Уфа : УГАТУ, 2008 Вестник УГАТУ • Управление, ВТ и И Т. 10, № 2 (27). С. 150–153

УДК 330.45:519.8

А. В. ПАНЮКОВ, А. Т. ЛАТИПОВА

ОЦЕНКА ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ НЕЙМАНА ПРИ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Рассмотрена проблема нахождения равновесия в модели Неймана (A, B), когда известны лишь интервалы, которым принадлежат элементы матриц модели. Показано, что в случае мультипликативной неопределенности как прямой, так и двойственный лучи Неймана определяются моделью Неймана с матрицами центров интервалов, а интервал числа Фробениуса модели — двумя задачами Неймана с матрицами верхних и нижних границ интервалов. *Модель Неймана ; положение равновесия ; прямой луч Неймана ; двойственный луч Неймана ; число* Фробениуса ; *интервальная неопределенность*

Многоотраслевая модель экономики Дж. Фон Неймана оказала большое влияние на теорию экономического роста и накопления капитала, дала толчок интенсивному развитию современной математической экономики [1–3]. Следует заметить, что общность модели Неймана состоит в ее применимости не только к анализу многоотраслевой экономики, но и к другим проблемам, в частности, к проблеме формирования бюджета продаж в условиях ценовой диверсификации [4–7].

Численные значения элементов матриц затрат и выпуска в фоннеймановских моделях получают на основе статистики и экспертных оценок, поэтому они могут иметь неопределенность, которая, скорее всего, будет интервальной.

В статье рассмотрена проблема нахождения равновесия в модели Неймана (A, B), когда известны лишь интервалы, которым принадлежат элементы матриц модели. Показано, что в случае мультипликативной неопределенности как прямой, так и двойственный лучи Неймана определяются моделью Неймана с матрицами центров интервалов, а интервал числа Фробениуса модели — двумя задачами Неймана с матрицами верхних и нижних границ интервалов.

ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ НЕЙМАНА ПРИ ТОЧЕЧНЫХ МАТРИЦАХ ЗАТРАТ И ВЫПУСКА

Общим положением равновесия для модели Неймана (A, B), где A и B — заданные $m \times n$ матрицы затрат и выпуска с неотрицательными элементами ($A \geq 0,\ B \geq 0$), называют решение (λ, x, p) системы билинейных неравенств и уравнений

$$(A - \lambda B)\, x \leq 0\,, \quad (x, e^m) = 1\,, \quad x \geq 0\,, \quad (1)$$

$$(A - \lambda B)^T\, p \geq 0\,, \quad (p, e^n) = 1\,, \quad p \geq 0\,. \quad (2)$$

Невырожденным положением равновесия рассматриваемой модели называют положение равновесия (λ, x, p), удовлетворяющее дополнительному условию

$$p^T A\, x > 0\,. \quad (3)$$

В данной работе мы ограничимся алгоритмами нахождения общего положения равновесия, т. е. решения (λ, x, p) системы (1–2).

Экстремальные допустимые значения λ могут быть найдены с помощью решения задач билинейной оптимизации

$$\underline{\lambda} = \min\{\lambda : (A - \lambda B)\, x \leq 0\,, \\ (x, e^m) = 1\,, \quad x \geq 0\}\,, \quad (4)$$

$$\overline{\lambda} = \max\left\{\lambda : (A - \lambda B)^T\, p \geq 0\,,\right. \\ \left.(p, e^n) = 1\,, \quad p \geq 0\right\}\,. \quad (5)$$

Числа $\underline{\lambda}$ и $\overline{\lambda}$ называют соответственно числом Неймана и числом Фробениуса модели Неймана. При этом число Неймана $\underline{\lambda}$ определяет максимальный темп сбалансированного роста, а число Фробениуса $\overline{\lambda}$ — минимальный темп сбалансированного роста и продуктивность модели [1, 2]. Векторы x, p в положении равновесия (λ, x, p) называют соответственно прямым и двойственным лучами Неймана, соответствующими значению λ.

