Уфа : УГАТУ, 2008 Вестник УГАТУ • Управление, ВТиИ Т. 10, № 2 (27). С. 142–149

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 517.98:519.71

Н. Ф. ВАЛЕЕВ

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается задача определения неизвестных параметров линейного оператора по собственным значениям. Этот класс задач возникает при конструировании линейных динамических систем с заданными резонансными характеристиками, при диагностике колеблющихся систем по значениям собственных колебаний. Сформулированы и доказаны достаточные условия существования, изолированности и устойчивости решений задачи, даны оценки количества решений. *Обратная спектральная задача* ; *управление собственными частотами* ; *системы алгебраических уравнений*

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе рассматривается задача определения неизвестных параметров линейного оператора по конечному набору точек спектра — многопараметрическая обратная спектральная задача (сокращенно МПОСЗ). Естественными источниками нашей постановки обратной спектральной задачи являются, с одной стороны, классические обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов, а с другой — прикладные задачи управления частотно-резонансными характеристиками различных технических устройств, описываемых линейными динамическими системами, и задачи вычислительной диагностики технических систем по частотам собственных колебаний.

Одной из первых работ, посвященных изучению обратных спектральных задач для дифференциальных операторов, была статья В. А. *Амбарцумяна* [1], вышедшая в 1929 г., в которой изучалась краевая задача $y'' + (\lambda + q(x))y = 0$, $y'(0) = y'(\pi) = 0$. В статье было показано, что если $\int_0^\pi q(x)dx = 0$, а собственные значения суть числа $1^2, 2^2, \dots$, то $q(x)$ должна тождественно равняться нулю. Иначе говоря, краевая задача может быть восстановлена по одному набору собственных значений.

Однако в 1946 г. Г. *Борг* установил важный факт (см. [8]): задание одного набора собственных значений, вообще говоря, не определяет дифференциального оператора. Для восстановления дифференциальных операторов стали использоваться спектральные данные, которые несут в себе информацию большую, чем один набор собственных значений. В качестве спектральных данных, в частности, используются: 1) спектральная функция; 2) спектр и весовые числа; 3) функция Вейля; 4) два, три и большее число спектров, соответствующих различным краевым условиям при одном и том же дифференциальном выражении[1].

Классическая теория обратных спектральных задач к настоящему времени нашла многочисленные приложения в задачах математической физики, химии и технических наук. Тем не менее, она не в состоянии охватить весь спектр прикладных задач, в которых требуется по спектру собственных колебаний восстановить свойства объекта. Речь прежде всего идет о тех случаях, когда мы не располагаем полным спектром собственных колебаний объекта, а лишь его конечной частью. К таковым можно отнести задачи, в которых требуется по конечному набору значений собственных колебаний системы найти параметры динамической системы, провести диагностику технической системы или же посредством доступных параметров объекта (динамической системы) придать ей те или иные частотно-резонансные характеристики (см. [10]).

Серьезным препятствием применения к вышеперечисленным типам задач классической теории является то, что она, как уже было отмечено, оперирует полными спектраль-

[1]Исследованиями в этом направлении занимались *Н. Левинсон*, *М. Г. Крейн*, *Б. М. Левитан*, *В. А. Марченко*, *В. А. Садовничий*, *В. А. Юрко* и другие (подробнее см. [2–16]).

ными данными, то есть бесконечным числом данных (например, собственных значений). При решении прикладных задач, как правило, не приходится рассчитывать на полноту спектральных данных. Требуется, зная лишь конечное число собственных значений, получить информацию о значениях параметров динамической системы (задача вычислительной диагностики) или же наоборот, подобрать конечное число некоторых параметров динамической системы так, чтобы она имела бы заданный набор значений частот собственных колебаний.

Все эти задачи, по существу, сводятся к обратным спектральным задачам для линейных операторов, в которых требуется по конечному набору собственных чисел оператора найти возможные значения неизвестных параметров системы. Такие задачи уместно называть многопараметрическими обратными спектральными задачами.

Разумеется, такая формулировка задачи является весьма широкой, в частности, в ней даже не указывается вид зависимости линейного оператора от параметров, не описан класс этих операторов и т. д. Поэтому необходимо ограничиться конкретным, для выработки единых подходов, и в то же время содержательным в плане приложений, классом задач.

В данной статье мы исследуем многопараметрическую обратную спектральную задачу в конечномерном евклидовом пространстве E^n в следующей постановке. Пусть

$$B(\vec{p}) = B_0 + p_1 B_1 + p_2 B_2 + \ldots + p_m B_m \,, \quad (1)$$

где $B_k : E^n \to E^n$, $k = 0, 1, \ldots, m \leq n$ — самосопряженные операторы, $\vec{p} \in \mathbb{C}^m$.

