МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519.7

Р. Р. ИСЛАМОВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕАВТОНОМНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В РЕЗОНАНСНЫХ СЛУЧАЯХ

Исследуется математическая модель динамической системы, которая описывается неавтономными квазилинейными дифференциальными уравнениями. Предполагается, что между частотами собственных колебаний системы и частотами возмущающих сил имеют место соотношения с рациональными коэффициентами. Для исследования таких систем применяются интегральные многообразия в специальной форме. Указывается способ выбора полиномиально независимых интегралов порождающей системы в резонансных случаях. *Квазилинейная система ; интегральное многообразие ; резонанс ; полиномиальные интегралы*

Рассматриваются неавтономные квазилинейные системы. Предполагается, что характеристическое уравнение порождающей системы имеет l нулевых, $2p$ чисто мнимых корней и $2m$ комплексных корней с отрицательными вещественными частями, причем кратным корням соответствуют простые элементарные делители. Предполагается также, что между частотами собственных колебаний системы и частотами возмущающих сил имеют место соотношения с рациональными коэффициентами. Для исследования таких систем применяются интегральные многообразия в специальной форме [1]. При этом исследование исходной системы порядка n сводится с помощью уравнений интегрального многообразия к исследованию вспомогательной автономной системы порядка N. Число N определяется количеством полиномиально независимых алгебраических интегралов порождающей системы. Указывается способ выбора полиномиально независимых интегралов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть математическая модель движения динамической системы описывается неавтономными квазилинейными дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dX}{dt} = JX + \varepsilon F_1(t, X) + \varepsilon^2 F_2(t, X) + \dots , \quad (1)$$

где $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ – n-мерный вектор, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, J – диагональная матрица с собственными числами $\lambda_1,\dots,\lambda_n$; проекции вектор-функции $F_j(t,X)$ являются полиномами относительно проекций вектора X с коэффициентами, квазипериодически зависящими от t

$$F_j(t, X) = \sum_s \sum_h F_{js}^{(h)}(X) \exp(is\nu_h t); \quad (F_j(t,0) \equiv 0). \quad (2)$$

Здесь суммы являются конечными, векторы $F_{js}^{(h)}(X)$ – полиномами; $\nu_h > 0$ ($h = 1, 2,\dots,\sigma$) – несоизмеримыми между собой числами.

Предполагается, что собственные числа $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ матрицы J допускают представление

$$\begin{gathered}\lambda_s = 0,\dots,\ \lambda_{l+\alpha-1} = 0,\\ \lambda_{l+\alpha} = i\omega_\alpha,\dots,\lambda_{\nu+\alpha} = -i\omega_\alpha \quad \left(i = \sqrt{-1}\right);\\ \operatorname{Re}\lambda_\beta = \operatorname{Re}\lambda_{m+\beta} < 0;\\ \begin{pmatrix}\beta = l+2p+1,\dots,l+2p+m;\ s = 1,\dots,l;\\ \alpha = 1,\dots,p;\ \nu = l+p\end{pmatrix},\end{gathered} \quad (3)$$

т. е. считается, что характеристическое уравнение системы

$$\frac{dX}{dt} = JX \quad (4)$$

имеет l нулевых, $2p$ чисто мнимых корней и $2m$ комплексных корней с отрицательными вещественными частями, так что $n = l + 2p + 2m$. Пусть числа $\omega_1,\dots, \omega_p$ и $\nu_1,\dots, \nu_\sigma$ удовлетворяют условию

Контактная информация: (347)273-77-35

$$k_1\omega_1+\ldots+k_p\omega_p+k_{p+1}\nu_1+\ldots+k_{p+\sigma}\nu_\sigma=0\,, \quad (5)$$

где k_i – целые числа.

Далее исследуется устойчивость нулевого решения системы (1) при наличии резонансных соотношений вида (5). Для исследования устойчивости решения системы (1) применяются интегральные многообразия в специальной форме [1]. При этом исследование исходной системы (1) порядка n сводится с помощью уравнений интегрального многообразия к исследованию вспомогательной системы порядка N. Число N определяется количеством полиномиально независимых алгебраических интегралов порождающей системы (4).

2. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Наряду с системой (1) рассмотрим вспомогательную систему порядка N

$$\frac{d\zeta}{dt}=\varepsilon G_1(\zeta)+\varepsilon^2 G_2(\zeta)+\ldots. \quad (6)$$

Ищем уравнение интегральных многообразий системы (1) и (6) в форме

$$\zeta=V(t,X)+\varepsilon\Phi_1(t,X)+\varepsilon^2\Phi_2(t,X)+\ldots. \quad (7)$$

Для определения вектор-функций $V(t, X)$, $G_k(\zeta)$, $\Phi_k(t, X)$ дифференцируем соотношение (7) по t в силу уравнений (1) и (6). Затем, исключая из результата дифференцирования вектор ζ с помощью равенств (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим уравнения с частными производными

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{DV}{DX}JX=0\,, \quad (8)$$

$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial t}+\frac{D\Phi_k}{DX}JX=U_k(t,X)+G_k(V), \quad (9)$$

где $\frac{DV}{DX}$, $\frac{D\Phi_k}{DX}$ – матрицы Якоби, а $U_k(t,x)\equiv U_k\begin{pmatrix}F_1,\ldots,F_k,\ldots,G_1,\ldots,G_{k-1},V,\\ \Phi_1,\ldots,\Phi_{k-1}\end{pmatrix}$ – известная вектор-функция при известных $G_1(t, X),\ldots,G_{k-1}(t, X)$ и $V(t, X)$, $\Phi_1(t, X),\ldots, \Phi_{k-1}(t, X)$ ($F_1, \ldots,F_k$ – известные векторы (1)). Из уравнения (8) вытекает, что интегралы порождающей системы (4) при $\varepsilon = 0$ являются проекциями вектора $V(t, X)$. При этом интегралы следует взять такие, чтобы с помощью выбора вектора $G_k(V)$ можно было найти решение $\Phi_k(t, X)$ системы (8). Допустим, что в качестве проекций вектора $V(t, X)$ выбраны полиномиально независимые интегралы $V_1, \ldots,V_n$ системы (4), через которые все интегралы выражаются полиномиально. Тогда вектор $G_k(V)$ будет полиномиальный относительно $V_1, \ldots,V_n$, а проекции вектора $\Phi_k(t, X)$ будут полиномами относительно $x_1,\ldots,x_n$ с коэффициентами, квазипериодически зависящими от t (аналогично свойствам векторов $F_j(t, X)$ (2)). Итак, при указанном выборе проекция вектора $V(t, X)$, векторы $G_k(V)$ и $\Phi_k(t, X)$ последовательно определяются из уравнения (9) с отмеченными выше свойствами, тем самым строятся система (6) и уравнение (7). При этом порядок вспомогательной системы (6) зависит от числа полиномиально независимых интегралов системы (4). Число последних в свою очередь зависит от свойств характеристических чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ матрицы J и соотношений вида (5). Таким образом, важно указать способ выбора проекций вектора $V(t, X)$. Переходя к этому вопросу, отметим, что выбор $V(t, X)$ неоднозначен.

3. НАХОЖДЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНО НЕЗАВИСИМЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ПОРОЖДАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Предварительно рассмотрим $p + \sigma$-мерный вектор K, проекции $k_1,\ldots,k_{p+\sigma}$ которого представляют собой коэффициенты равенства (5). Затем введем $2p + \sigma$-мерный вектор $M = \{m_1,\ldots,m_{2p+\sigma}\}$, где его проекции определяются через проекции вектора K следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\, m_j=m_{p+j}=0 && (k_j=0;\ j\le p);\\
&2)\, m_j=k_j;\ m_{p+j}=0 && (k_j>0;\ j\le p);\\
&3)\, m_j=0;\ m_{p+j}=\left|k_j\right| && (k_j<0;\ j\le p);\\
&4)\, m_{2p+s}=k_{p+s}\quad (s=1,\ldots\sigma).
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Тогда, учитывая соотношения (5) и (10), имеем, что функция

$$V=x_{l+1}^{m_1}\cdots x_{l+2p}^{m_{2p}}\exp i\left(m_{2p+1}\nu_1+\ldots m_{2p+\sigma}\nu_\sigma\right)t\,, \quad (11)$$

соответствующая вектору M, является интегралом порождающей системы (4). Функции вида

$$V_1=x_1,\ldots,V_l=x_l\,, \quad (12)$$

и

$$V_{l+\alpha}=x_{l+\alpha}x_{\nu+\alpha}(\nu=l+p;\ \alpha=1,\ldots,p) \quad (13)$$

