моделируются путем генерирования их случайных приращений, которые имеют нормальное распределение (рис. 1).

Пользуясь стандартными средствами пакета MathLAB, интегрируем систему (23), используя сгенерированные траектории винеровских процессов. Подставив результат в (22), вычислим траектории процессов $x(t)$, $y(t)$ (рис. 2).

Далее, используя полученную траекторию $y(t)$, вычислим по формуле (18) оценку m_t для процесса $x(t)$ (рис. 3).

Таким образом, в настоящей работе задачу нелинейной фильтрации одномерных диффузионных процессов удалось существенным образом упростить путем сведения решения стохастического дифференциального уравнения для ненормализованной фильтрационной плотности к решению обычных дифференциальных уравнений, не содержащих стохастических интегралов.

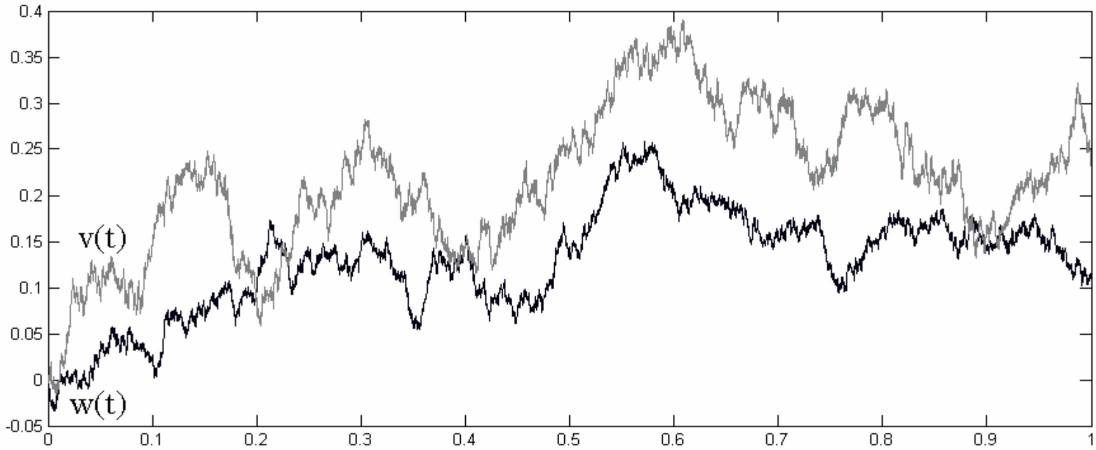

Рис. 1. Траектории винеровских процессов $v(t)$ и $w(t)$

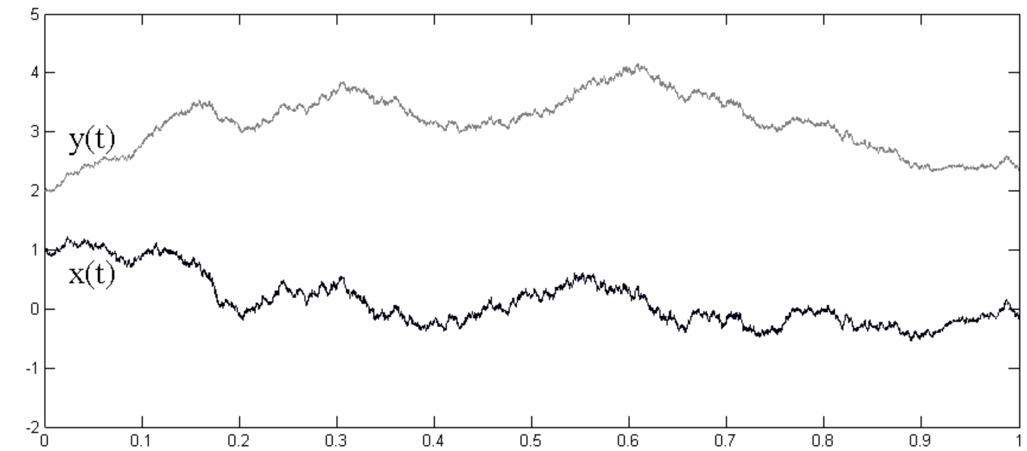

Рис. 2. Траектории процессов $x(t)$ и $y(t)$

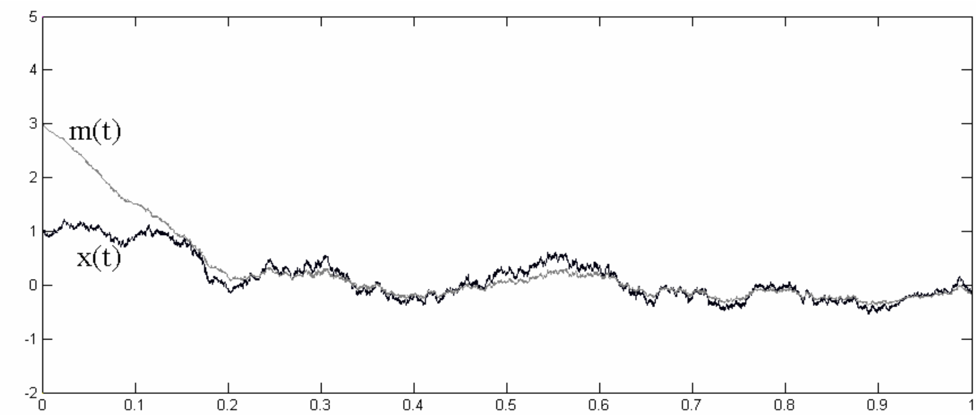

Рис. 3. Процесс $x(t)$ и оценка m_t, выпущенная из точки $m_0 = 3$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Каллианпур, Г.** Стохастическая теория фильтрации / Г. Каллианпур. М. : Наука, 1987. 320с.

2. **Липцер, Р. Ш.** Статистика случайных процессов / Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. М. : Наука, 1974. 696 с.

3. **Насыров, Ф. С.** Симметричные интегралы и стохастический анализ / Ф. С. Насыров // Теория вероятностей и ее применение. 2006. Т. 51, № 3. С. 496–517.

4. **Розовский, Б. Л.** Эволюционные стохастические системы / Б. Л. Розовский. М. : Наука, 1983. 208 с.

ОБ АВТОРАХ

Асадуллин Эльдар Маратович, магистрант каф. математики. Дипл. бакалавр прикл. матем. и информатики (УГАТУ, 2007).

Насыров Фарит Сагитович, проф. той же каф. Дипл. математик (ЛГУ, 1976). Д-р физ.-мат. наук по теории вероятностей, матем. статистике и матем. анализу (ИМ им. Соболева, Новосибирск, 2002). Иссл. в обл. теории случ. процессов, теории функций, фин. математики.