Постановка МПОСЗ. *Найти возможные значения вектора $\vec{p}$ из пространства $\mathbb{C}^m$, при которых наперед заданные числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ являются собственными значениями оператора $B(\vec{p})$.*

Определение 1 [(*Решение* МПОСЗ)]. *Решением многопараметрической обратной спектральной задачи для заданного набора чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, будем называть вектор $\vec{p*}$ из пространства $\mathbb{C}^m$ такой, что эти числа будут собственными значениями оператора $B(\vec{p*})$. При этом набор чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ будем называть спектральными данными и обозначать $\vec{\sigma}_m$, а $\vec{p*}$ условимся называть вектором управления.*

Приведем несколько характерных математических моделей обратных спектральных задач, проясняющих данную постановку обратной спектральной задачи.

1. *Линейная динамическая система* с конечным числом степеней свободы

При рассмотрении динамических систем, описывающих установившиеся колебания систем упруго связных объектов, можно, введя обобщенный вектор перемещений $\vec{u}(t)$, записать уравнение движения в операторной форме (см. в [9])

$$A \frac{d^2 \vec{u}(t)}{dt^2} = C \vec{u}(t) \,,$$

где «инерционный» оператор A и «упругий» оператор C зависят от некоторых параметров $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$. Собственные частоты колебаний данной динамической системы являются решениями задачи на собственные значения:

$$B(\vec{p}, \lambda)\vec{x} = \left(\lambda^2 A(\vec{p}) + C(\vec{p})\right) \vec{x} = 0 \,.$$

Относительно последнего оператора можно рассмотреть либо задачу диагностики по собственным значениям, либо задачу управления собственными колебаниями исходной динамической системы.

В частности, если считать $A(\vec{p})$ невырожденной матрицей-константой и $C(\vec{p}) = p_1 C_1 + p_2 C_2 + \ldots + p_m C_m$, то тогда мы получим МПОСЗ для оператора вида (1).

2. *Дискретный оператор Штурма–Лиувилля*

Рассмотрим дискретный оператор Штурма–Лиувилля с граничными условиями Дирихле (см. в [12]):

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p_i q_i y_i = \lambda y_i \,, \qquad (2)$$

где $0 < i < m+1$, а граничные условия имеют вид $y_0 = 0$, $y_{m+1} = 0$.

Для данного оператора можно рассматривать задачу о восстановлении потенциала этого оператора $q = (p_1 q_1, p_2 q_2, \ldots, p_m q_m)$ по m собственным значениям λ_j.

Обозначим трехдиагональную матрицу m-го порядка (дискретный оператор для второй производной)

$$B_0 = \begin{matrix} 2/h^2 & -1/h^2 & 0\ldots & 0 \\ -1/h^2 & 2/h^2 & -1/h^2\ldots & 0 \\ 0 & -1/h^2 & 2/h^2\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0\ldots & -1/h^2 & 2/h^2 \end{matrix}$$

с элементами, равными $\frac{2}{h^2}$ на главной диагонали и $\frac{-1}{h^2}$ на остальных двух диагоналях, и пусть B_k матрицы того же порядка с нулевыми элементами кроме k-го элемента на главной диагонали, равного q_k.

Тогда оператор (2) можно представить в виде $B(\vec{p}) = B_0 + p_1B_1 + p_2B_2 + \ldots + p_{m-1}B_{m-1} + p_mB_m$ и исследовать задачу о восстановлении параметров p_i по спектру оператора $B(\vec{p})$.

Аналогично можно рассматривать дискретные модели более высоких порядков с различными граничными условиями, и при этом вовсе необязательно, чтобы порядок матрицы $B(\vec{p})$ совпадал с количеством неизвестных параметров p_i.

3. *Определение коэффициентов граничных условий*

МПОСЗ можно формулировать и для задач, в которых требуется определить вид закрепления по собственным частотам.

В частности, оператор Штурма–Лиувилля с 4 неизвестными параметрами в граничных условиях:

$$-y''(x,\lambda) + q(x)y(x,\lambda) = \lambda^2 y(x,\lambda)\,,$$

$y'(0,\lambda) - (b_0 + \lambda^2 b_1)y(0,\lambda) = 0, y'(1,\lambda) + (d_0 + \lambda^2 d_1)y(1,\lambda) = 0$ можно представить в виде оператора $B(\vec{p},\lambda) = B_0 + p_1B_1 + \ldots + p_4B_4 - \lambda^2$ (подробности изложены в [5]). Затем для последнего оператора можно поставить МПОСЗ.

Далее рассмотрим ряд понятий, связанных с МПОСЗ. Простые примеры МПОСЗ, например, когда все операторы B_k коммутируют между собой, показывают, что не всякое решение имеет содержательный смысл. Это в первую очередь связано с тем, что у МПОСЗ могут существовать решения, неустойчивые к малым возмущениям операторов B_k или чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$. В нижеследующем пункте будет рассмотрена модельная задача, проясняющая неустойчивость решений к малым возмущениям спектральных данных $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$.

В связи с этим введем в рассмотрение класс МПОСЗ которые будут устойчивыми к возмущениям спектральных данных.

Определение 2 [Корректность МПОСЗ]. *Будем говорить, что МПОСЗ корректна, если для любых спектральных данных* $\sigma_m = \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m\} \in R^m$ *найдется хотя бы один вектор управления* $\vec{p*}(\sigma_m)$.