с учетом (3) будут также интегралами порождающей системы (4). Обозначим через $\overset{\circ}{M}_\alpha$ вектор, соответствующий интегралу $V_{l+\alpha}$ (13), причем его проекции $\overset{\circ}{m}_{\alpha 1},\ldots,\overset{\circ}{m}_{\alpha,2p+\sigma}$ допускают представление

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{\circ}{m}_{\alpha\alpha}=\overset{\circ}{m}_{\alpha,p+\alpha}=1;\overset{\circ}{m}_{\alpha s}=0 \qquad (s\ne 0,\,p+\alpha)\\
&\qquad(\alpha=1,\ldots,p;\ s=1,\ldots,2p+\sigma).
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Пусть $\{K\}$ – множество всех отличных от нуля векторов K, для которых справедливы равенства (5), и пусть r – размерность этого множества. Тогда найдется такая система r линейно независимых векторов K_γ ($\gamma = 1,\ldots,r$) из $\{K\}$, в которой наибольший делитель целочисленных проекций каждого из векторов равен I. При этом любой вектор $K \in \{K\}$ может быть единственным образом представлен через $K_1,\ldots,K_r$ в виде линейных комбинаций

$$K=\sum_{\gamma=1}^{r}c_\gamma K_\gamma \qquad \left(c_\gamma=0,\pm1,\pm2,\ldots\right). \qquad (15)$$

Обозначая проекции вектора K_γ через $k_{\gamma 1}$, …, $k_{\gamma\, p+\sigma}$, можно написать равенства

$$k_{\gamma 1}\omega_1+\ldots+k_{\gamma p}\omega_p+k_{\gamma p+1}\nu_1+\ldots+k_{\gamma p+\sigma}\nu_\sigma=0, \quad (16)$$

и выражения

$$k_j=\sum_{\gamma=1}^{r}c_\gamma k_{\gamma j} \qquad \left(j=1,\ldots,p+\sigma\right), \qquad (17)$$

для проекций вектора K, вытекающие из соотношений (15). Введем в рассмотрение $2p+\sigma$-мерные векторы M_γ и M_γ^* соответственно с проекциями $m_{\gamma 1}$, …, $m_{\gamma\, 2p+\sigma}$ и $m^*_{\gamma 1}$, …, $m^*_{\gamma\, 2p+\sigma}$, составленными из проекций $k_{\gamma 1}$, …, $k_{\gamma\, 2p+\sigma}$ вектора K аналогично правилу (10), а именно:

$$\begin{aligned}
&1)\, m_{\gamma j}=m_{\gamma\, p+j}=m^*_{\gamma j}=m^*_{\gamma\, p+j}=0;\ (k_{\gamma j}=0);\\
&2)\, m_{\gamma j}=m_{\gamma j}=m^*_{\gamma\, p+j};\, m_{\gamma\, p+j}=m^*_{\gamma j};\ (k_{\gamma j}>0);\\
&3)\, m_{\gamma j}=m^*_{\gamma\, p+j}=0;\ m_{\gamma\, p+j}=m^*_{\gamma j}=\left|k_{\gamma j}\right|\\
&(k_{\gamma j}<0;);\\
&4)\, m_{\gamma 2p+s}=k_{\gamma\, p+s};\, m^*_{\gamma 2p+s}=-k_{\gamma\, p+s};\\
&(s=1,\ldots\sigma).
\end{aligned} \qquad (18)$$

Из равенств (16) и (18) следует, что функции

$$\begin{aligned}
&V_{\nu+\gamma}=x_{l+1}^{m_{\gamma 1}}\cdots x_{l+2p}^{m_{\gamma\, 2p}}\times\\
&\times\exp i\left\{m_{\gamma\, 2p+1}\nu_1+\ldots+m_{\gamma\, 2p+\sigma}\nu_\sigma\right\}t,\\
&V_{\nu+r+\gamma}=x_{l+1}^{m^*_{\gamma 1}}\cdots x_{l+2p}^{m^*_{\gamma\, 2p}}\times\\
&\times\exp i\left\{m^*_{\gamma\, 2p+1}\nu_1+\ldots+m^*_{\gamma\, 2p+\sigma}\nu_\sigma\right\}t,
\end{aligned} \qquad (19)$$

соответствующие векторам M_γ и M_γ^* являются интегралами порождающей системы (4). Принимая во внимание соотношения (13), (18), (19), находим, что существуют зависимости

$$V_{\nu+\gamma}V_{\nu+r+\gamma}=V_{l+1}^{\left|k_{\gamma 1}\right|}\cdots V_{l+p}^{\left|k_{\gamma p}\right|}\ \left(\gamma=1,\ldots,r\right), \quad (20)$$

где $k_{\gamma 1}$, …, $k_{\gamma\, p}$ – коэффициенты в равенстве (16).