Исходя из равенств (1), (2) и (5), для оценки продуктивности модели, т. е. нахождения числа Фробениуса $\overline{\lambda}$, а также характеристик устойчивого равновесия, можно использовать следующую задачу билинейного программирования

$$(\overline{\lambda}, \overline{x}, \overline{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(A,B)} \lambda\,, \qquad (6)$$

$$D(A,B) = \\ = \left\{ (\lambda, x, w) \left| \begin{array}{l} (A-\lambda B)x \le 0, \\ (A-\lambda B)^T w \ge 0\,, \\ (x, e^m) = 1\,, \\ (w, e^n) = 1\,, \\ x \ge 0\,, \quad w \ge 0\,, \lambda \ge 0 \end{array} \right. \right\}. \qquad (7)$$

Численные методы решения задачи (6)–(7) рассмотрены в работе [9]. Они базируются на вычислении корней монотонной функции $u(\lambda) = \min\limits_{x:(x,e^m)=1, x\ge 0} \max\limits_{i=1,2,\ldots n} \sum\limits_{j=1}^{m} (a_{ij} - \lambda b_{ij})\, x_j$ или $v(\lambda) = \max\limits_{w:(w,e^n)=1, w\ge 0} \min\limits_{j=1,2,\ldots m} \sum\limits_{i=1}^{n} (a_{ij} - \lambda b_{ij})\, w_i$ при различных значениях λ. При фиксированном значении λ значения функций $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ равны значениям следующих взаимно двойственных задач линейного программирования:

$$\min \{u : (A - \lambda B)\, x \le u\,,\ (x, e^m) = 1\,,\ x \ge 0\}\,,$$
$$\max \left\{ v : (A - \lambda B)^T\, w \ge v\,,\ (w, e^n) = 1\,,\ w \ge 0 \right\}. \qquad (8)$$

Таким образом, упомянутый алгоритм требует решения последовательности задач линейного программирования (7) и/или (8).

Легко заметить, что при значениях λ, близких к искомым, т. е. когда $u(\lambda), v(\lambda) \to 0$, соответствующие задачи становятся вырожденными, что влечет невозможность их решения с помощью традиционных средств, использующих вычисления с плавающей точкой. Для устойчивого нахождения корней функций $u(\lambda)$ и $u(\lambda)$ можно применить методы теории матричных игр.

ОЦЕНКА ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МАТРИЦАХ ЗАТРАТ И ВЫПУСКА

Далее обозначим через $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ матрицы затрат и выпуска, элементами которых являются числовые интервалы. Через mid$\mathbf{A}$ и mid$\mathbf{B}$ обозначим точечные матрицы, элементами которых являются центры интервальных элементов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно. Через $\underline{\mathbf{A}}$ и $\underline{\mathbf{B}}$ обозначим точечные матрицы, состоящие из нижних границ интервальных элементов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно; а через $\overline{\mathbf{A}}$ и $\overline{\mathbf{B}}$ — точечные матрицы, состоящие из верхних границ интервальных элементов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно [8].

Теорема 1. Пусть β_A и β_B удовлетворяют условиям $\tilde{A} = \beta_A \cdot \mathrm{m}id\mathbf{A} \in \mathbf{A}$, $\tilde{B} = \beta_B \cdot \mathrm{m}id\mathbf{B} \in \mathbf{B}$; пусть также $(\lambda^*, x^*, w^*) = \arg \max\limits_{\lambda, x, w \in D(\mathrm{m}id\mathbf{A}, \mathrm{m}id\mathbf{B})} \lambda$. Тогда $\left(\frac{\lambda^* \beta_A}{\beta_B}, x^*, w^*\right) = \arg \max\limits_{\lambda, x, w \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \lambda$.