Ниже будет показано, что корректные МПОСЗ, как правило, имеют много решений. При этом возможна следующая ситуация: при некотором векторе управления $\vec{p*}$ собственные значения оператора $B(\vec{p*})$ из числа спектральных данных $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ могут оказаться кратными. Фактически это будет означать, что один и тот же вектор управления будет определять различные состояния системы. Для описания таких ситуаций мы введем понятие индекса вектора управления.

Пусть $\vec{p*}$ — вектор управления МПОСЗ для оператора (1) и $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ — ее спектральные данные. Введем в рассмотрение проекторы

$$G_k(\vec{p*}) = \frac{1}{2\pi}\oint_{|z-\mu_k|=\epsilon} (B(\vec{p*}) - zI)^{-1} dz\,, \quad (3)$$

и обозначим $r_k = \mathrm{rang}(G_k(\vec{p*}))$, где $k = 1, \ldots, m$.

Определение 3 [(*Индекс вектора управления МПОСЗ*)]. *Индексом или кратностью вектора управления* $\vec{p*}$ *МПОСЗ будем называть величину*

$$ind(\vec{p*}) = \prod_{k=1}^{m} r_k\,.$$

Далее, когда будет идти речь о количестве решений МПОСЗ, мы будем считать каждый вектор управления вместе с его кратностью. Здесь отметим, что можно рассмотреть и другие определения кратных решений МПОСЗ. Но поскольку в данной статье роль понятия кратности решения невелика, и она понятна в контексте общей теории алгебраических уравнений, мы не будем здесь обсуждать аналогичные определения.

2. МОДЕЛЬНАЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

В данном пункте мы рассматриваем МПОСЗ для модельного класса операторов $\widehat{B}(\vec{p})$. В качестве модельного нами выбран оператор $\widehat{B}(\vec{p})$, для которого МПОСЗ допускает явное решение. Основной целью исследования модельного оператора является иллюстрация и пояснения к введенным выше понятиям. Также свойства модельного оператора будут использованы при доказательстве основных утверждений данной статьи.

Пусть

$$\widehat{B}(\vec{p}) = \widehat{B}_0 + p_1\widehat{B}_1 + \ldots + p_m\widehat{B}_m\,, \quad (4)$$

где $\widehat{B}_i\widehat{B}_j = \widehat{B}_j\widehat{B}_i$ и $\widehat{B}_j^* = \widehat{B}_j$ для всех $i, j = 0, \ldots, m$.

Поскольку операторы $\widehat{B}_j$ в (4) самосопряженные и коммутируют между собой, то мы можем считать все матрицы $\widehat{B}_j$ диагональными, и тогда собственные векторы оператора $\widehat{B}(\vec{p})$ будут совпадать с векторами $\vec{e}_k$ канонического базиса пространства E^n. Соответствующее k-е собственное значение оператора $\widehat{B}_j$ будем обозначать b_k^j. Теперь легко вычислить собственные значения оператора $\widehat{B}(\vec{p})$, а именно:

$$\lambda_k(\vec{p}) = \sum_{j=1}^{m} p_j b_k^j + b_k^0\,, \quad k = 1, \dots, n\,. \qquad (5)$$

Составим из набора собственных значений b_k^j операторов $\widehat{B}_j$ матрицу F размера $n \times m$ такую, что

$$F = (b_k^j)\,, \quad k = 1, \dots, m\,;\ j = 1, \dots, n\,; \qquad (6)$$

$F : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$.

Формулу (5) представим в виде:

$$F\vec{p} = \vec{f},\ \vec{f} = (\lambda_1 - b_1^0, ..., \lambda_n - b_n^0)\,. \qquad (7)$$

Предположим, что существует оператор ортогонального проектирования G на m-мерное подпространство E^n такой, что матрица GF не вырождена в GE^n. Далее для определенности будем считать, что образом G является подпространство, порожденное векторами $\vec{e}_k$, $k = 1, \dots, m$. Тогда уравнение

$$GF\vec{p} = G\vec{f}$$

имеет решение при любой правой части $\vec{f}$. Теперь перепишем последнее уравнение в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{m} p_j b_k^j + b_k^0 = \lambda_k\,, \quad k = 1, \dots, m\,. \qquad (8)$$

Отсюда видно, что и МПОСЗ имеет решение при любом наборе спектральных данных $\sigma_m = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}$. Таким образом, для корректности МПОСЗ достаточно, чтобы $\operatorname{rank}(F) = m$. Далее заметим, что если $\operatorname{rank}(F) = l < m$, тогда оператор $\widehat{B}(\vec{p})$ можно представить в следующем виде

$$\widehat{B}(\vec{q}) = \widehat{B}_0 + q_1\widehat{B}_1 + q_2\widehat{B}_2 + \ldots + q_l\widehat{B}_l\,.$$