Пусть $\{M\}$ – совокупность векторов $M = \{m_1, \ldots, m_{2p+\sigma}\}$, где его проекции образуются из проекций вектора $K \in \{K\}$ согласно правилу (10). Любой вектор $M \in \{M\}$ можно выразить с помощью введенных векторов $M^\circ_\alpha, M_\gamma, M^*_\gamma$.

Принимая во внимание соотношения (10), (17), (18), найдем для вектора $M \in \{M\}$ выражение

$$M=\sum_{\gamma=1}^{r}\left|c_\gamma\right|\tilde{M}_\gamma\,. \qquad (21)$$

Здесь c_γ – коэффициенты в равенстве (15); $\tilde{M}_\gamma$ – векторы вида

$$\tilde{M}_\gamma=\begin{cases}M_\gamma & \text{при} \quad c_\gamma>0;\\ M^*_\gamma & \text{при} \quad c_\gamma<0.\end{cases} \qquad (22)$$

Таким образом, интеграл (11) порождающей системы (4), соответствующий вектору $M \in \{M\}$, выражается в виде

$$V=\tilde{V}_1^{\left|c_1\right|}\cdots\tilde{V}_r^{\left|c_r\right|}, \qquad (23)$$

где $\tilde{V}_\gamma$ – интеграл, принимающий значения:

$$\tilde{V}_\gamma=\begin{cases}V_{\nu+\gamma} & \text{при} \quad c_\gamma>0;\\ V_{\nu+r+\gamma} & \text{при} \quad c_\gamma<0;\end{cases} \qquad (24)$$
$$\left(\nu=l+p,\ \gamma=1,\ldots,r\right),$$

где $V_{\nu+\gamma}, V_{\nu+r+\gamma}$ – функции (19).

4. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ

Итак, учитывая соотношение (23), приходим к выводу о том, что любой интеграл системы (4), полиномиальный относительно x_1, …,x_{l+2p} и квазипериодически зависящий от t, выражается через систему $l+p+2r$ функций (12), (13) и (19). Здесь указанный интеграл выражается полиномиально через эти $l+p+2r$ функций. Тогда, принимая функции (12), (13), (19) в качестве проекции вектора $V(t, X)$, с помощью уравнения (7) приходим к вспомогательной системе (6) порядка $l+p+2$, где переменные $\zeta_1,\ldots, \zeta_{l+2p+2r}$ связаны соотношениями

$$\zeta_{\nu+\gamma}\zeta_{\nu+r+\gamma}=\zeta_{l+1}^{\left|k_{\gamma 1}\right|}\cdots\zeta_{l+p}^{\left|k_{\gamma p}\right|} \qquad (25)$$
$$\left(\nu=l+p,\ \gamma=1,\ldots,r\right),$$

вытекающими из тождеств (20). Так как $\zeta_{\nu+\gamma}$ и $\zeta_{\nu+r+\gamma}$ комплексно-сопряженные переменные, то, полагая

$$\zeta_s=\tilde{\zeta}_s;\ \zeta_{l+\alpha}=\tilde{\zeta}_{l+\alpha}$$
$$\left(s=1,\ldots,l;\ \alpha=1,\ldots,p\right) \qquad (26)$$
$$\zeta_{\nu+\gamma}=\tilde{\zeta}_{\nu+\gamma}+i\tilde{\zeta}_{\nu+r+\gamma};\ \zeta_{\nu+r+\gamma}=\tilde{\zeta}_{\nu+\gamma}-i\tilde{\zeta}_{\nu+r+\gamma},$$

получим соотношения (25) в форме

$$\tilde{\zeta}^2_{\nu+\gamma}+\tilde{\zeta}^2_{\nu+r+\gamma}=\tilde{\zeta}^{|k_{\gamma 1}|}_{l+1}\dots\tilde{\zeta}^{|k_{\gamma p}|}_{l+p} \quad (\gamma=1,\dots,r). \tag{27}$$