Доказательство. Задача определения параметров равновесия для модели $(\tilde{A}, \tilde{B})$ имеет вид

$$(\tilde{\lambda}^*, \tilde{x}, \tilde{w}) = \arg \max_{\tilde{\lambda}, x, w \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \tilde{\lambda}\,,$$

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left\{ (\tilde{\lambda}, x, w) \left| \begin{array}{l} (\tilde{A} - \tilde{\lambda}\tilde{B})x \le 0\,, \\ (\tilde{A} - \tilde{\lambda}\tilde{B})^T w \ge 0\,, \\ (x, e^m) = 1\,, \\ (w, e^n) = 1\,, \\ x \ge 0\,,\ w \ge 0\,, \\ \tilde{\lambda} \ge 0 \end{array} \right. \right\}. \qquad (9)$$

Сделав в задаче (9) замену переменной $\widetilde{\lambda} = \lambda\beta_A/\beta_B$, получим:

$$(\lambda^*, \tilde{x}, \tilde{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \lambda\,,$$

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left\{ (\lambda, x, w) \left| \begin{array}{l} (\tilde{A} - \lambda\beta_A/\beta_B\tilde{B})x \le 0\,, \\ (\tilde{A} - \lambda\beta_A/\beta_B\tilde{B})^T w \ge 0\,, \\ (x, e^m) = 1\,, \quad (w, e^n) = 1\,, \\ x \ge 0\,, \quad w \ge 0\,, \quad \lambda \ge 0 \end{array} \right. \right\}. \qquad (10)$$

Переписав задачу (10) с учетом условия теоремы в терминах матриц mid$\mathbf{A}$ и mid$\mathbf{B}$, будем иметь равносильную задачу

$$(\lambda^*, x^*, w^*) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{midB})} \lambda\,,$$

$$D(\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{midB}) = \\ = \left\{ (\lambda, x, w) \left| \begin{array}{l} (\mathrm{mid}\mathbf{A} - \lambda\mathrm{midB})x \le 0\,, \\ (\mathrm{mid}\mathbf{A} - \lambda\mathrm{midB})^T w \ge 0\,, \\ (x, e^m) = 1,\ (w, e^n) = 1\,, \\ x \ge 0\,, \quad w \ge 0\,, \quad \lambda \ge 0 \end{array} \right. \right\}. \qquad (11)$$

Полученная задача совпадает с задачей нахождения параметров (λ^*, x^*, w^*) для точечной модели Неймана $(\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{mid}\mathbf{B})$. Учитывая сделанную замену переменных, приходим к заключению, что кортеж $(\lambda^*\beta_A/\beta_B, x^*, w^*)$ является положением равновесия для модели Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B})$. Теорема доказана.

Таким образом, если неопределенность является мультипликативной и состоит в незнании коэффициентов пропорциональности β_A и β_B, то как прямой, так и двойственный луч Неймана могут быть найдены по матрицам центров интервалов.

Теорема 2. Пусть точечные матрицы $(\tilde{A}, \tilde{B})$ удовлетворяют условию

$$\tilde{A} \in \mathbf{A}\,, \quad \tilde{B} \in \mathbf{B}\,;$$

пусть также

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \lambda\,; \tag{12}$$

$$(\overline{\lambda}, \overline{x}, \overline{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\overline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}})} \lambda\,; \tag{13}$$

$$(\underline{\lambda}, \underline{x}, \underline{w}) = \arg \max_{\lambda, x, w \in D(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathrm{B}})} \lambda\,. \tag{14}$$

Тогда $\underline{\lambda} \le \tilde{\lambda} \le \overline{\lambda}$.

Доказательство. Из условия (12) следует, что для любых $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$ выполняется

$$\overline{a}_{ij} \ge \tilde{a}_{ij}\,, \quad \overline{b}_{ij} \ge \tilde{b}_{ij}\,, \quad \underline{a}_{ij} \le \tilde{a}_{ij},\ \underline{b}_{ij} \le \tilde{b}_{ij}\,. \tag{15}$$

Откуда следует возможность представления $\tilde{A} = \underline{\mathbf{A}} + A' = \overline{\mathbf{A}} - A''$, $\tilde{B} = \underline{\mathbf{B}} + B' = \tilde{\mathbf{B}} - B''$, где $A' = \left(a'_{ij}\right) = (\tilde{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})$, $B' = \left(b'_{ij}\right) = \left(\tilde{b}_{ij} - \underline{b}_{ij}\right)$, $A'' = \left(a''_{ij}\right) = (\overline{a}_{ij} - \tilde{a}_{ij})$, $B'' = \left(b''_{ij}\right) = \left(\overline{b}_{ij} - \tilde{b}_{ij}\right)$, причем все элементы матриц A', B', A'' и B'' неотрицательны.