При этом q_k, ввиду линейной зависимости операторов $\widehat{B}_k$, однозначно выражаются через координаты вектора $\vec{p}$. Точнее, существуют такие α_k^j, $k = 1, \dots, l$, $j = l+1, \dots, m$, что

$$q_k = p_k + \sum_{j=l+1}^{m} \alpha_k^j p_j\,, \quad k = 1, \dots, l\,.$$

В этом случае собственные значения оператора $\widehat{B}(\vec{q})$ линейно зависят от l параметров q_k также, как в формуле (8). Следовательно, q_k определяются спектральными данными, состоящими из l собственных значений. При этом исходная МПОСЗ может оказаться неразрешимой. Из этих рассуждений вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *МПОСЗ для модельного оператора* $\widehat{B}(\vec{p}) = \widehat{B}_0 + p_1\widehat{B}_1 + p_2\widehat{B}_2 + \ldots + p_{m-1}\widehat{B}_{m-1} + p_m\widehat{B}_m$ *корректна тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rang}(F) = m$.

Теперь рассмотрим вопрос о количестве решений МПОСЗ для модельного оператора $\widehat{B}(\vec{p})$. С этой целью зафиксируем спектральные данные $\sigma_m = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ и снова обратимся к оператору GF и формуле (8). Поскольку эти уравнения имеют единственное решение при любой правой части, то, переставляя местами числа λ_k, мы будем получать новые решения. Это означает, что каждой невырожденной подматрице вида GF будет соответствовать $m!$ решений. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть F содержит l различных невырожденных подматриц порядка $m \times m$,составленных из строк матрицы F, тогда МПОСЗ для модельного оператора* $\widehat{B}(\vec{p}) = \widehat{B}_0 + p_1\widehat{B}_1 + p_2\widehat{B}_2 + \ldots + p_{m-1}\widehat{B}_{m-1} + p_m\widehat{B}_m$ *имеет $l \cdot m!$ различных решений.*

Если в условиях теоремы 2 считать, что все подматрицы порядка $m \times m$ невырождены, тогда соответствующая МПОСЗ будет иметь ровно $n!/(n-m)!$ решений.

3. МПОСЗ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ОБЩЕГО ВИДА

Ясно, что в общем случае, когда операторы B_k в (1) не коммутируют между собой, выписать в явном виде собственные значения оператора $B(\vec{p})$ невозможно. И вопросы об условиях корректности МПОСЗ, тем более о количестве решений становятся не столь очевидными. Для исследования корректности и оценки количества решений МПОСЗ для оператора $B(\vec{p})$ воспользуемся хорошо известным методом гомотопической деформации некоторого «модельного» оператора. Мы соединим гомотопической деформацией исследуемый оператор $B(\vec{p})$ с «модельным». Если на $B(\vec{p})$ наложить некоторые условия, то ряд топологических характеристик модельного оператора, такие как корректность, индекс вектора управления, количество решений окажутся инвариантными при деформации.

В качестве модельного оператора мы зафиксируем оператор $\widehat{B}(\vec{p}) = \widehat{B}_0 + p_1\widehat{B}_1 + + p_2\widehat{B}_2 + \ldots + p_{m-1}\widehat{B}_{m-1} + p_m\widehat{B}_m$, рассмотренный в нами предыдущем пункте. Теперь определим класс операторов $B(\vec{p})$, которые будут гомотопными $\widehat{B}(\vec{p})$.

Введем в рассмотрение следующую функцию от вектора $\vec{p} \in \mathbb{C}^m$ и системы операторов B_k, $(k = 1, ..., m)$

$$f(\vec{p}, \{B_k\}_{k=1}^m) = dim\left(Ker\sum_{k=1}^m p_k B_k\right), \quad (9)$$

где $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m)$.

Очевидно, что функция $f(\vec{p}, \{B_k\}_{k=1}^m)$ в зависимости от свойств системы операторов B_k и $\vec{p}$ может принимать значения, равные числам $0, 1, ..., n$. Нас будут интересовать экстремальные значения этой функции при $\vec{p} \neq 0$. Точнее

$$r(\{B_k\}_{k=1}^m) = \max_{||\vec{p}||=1} f(\vec{p}, \{B_k\}_{k=1}^m. \quad (10)$$

Эта величина характеризует степень линейной зависимости системы операторов B_k, $k = 1, ..., m$. Соответственно, будем эту величину называть *индексом линейной зависимости системы операторов* $\{B_k\}_{k=1}^m$. Индексу линейной зависимости системы операторов можно придать определенный геометрический смысл, а также его можно связать с МПОСЗ для оператора $p_1B_1 + p_2B_2 + \ldots + + p_{m-1}B_{m-1} + B_m$. Заметим, что в этой задаче вектор управления $\vec{p}$ уже будет $(m-1)$-мерным.

Теперь в терминах индекса линейной зависимости системы операторов $\{B_k\}_{k=1}^m$ сформулируем ряд утверждений.

Теорема 3 *[достаточное условие разрешимости МПОСЗ]. Пусть выполнено следующее условие:*

$$r(\{B_k\}_{k=1}^m) < m, \quad (11)$$

тогда МПОСЗ корректна.