Заменяя проекции вектора ζ в уравнении (6) согласно формуле (26) и исключая переменные $\tilde{\zeta}_{\nu+r+\gamma}$ с помощью соотношений (27), приходим окончательно к системе порядка $l+p+r$

$$\frac{d\tilde{\zeta}}{dt}=\varepsilon\tilde{G}_1\left(\tilde{\zeta}\right)+\varepsilon^2\tilde{G}_2\left(\tilde{\zeta}\right)+\dots. \tag{28}$$

Здесь $\tilde{\zeta}=\left\{\tilde{\zeta}_1,\dots\tilde{\zeta}_{l+p+r}\right\}$ – вектор; $\tilde{G}_j\left(\tilde{\zeta}\right)$ – вектор-функция, проекции которого являются непрерывными функциями от переменных $\tilde{\zeta}_1,\dots\tilde{\zeta}_{l+p+r}$.

Теорема 1. Если устойчиво (неустойчиво) нулевое решение системы (28), то устойчиво (неустойчиво) нулевое решение системы (1) при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Пусть нулевое решение системы (28) устойчиво (неустойчиво). Тогда на основании равенств (25–27) вытекает устойчивость (неустойчивость) нулевого решения системы (6). Согласно уравнению интегрального многообразия (7) систем (1) и (6) следует устойчивость (неустойчивость) нулевого решения системы (1). Теорема доказана.

Исследование стационарных режимов в системе (1) приводит к исследованию постоянных решений системы (28). Система (28) пригодна для исследования устойчивости нулевого решения системы (1).

5. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ГИРОМАЯТНИКА ПРИ ВИБРАЦИИ ОСНОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Для составления уравнений движения гиромаятника выберем систему координат $O\xi\eta\xi$, начало которой совпадает с точкой опоры, причем ось ζ направлена по вертикали, а оси ξ, η находятся в горизонтальной плоскости. С внутренней рамкой (кожухом) свяжем оси Резаля $Oxyz$. При этом ось z направим по оси собственного вращения гироскопа, ось y – по оси подвеса внутренней рамки, а ось x – перпендикулярно к двум первым осям в соответствии с правой системой координат. Положение осей Резаля $Oxyz$ относительно трехгранника $O\xi\eta\xi$ определим следующим образом: углом α поворота вокруг оси ξ и углом β поворота вокруг оси y. Обозначим через φ угол поворота ротора гироскопа относительно кожуха. Считается, что центр тяжести гиромаятника расположен на оси z на расстоянии z_0 от начала координат.

Пусть основание прибора совершает вибрации в вертикальном направлении по закону $\zeta = N_1\cos\theta t$, где N_1 и θ – амплитуда и частота вибрации. Тогда нелинейные уравнения движения гиромаятника при вибрации основания в вертикальном направлении с учетом вязкого трения в опорах подвесов можно записать в виде

$$\begin{cases} I(\beta)\ddot{\alpha}+H\dot{\beta}\cos\beta-K_1\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin 2\beta= \\ =-z_0\left(P-mN_1\theta^2\cos\theta t\right)\sin\alpha\cos\beta-n_1\dot{\alpha}; \\ F\ddot{\beta}-H\dot{\alpha}\cos\beta-\dfrac{K_1}{2}\dot{\alpha}^2\sin 2\beta= \\ =-z_0\left(P-mN_1\theta^2\cos\theta t\right)\cos\alpha\sin\beta-n_2\dot{\beta}; \\ H=C\left(\dot{\varphi}+\dot{\alpha}\sin\beta\right)=\text{const}, \end{cases} \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned} &I(\beta)=I_1\left(1-\sigma_1\sin^2\beta\right); \\ &I_1=mz_0^2+A_0+A_1+A_2; \\ &\sigma_1=\frac{K_1}{I_1}; \\ &K_1=mz_0^2+A_0+A_1-C_1; \\ &F=mz_0^2+A_0+B_1. \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь A_0 и C – экваториальный и осевой моменты инерции ротора; A_1, B_1, C_1 – моменты инерции внутренней рамки относительно осей x, y, z; A_2 – момент инерции наружной рамки относительно оси ξ; m, P – масса и вес ротора гиромаятника. Переходя к безразмерному времени $\tau=\dfrac{H}{\sqrt{I_1F}}t$ и вводя безразмерные параметры