Поскольку операторы B_k, $k = 0, 1, ..., m$ самосопряженные, естественным требованием является также самосопряженность линейной комбинации $B(\vec{p}) = B_0 + p_1B_1 + p_2B_2 + + ... + p_{m-1}B_{m-1} + p_mB_m$, то есть вещественности параметров p_k. Оказывается, условие (11) обеспечивает также вещественность параметров p_k.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие*

$$r(\{B_k\}_{k=1}^m) < m,$$

тогда $\vec{p} \in R^m$.

В теореме 2 было показано, что корректная МПОСЗ для модельного оператора $\widehat{B}(\vec{p}) = = \widehat{B}_0 + p_1\widehat{B}_1 + p_2\widehat{B}_2 + \ldots + p_{m-1}\widehat{B}_{m-1} + + p_m\widehat{B}_m$ всегда имеет много решений. Аналогичное утверждение справедливо и в общем случае.

Теорема 5. *При условии* $r(\{B_k\}_{k=1}^m) < m$ *МПОСЗ для оператора (1) имеет*

$$M = \frac{n!}{(n-m)!}$$

изолированных решений.

В качестве иллюстраций к утверждениям данного раздела, исследуем МПОСЗ для дискретного самосопряженного оператора Штурма–Лиувилля (2).

Сначала вычислим индекс линейной зависимости системы операторов $\{B_k\}_{k=1}^m$. Напомним, что $(B_k)_{i,j} = 0$ кроме диагональных элементов, которые равны $(B_k)_{k,k} = q_k$. Поэтому легко показать, что

$$r(\{B_k\}_{k=1}^m) = \max_{||\vec{p}||=1} f(\vec{p}, \{B_k\}_{k=1}^m) = m - 1.$$

Таким образом, условия теорем (3), (4) и (5) выполнены. Это означает, что, во-первых, многопараметрическая обратная спектральная задача разрешима для данного оператора с любым набором собственных значений $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_m$; во-вторых, МПОСЗ имеет ровно $m!$ вещественных решений.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

В данном разделе приведем доказательства основных утверждений. Доказательство теоремы 3 является ключевым. Остальные утверждения, по существу, вытекают из положений, сформулированных и обоснованных в ходе доказательства теоремы 3.

Доказательство теоремы 3

Пусть $\{\mu_k\}_{k=1}^m \in R^m$ — произвольные спектральные данные МПОСЗ для оператора $B(\vec{p}) = B_0 + p_1 B_1 + + p_2 B_2 + ... + p_{m-1} B_{m-1} + p_m B_m$, а $\widehat{B}(\vec{p}) = \widehat{B}_0 + p_1 \widehat{B}_1 + + p_2 \widehat{B}_2 + ... + p_{m-1} \widehat{B}_{m-1} + p_m \widehat{B}_m$ — модельный оператор, рассмотренный в п. 2.

Модельный оператор $\widehat{B}(\vec{p})$ подберем так, чтобы любая подматрица размера $m \times m$ матрицы F, определенная в формуле (6), была невырожденной. Это означает, что соответствующая МПОСЗ будет иметь максимальное количество решений равное $M = n!/(n-m)!$.

Определим семейство параметризованных операторов

$$B(\vec{p}, z) = B_0(z) + p_1 B_1(z) + ... + p_{m-1} B_{m-1}(z) + p_m B_m(z)\,, \qquad (12)$$

где $B_k(z) = zB_k + (1-z)\widehat{B}_k$, $k = 1, .., m$ и $z \in \mathbb{C}$.

Оператор $B(\vec{p}, z)$ задает деформацию модельного оператора $\widehat{B}(\vec{p})$ и соединяет его с исследуемым оператором $B(\vec{p})$ при $z = 1$. Далее мы покажем, что любой вектор управления $\vec{p}*$ модельной МПОСЗ можно продолжить по параметру z вдоль некоторой кривой l в комплексной плоскости, соединяющей точки 0 и 1, до вектора управления МПОСЗ для оператора $B(\vec{p})$.

Пусть $\vec{p}*$ какое-либо решение МПОСЗ для оператора $B(\vec{p}, z)$ при $z = 0$. Обозначим через $\vec{p}(z)$ предполагаемое продолжение $\vec{p}*$ в окрестность точки $z = 0$.

Очевидно, что $\vec{p}(z)$ должен являться решением нижеследующих (эквивалентных) систем уравнений:

$$(B(\vec{p}, z) - \mu_k I)\vec{x}_k = \vec{0}\,, \quad k = 1, .., m\,; \qquad (13)$$

здесь $\vec{x}_k$ обозначает собственный вектор оператора $B(\vec{p}, z)$, соответствующий с.з. μ_k.

$$L(\vec{p}, z) = \det(B(\vec{p}, z) - \mu_k I)) = 0\,, \quad k = 1, .., m\,. \qquad (14)$$

Из этих систем можно вычислить производную Фреше $\frac{\partial}{\partial \vec{p}} L(\vec{p}, z)$ оператора $L(\vec{p}, z)$. Для этого обозначим $\beta_{k,j}(z) = (B_k \vec{x}_j(z), \vec{x}_j(z))$ и тогда легко проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial \vec{p}} L(\vec{p}, z) = ||\beta_{k,j}(z)||_{k,j=1}^m\,.$$

В силу свойств модельного оператора $\widehat{B}$, для производной Фреше $\frac{\partial}{\partial \vec{p}} L(\vec{p}, z)$ при $\vec{p} = \vec{p}^*$ и $z = 0$ имеем:

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial \vec{p}} L(\vec{p}, z)\right) \neq 0\,.$$

Следовательно, векторы $\vec{p}(z)$ и $\vec{x}_j(z)$ $(j = 1, .., m)$ однозначно аналитически продолжаются в некоторую окрестность точки $z = 0$, и каждое решение системы (14) — вектор $\vec{p}(z)$ является изолированным. Учитывая, что системы уравнений (13) и (14) являются алгебраическими, можно утверждать, что координаты вектора $\vec{p}(z)$ — алгебраические функции.

Ясно, что при этом и $\vec{x}_j(z)$, $j = 1, .., m$ можно выбрать такими, что их координаты будут также алгебраическими функциями. Это, в свою очередь, означает, что векторы $\vec{x}_j(z)$ $j = 1, .., m$ и $\vec{p}(z)$ являются аналитическими функциями, имеющими лишь конечное число особых точек z_i алгебраического типа. Множество этих особых точек обозначим через S.

Таким образом, мы показали,что оператор $B(\vec{p}(z), z)$ при условии $\vec{p}(0) = \vec{p}^*$ является аналитической в области $\mathbb{C}\backslash S$ функцией со значениями во множестве матриц размера $n \times n$.

Из аналитической теоремы Фредгольма вытекает, что числа $\{\mu_k\}_{k=1}^m \in \mathbf{R}^m$ являются собственными значениями оператора $B(\vec{p}(z), z)$ при всех z из области $\mathbb{C}\backslash S$. Подробное доказательство аналогичного свойства аналитических операторов, при более общих предположениях, приведено в [4].

Заметим также, что все остальные собственные значения $\{\mu_k(z)\}_{k=m+1}^n$ оператора $B(\vec{p}(z), z)$ также являются алгебраическими функциями от z.

Теперь покажем справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Векторы $\vec{x}_j(z)$, $j = 1, .., m$ при вещественных значениях параметра $z \in \mathbb{C}\backslash S$ взаимно ортогональны, а координаты вектора $\vec{p}(z)$ являются вещественнозначными.*

Доказательство леммы 1. Обозначим $d_{k,j}^*(z) = (B_k \vec{x}_j(z), \vec{x}_j(\bar{z}))$и введем в рассмотрение матрицу

$$D(z) = ||d_{k,j}^*(z)||_{k,j=1}^m\,.$$

Очевидно, что матрица $D(z) = ||d_{k,j}^*(z)||_{k,j=1}^m$ является аналитической функцией в области $\mathbb{C}\backslash S$ и совпадает при вещественных $z \in \mathbb{C}\backslash S$ с ранее введенной матрицей $\frac{\partial}{\partial \vec{p}} L(\vec{p}, z) = ||\beta_{k,j}(z)||_{k,j=1}^m$.

Заметим, что если в системе (13) умножим обе части каждого j-го уравнения справа скалярно на вектор $\vec{x}_j(\bar{z})$, то после очевидного преобразования получим следующее векторно-матричное уравнение для вектора $\vec{p}(z)$:

$$D(z)p(\vec{z}) = \vec{g}(z)\,, \qquad (15)$$

где $g_j(z) = \mu_j(\vec{x}_j(z), \vec{x}_j(\bar{z})) - (B_0 \vec{x}_j(z), \vec{x}_j(\bar{z}))$, $j = = 1, ..., m$.

Расширим введенное выше множество S особых точек векторов $\vec{x}_j(z)$ и $\vec{p}(z)$ $j = 1, .., m$ включив в него множество нулей уравнения $\det(D(z)) = 0$. Поскольку элементы матрицы $D(z) = ||d_{k,j}^*(z)||_{k,j=1}^m$ и вектора $g(\vec{z})$ при вещественных $z \in \mathbb{C}\backslash S$ тоже вещественны, то при этом и вектор $\vec{p}(z) \in R^m$. Далее отсюда вытекает, что оператор $B(\vec{p}(z), z)$ при вещественных z является самосопряженным и система его собственных векторов $\vec{x}_j(z)$ является ортогональной. Лемма 1 доказана.

Из вышеприведенных рассуждений следует, что при всех $z \in \mathbb{C}\backslash S$ оператор $B(\vec{p}, z)$ имеет собственные значения равные $\{\mu_k\}_{k=1}^m$. Таким образом, если точка $z = 1$ принадлежит области C/S, то теорема доказана.

Рассмотрим случай когда точка $z = 1$ принадлежит множеству S. Поскольку $\vec{p}(z)$ алгебраическая функция, то возможны два случая: либо $||\vec{p}(z)||$ ограничена в окрестности точки $z = 1$, либо же $||\vec{p}(z)|| \to \infty$ при $z \to 1$.