$$\begin{aligned} &\Omega_1=\sqrt{\frac{F}{I_1}};\ \Omega_2=\sqrt{\frac{I_1}{F}};\ \sigma_1=\frac{K_1}{I_1}; \\ &\sigma_2=\frac{K_1}{F};\ \mu_1=\frac{z_0PF}{H^2};\ \mu_2=\frac{z_0PI_1}{H^2}; \\ &\upsilon=\frac{\theta\sqrt{I_1F}}{H};\ \chi_1=\frac{z_0mN_1\upsilon^2}{I_1};\ \chi_2=\chi_1\Omega_2^2; \\ &h_1=\frac{\mu_1\Omega_1}{H};\ h_2=\frac{\mu_2\Omega_2}{H}, \end{aligned} \tag{31}$$

а также новые обозначения переменных

$$q_1=\alpha,\ q_2=\beta \tag{32}$$

и разлагая тригонометрические функции в ряд Маклорена, представим систему (29) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d^2q_1}{d\tau^2}+\Omega_1\dfrac{dq_2}{d\tau}+\mu_1 q_1=\varepsilon Q_1(\tau,q,\dfrac{dq}{d\tau}); \\ \dfrac{d^2q_2}{d\tau^2}-\Omega_2\dfrac{dq_1}{d\tau}+\mu_2 q_2=\varepsilon Q_2(\tau,q,\dfrac{dq}{d\tau}), \end{cases} \quad (33)$$

где используются обозначения

$$Q_1(\tau,q,\frac{dq}{d\tau})\equiv\alpha_1 q_1-\beta_1\frac{dq_2}{d\tau}+\chi_1\cos\upsilon\tau q_1-$$
$$-h_1\frac{dq_1}{d\tau}-\Omega_1\left(\sigma_1-\frac{1}{2}\right)q_2^2\frac{dq_1}{d\tau}+$$
$$+2\sigma_1 q_2\frac{dq_1}{d\tau}\frac{dq_2}{d\tau}, \quad (34)$$
$$Q_2(\tau,q,\frac{dq}{d\tau})\equiv\alpha_2 q_2-\beta_2\frac{dq_1}{d\tau}+\chi_2\cos\upsilon\tau q_2-$$
$$-h_2\frac{dq_2}{d\tau}-\frac{\Omega_2}{2}q_2^2\frac{dq_1}{d\tau}-\sigma_2 q_2\left(\frac{dq_1}{d\tau}\right)^2.$$

Здесь α_1, α_2, β_1, β_2 – малые расстройки частот, причем в выражениях для Q_1, Q_2 (34) не учитываются нелинейные члены, коэффициенты которых содержат безразмерные параметры μ_1, μ_2, χ_1, χ_2 (31), которые предполагаются малыми, параметры h_1, h_2 (31) также считаются малыми (слабая диссипация). В правых частях уравнения (33) формально вводится малый параметр ε, отражающий малость членов вида (34). Квадраты частот собственных колебаний системы (33) при $\varepsilon = 0$ определяются из формулы

$$2\omega_{1,2}^2=1+\mu_1+\mu_2\pm\sqrt{(1+\mu_1+\mu_2)^2-4\mu_1\mu_2}\,, \quad (35)$$

где значения параметров μ_1, μ_2 приведены в (31).

Применяя вышеизложенные результаты, исследуем устойчивость нулевого решения системы (33) в случае, когда между частотой собственных колебаний ω_1 (35) и частотой υ (31) возмущающих сил имеет место соотношение вида (16):

$$2\omega_1-\upsilon=0. \quad (36)$$

Предварительно, используя преобразования

$$\begin{cases} q_1=-a(x_1+x_3)+b(x_2+x_4); \\ q_2=i\Omega_2(\omega_1(x_1-x_3)+\omega_2(x_2-x_4)); \\ \dfrac{dq_1}{d\tau}=i(\omega_1 a(x_1-x_3)+\omega_2 b(x_2-x_4)); \\ \dfrac{dq_2}{d\tau}=-\Omega_2(\omega_1^2(x_1+x_3)+\omega_2^2(x_2+x_4)); \end{cases} \quad (37)$$

$$i=\sqrt{-1}$$

где

$$a=\omega_1^2-\mu_2,\ b=\mu_2-\omega_2^2, \quad (38)$$

приведем систему к виду (1):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_k}{d\tau}=i\omega_k x_k+\varepsilon f_k(\tau,x), \\ \dfrac{dx_{2+k}}{d\tau}=-i\omega_k x_{2+k}+\varepsilon f_{2+k}(\tau,x). \end{cases} \quad (k=1,2) \quad (39)$$