В первом случае вектор $\vec{p}(z)$ можно продолжить по непрерывности в точку $z = 1$ и соответственно предъявить в качестве решения МПОСЗ

$$\lim_{z \to 1} \vec{p}(z) = \vec{p}$$

и тогда получим доказательство теоремы.

Теперь покажем, что при условиях теоремы второй случай невозможен. Обозначим

$$\rho_k(z) = \frac{p_k(z)}{||\vec{p}(z)||}\,, \quad \vec{y}_k(z) = \frac{\vec{x}_k(z)}{||\vec{x}_k(z)||}\,,$$
$$k = 1, ..., m$$

и представим систему (13) в следующем виде:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \rho_k(z) B_k(z)\right) \vec{y}_k(z) = \\ = \frac{1}{||\vec{p}(z)||} \left(\mu_k I - B_0(z)\right) \vec{y}_k(z)\,, \quad k = 1, .., m\,. \quad (16)$$

Рассмотрим последовательность $\{z_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \subset R \cap (\mathbb{C} \backslash S)$, $\lim_{j\to\infty} z_j = 1$ такую, что векторы $\vec{\rho}(z_j)$ и $\vec{y}_k(z_j)$ имеют конечные пределы. Указанные пределы обозначим $\vec{y}_k^*$ и $\vec{\rho}^*$ соответственно.

В системе (16) перейдем к пределу $z_j \to 1$, поскольку при этом $||\left(\mu_k I - B_0(z_j)\right) \vec{y}_k(z_j)||$ ограничена и $||\vec{p}(z_j)|| \to \infty$, то исходная система уравнений примет вид:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \rho_k^* B_k\right) \vec{y}_k^* = 0\,, \quad k = 1, .., m\,. \quad (17)$$

Из леммы 1 вытекает, что векторы $\vec{y}_k(z_j), k = 1, .., m$ при каждом $j \in \mathbb{N}$ взаимно ортогональны, следовательно, и их пределы $\vec{y}_k^*$ обладают тем же свойством. В свою очередь, это означает линейную независимость системы векторов $\vec{y}_k^*$, $k = 1, .., m$. Иначе говоря, индекс линейной независимости $r(\{B_k\}_{k=1}^m)$ системы операторов $\{B_k\}_{k=1}^m$ не меньше m, что противоречит условию теоремы. Таким образом, теорема доказана.

Доказательство теорем 4 и 5

При доказательстве данных теорем мы снова воспользуемся семейством параметризованных операторов $B(\vec{p}, z)$ определенных в (12). При этом, как и выше, от модельного оператора $\widehat{B}(\vec{p})$ потребуем , чтобы соответствующая МПОСЗ для $\widehat{B}(\vec{p})$ имела максимальное количество решений, равное $M = n!/(n-m)!$.

Пусть $\vec{p}_j^*$, $j = 1, ..., M$ — все решения МПОСЗ для модельного оператора со спектральными данными $\{\mu_k\}_{k=1}^m \in R^m$, а вектор-функции $\vec{p}_j(z)$ — их аналитические продолжения по параметру z вдоль некоторых кривых l_j, соединяющих точки $z = 0$ и $z = 1$. Способ построения аналитического продолжения $\vec{p}_j(z)$ и выбор кривых l_j указаны и обоснованы при доказательстве теоремы 3, там же было доказано, что значение каждого вектора-функции $\vec{p}_j(z)$, $j = 1, ..., M$ при $z = 1$ является решением МПОСЗ для оператора $B(\vec{p}) = B_0 + p_1 B_1 + + p_2 B_2 + ... + p_{m-1} B_{m-1} + p_m B_m$.

Следовательно, какие бы спектральные данные $\{\mu_k\}_{k=1}^m \in R^m$ мы не брали, МПОСЗ для $B(\vec{p})$ имеет не менее (с учетом кратности) $L = n!/(n-m)!$ решений $\vec{p}_j$. При этом из леммы 1 вытекает, что все эти решения вещественнозначные.

Оказывается, других решений, кроме построенных выше с помощью деформации, не существует. В самом деле, предположим, что $\vec{p}_0$ — вещественное решение, не равное ни одному из векторов $\vec{p}_j(z)$, $j = 1, ..., M$, при $z = 1$.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &L(\vec{p}, z) = \det(B(\vec{p}, z) - \mu_k I)) = 0\,, \\ &k = 1, .., m\,; \quad \vec{p}_0(z)|_{z=1} = \vec{p}_0 \end{aligned} \quad (18)$$

Из теории базисов Гребнера и вследствие существования у данной системы решений $\vec{p}_j(z)$ алгебраических функций, вытекает, что и вектор $\vec{p}_0$ можно продолжить как алгебраическую функцию по параметру z (см. [7, 3]). Соответствующую алгебраическую вектор-функцию обозначим $\vec{p}_0(z)$.

Выберем кривую l_0, соединяющую точку $z = 1$ с $z = = 0$ и не содержащую особые точки $\vec{p}_0(z)$, кроме, может быть, точки $z = 1$. Тогда при $z \in l_0$ оператор $B(\vec{p}_0(z), z)$ будет аналитической функцией, а числа $\{\mu_k\}_{k=1}^m \in \in R^m$ его собственными значениями. Но при $z \to 0$ вдоль кривой l_0 мы получим модельный оператор и, соответственно, значение вектор-функции $\vec{p}_0(z)$ будет равно одному из векторов $\vec{p}_j(0)$, $j = 1, ..., M$. Последнее противоречит невырожденности якобиана системы (14) в точке $z = 0$.

Тем самым мы показали, что МПОСЗ имеет ровно M вещественных решений. Теоремы 4 и 5 доказаны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Постановка обратной спектральной задачи — МПОСЗ, рассмотренная выше, является новой. На наш взгляд, именно МПОСЗ наиболее адекватно отвечают техническим задачам, возникающим при диагностике (идентификации) различных электромеханических систем по их собственным колебаниям, а также задачам конструирования технических систем с заданными резонансными характеристиками.

В частности, многочисленные примеры расчетов собственных колебаний механических систем, зависимых от параметров, можно найти в книгах [9] и [10]. Применительно к этим механическим системам можно рассматривать и обратную спектральную задачу о восстановлении неизвестных параметров системы по известному набору частот собственных колебаний. При этом большинство моделей малых колебаний механических систем, зависимых от набора параметров $\vec{p} = = (p_1, p_2, ..., p_m)$, путем разделения переменных можно свести к исследованию МПОСЗ для линейного оператора вида (1).

Полное исследование МПОСЗ включает вопросы существования, изолированности и устойчивости решений. При этом отдельной проблемой являются численные методы построения этих решений.

Основные результаты данной работы содержатся в теоремах 3 и 5. Первая из этих теорем утверждает, что МПОСЗ разрешима при любых вещественных спектральных данных (теорема существования), а вторая теорема устанавливает дискретность решений и их количество.

Заметим, что условие $r(\{B_k\}_{k=1}^m) < m$ теорем 3 и 5 является только достаточным и в некоторых случаях избыточным. В ходе дальнейших исследований нами установлены необходимые и достаточные условия существования решений МПОСЗ, также разработаны эффективные методы построения решений МПОСЗ. Все эти результаты существенно используют методы, изложенные при доказательстве теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Pambarzumijan, V. A.** Uber eine Frage der Eigwerttheorie / V. A. Pambarzumijan // Zeitshrift fur Physik. 1929. № 53. P. 690–695.
2. **Левитан, Б. М.** Обратные задачи Штурма-Лиувилля / Б. М. Левитан. М. : Наука. 1984. 240 с.
3. **Красносельский, М. А.** Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайненко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко. М. : Наука. 1969. 456 с.
4. **Валеев, Н. Ф.** О локалилазации спектра несамосопряженных дифференциальных операторов / Н. Ф. Валеев // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 3. С. 11–19.
5. **Валеев, Н. Ф.** Об одной граничной спектральной задаче для телеграфного уравнения / Н. Ф. Валеев, Л. Р. Валеева // Вестник БашГУ. 2007. № 3. С. 3–11.
6. **Хованский, А. Г.** Малочлены / А. Г. Хованский. М. : Фазис, 1996. 220 с.
7. **Прасолов, В. В.** Многочлены / В. В. Прасолов М. : МЦМНО, 2001. 336 с.
8. **Borg, G.** Eine Umkehrung der Sturm Liouvilleschen Eigenwertanfgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwarte / G. Borg // Acta Math. 1946. V. 78. № 1. P. 1–96.
9. **Болотин, В. В.** Вибрации в технике. Колебания линейных систем / под ред. В. В. Болотина. М. : Машиностроение. 1978. 352 с.
10. **Коллатц, Л.** Задачи на собственные значения (с техническими приложениями) / Л. Коллатц. М. : Наука. 1968. 503 с.
11. **Левитан, Б. М.** Определение дифференциального оператора по двум спектрам / М. Г. Левитан, М. Г. Гасымов // УМН. 1964. Т. 19. № 2 (116). С. 3–63.
12. **Левитан, Б. М.** Введение в спектральную теорию (Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы) / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. М. : Наука. 1970. 672 с.
13. **Марченко, В. А.** Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. Киев : Наукова думка. 1972. 220 с.
14. **Садовничий, В. А.** О корректности обратной задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями / А. М. Садовничий, А. М. Султанаев, А. М. Ахтямов // Докл. Академии наук. 2004. Т. 395, № 5. С. 592–595.
15. **Шкаликов, А. А.** Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях / А. А. Шкаликов // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1983. № 9. С. 190–229.
16. **Юрко, В. А.** Обратные спектральные задачи и их приложения / В. А. Юрко. Саратов : Сарат. педагог. ин-т, 2001. 499 с.

ОБ АВТОРЕ

Валеев Нурмухамет Фуатович, доц., д-рант каф. диф. уравнений Баш. гос. ун-та. Дипл. мат. (БашГУ, 1993). Канд. физ.-мат. наук (ИМ УНЦ РАН, 1996). Иссл. в обл. спектр. теории лин. операторов, приложений спектр. теории.