Здесь

$$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\},$$
$$f_1(\tau,x)\equiv\frac{\omega}{2}\left(\frac{i}{\omega_1}\hat{Q}_1-\frac{\Omega_1}{a}\hat{Q}_2\right);$$
$$f_2(\tau,x)\equiv-\frac{\omega}{2}\left(\frac{i}{\omega_2}\hat{Q}_1+\frac{\Omega_1}{b}\hat{Q}_2\right); \quad (40)$$
$$f_3(\tau,x)\equiv-\frac{\omega}{2}\left(\frac{i}{\omega_1}\hat{Q}_1+\frac{\Omega_1}{a}\hat{Q}_2\right);$$
$$f_4(\tau,x)\equiv\frac{\omega}{2}\left(\frac{i}{\omega_2}\hat{Q}_1-\frac{\Omega_1}{b}\hat{Q}_2\right),$$

причем

$$\omega=\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)^{-2}>0. \quad (41)$$

Величины a и b определены выше (38); $\hat{Q}_k\,(k=1,2)$ – функции $Q_k(\tau,q,\frac{dq}{d\tau})$ (34), в которых переменные $q_k,\frac{dq_k}{d\tau}$ заменены по формулам (37). При исследовании устойчивости нулевого решения системы (39) в случае равенства (36) интегралы порождающей системы возьмем в виде

$$V_1=x_1e^{-i\omega_1\tau}, V_2=x_3e^{i\omega_1\tau}, V_3=x_2x_4. \quad (42)$$

В данном случае вспомогательная система (6) будет порядка $N = 3$:

$$\frac{d\varsigma_s}{d\tau}=\varepsilon g_s(\varsigma)+\ldots \qquad (\varsigma=\{\varsigma_1,\varsigma_2,\varsigma_2\}). \quad (43)$$

Ищем уравнение интегрального многообразия системы (39) и (43) в форме (7):

$$\varsigma_s=V_s+\varepsilon\varphi_s(\tau,x)+\ldots \quad (s=1,2,3). \quad (44)$$

Дифференцируя уравнения (44) по τ в силу систем (39) и (43) и исключая ζ согласно (44), придем к уравнениям вида (9), из которых определим функции $g_s(\zeta)$, $\varphi_s(\tau, x)$ (s = 1, 2, 3). Окончательно получим систему (43) в первом приближении:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varsigma_1}{d\tau}=\varepsilon\dfrac{\omega}{2}\left(i\gamma_0\varsigma_1+iN_0\varsigma_2-M_0\varsigma_1+i\left(r_1\varsigma_1^2\varsigma_2-r_2\varsigma_1\varsigma_3\right)\right), \\ \dfrac{d\varsigma_2}{d\tau}=\varepsilon\dfrac{\omega}{2}\left(-i\gamma_0\varsigma_2-iN_0\varsigma_1-M_0\varsigma_2-i\left(r_1\varsigma_1\varsigma_2^2-r_2\varsigma_2\varsigma_3\right)\right), \\ \dfrac{d\varsigma_3}{d\tau}=-\varepsilon r_2\varsigma_1, \end{cases}$$

(45)

где

$$\gamma_0 = \frac{a}{\omega_1}\alpha_1 - \frac{\omega_2}{a}\alpha_2 + \omega_1(\Omega_2\beta_1 + \Omega_1\beta_2),$$

$$N_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_1}{a}\chi_2 - \frac{a}{\omega_1}\chi_1\right),\ M_0 = ah_1 + \frac{\omega_1^2}{a}h_2,$$

$$r_1 = \Omega_2^2\omega_1^3\left(2\sigma_1 a - \frac{1}{2} + \sigma_1\right) + 3\omega_1^3\left(\sigma_2 a - \frac{\Omega_1^2}{a}\right), \qquad (46)$$

$$r_2 = \omega_1\omega_2^2\Omega_2^2\left(\frac{1}{2} - \sigma_1 + 2\sigma_1 b\right) + \omega_1\omega_2^2 \times$$

$$\times\left(\Omega_2^2 - 2\sigma_2\frac{b^2}{a} + 4\sigma_2 b\right), r_3 = \omega\left(h_1 b + \frac{\omega_2^2}{b}h_2\right) > 0.$$

Переходя к вещественным переменным ξ_1 и η_1по формуле

$$\varsigma_1 = \xi_1 + i\eta_1,\ \varsigma_2 = \xi_1 - i\eta_1, \qquad (47)$$

систему (45) можно представить в форме

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{d\tau} = \varepsilon\dfrac{\omega}{2}\times \\ \times\left(-\gamma_0\eta_1 + N_0\eta_1 - M_0\xi_1 - r_1\eta_1\left(\xi_1^2 + \eta_1^2\right) + r_2\varsigma_3\eta_1\right), \\ \dfrac{d\eta_1}{d\tau} = \varepsilon\dfrac{\omega}{2}\times \\ \times\left(\gamma_0\xi_1 + N_0\xi_1 - M_0\eta_1 + r_1\xi_1\left(\xi_1^2 + \eta_1^2\right) - r_2\varsigma_3\xi_1\right), \\ \dfrac{d\varsigma_3}{d\tau} = -\varepsilon r_3\varsigma_3\ (r_3 > 0). \end{cases} \qquad (48)$$

Стационарное решение системы (48) или (33) находим, приравнивая нулю правые части уравнений (48). Тогда получим условие существования стационарного решения

$$r_1^2\rho^4 + 2\gamma_0 r_1\rho^2 + M_0^2 - N_0^2 + \gamma_0^2 = 0, \qquad (49)$$

где

$$\rho^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2. \qquad (50)$$

Условие устойчивости нулевого решения системы (48), а следовательно, систем (39), (33) и (29) принимают вид

$$\gamma_0^2 + M_0^2 - N_0^2 > 0. \qquad (51)$$

ВЫВОДЫ

Итак, указаны способы выбора полиномиально независимых алгебраических интегралов порождающей системы (4) в случае l нулевых, $2p$ чисто мнимых корней и $2m$ комплексных корней с отрицательными вещественными частями при наличии r резонансных отношений (16). Эти интегралы используются затем при построении уравнения интегральных многообразий. С помощью уравнений интегральных многообразий исследование системы (1) порядка $l+2p+2m$ приводится к исследованию вспомогательной системы порядка N, причем $N = l+p+r$. Вспомогательная система позволяет построить и исследовать устойчивость стационарных режимов исходной системы, а также изучить процесс их установления.

Показано, что исследование устойчивости решений квазилинейной неавтономной системы дифференциальных уравнений порядка $l+2p+2m$ в сложном резонансном случае можно свести к исследованию устойчивости вспомогательной автономной системы порядка N, где $N = l+p+r$. В качестве примера приводится исследование устойчивости гиромаятника при вибрации основания с помощью интегральных многообразий. Заметим, что в частных случаях данная схема исследования устойчивости приводится в работах [2–6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Валеев, К. Г.** Об одной теореме Ляпунова / К. Г. Валеев // Сб. «Математическая физика». Киев, 1971. Вып. 9. С. 17–23.
2. **Ляпунов, А. М.** Общая задача об устойчивости движения / А. М, Ляпунов. М. : Гостехиздат, 1950.
3. **Малкин, И. Г.** Теория устойчивости и движения / И. Г. Малкин. М. : Наука, 1966.
4. **Каменков, Г. В.** Исследование нелинейных колебаний с помощью функции Ляпунова / Г. В. Каменков // Тр. ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы. Сер. теор. механ. 1966. Вып. 3. Т. 15.
5. **Мельников, Г. И.** Об определении переходных процессов в нелинейных автоматических системах / Г. И. Мельников // Автоматика и телемеханика. 1955. Т. 26, № 1.
6. **Хапаев, М. М.** Обобщение второго метода Ляпунова и исследование на устойчивость некоторых резонансных задач / М. М. Хапаев // ДАН СССР. 1970. Т. 193, № 1.

ОБ АВТОРЕ

Исламов Роберт Рахимович, доц. каф. математики. Дипл. инж.-мех. (УАИ, 1966). Канд. физ.-мат. наук по диф. и интегр. уравнениям. (Ин-т мат. АН УССР, 1973). Иссл. в обл. устойчивости решений обыкн. диф. ур-й.