Сделав замену матриц $\tilde{A} = \overline{\mathbf{A}} - A''$ и $\tilde{B} = \underline{\mathbf{B}} + B'$ в задаче (12) будем иметь эквивалентную задачу

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{w}) = \arg \max_{(\lambda, x, w) \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \lambda\,,$$

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) =$$

$$= \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\overline{\mathbf{A}} - A'' - \lambda(\underline{\mathbf{B}} + B'))x \le 0\,, \\ (\overline{\mathbf{A}} - A'' - \lambda(\underline{\mathbf{B}} + B'))^T w \ge 0\,, \\ (x, e^m) = 1, \quad (w, e^n) = 1\,, \\ x \ge 0, \quad w \ge 0, \quad \lambda \ge 0 \end{array} \right\}. \tag{16}$$

Из неотрицательности матриц A'' и B' второго неравенства в (16) следует справедливость неравенства

$$(\overline{\mathbf{A}} - \tilde{\lambda}\underline{\mathbf{B}})^T \tilde{w} \ge 0\,.$$

Откуда следует, что для любого $j = 1, 2, \ldots, m$

$$\tilde{\lambda} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij}\tilde{w}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b}_{ij}\tilde{w}_i} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij}\overline{w}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b}_{ij}\overline{w}_i}\,. \tag{17}$$

Последнее неравенство в данной цепочке следует из условия (13) теоремы, в соответствии с которым

$$\overline{w} = \arg \max_{w:(w, e^n)=1, w \ge 0} \min_{j=1,2,\ldots,m} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij} w_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{b}_{\,ij} w_i}\,.$$

Поскольку $\overline{\lambda} = \max\limits_{w:(w, e^n)=1, w \ge 0} \min\limits_{j=1,2,\ldots,m} \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{ij} w_i}{\sum_{i=1}^{n} \underline{b}_{\,ij} w_i}$, то имеем: $\tilde{\lambda} \le \overline{\lambda}$.

Неравенство $\tilde{\lambda} \ge \underline{\lambda}$ доказывается аналогично. Действительно, после замены матриц $\tilde{A} = \underline{\mathbf{A}} + A'$ и $\tilde{B} = \overline{\mathbf{B}} - B''$ в задаче (12) получим задачу

$$(\tilde{\lambda}, \tilde{x}, \tilde{w}) = \arg \max_{(\lambda, x, w) \in D(\tilde{A}, \tilde{B})} \lambda\,,$$

$$D(\tilde{A}, \tilde{B}) =$$

$$= \left\{ (\lambda, x, w) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\underline{\mathbf{A}} + A' - \lambda(\overline{\mathbf{B}} - B''))x \le 0\,, \\ (\underline{\mathbf{A}} + A' - \lambda(\overline{\mathbf{B}} - B''))^T w \ge 0\,, \\ (x, e^m) = 1, \quad (w, e^n) = 1, x \ge 0\,, \\ w \ge 0\,, \quad \lambda \ge 0 \end{array} \right\}. \tag{18}$$

Из неотрицательности матриц A' и B'' b и первого неравенства в (18) следует $(\underline{\mathbf{A}} - \tilde{\lambda}\overline{\mathbf{B}})\tilde{x} \le 0$, поэтому для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место неравенство:

$$\tilde{\lambda} \ge \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \underline{a}_{ij}\tilde{x}_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{b}_{ij}\tilde{x}_j} \ge \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \underline{a}_{ij}\underline{x}_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{b}_{ij}\underline{x}_j} \tag{19}$$

Последнее неравенство в данной цепочке следует из того, что

$$\underline{x} = \arg \min_{x:(x,e^m)=1,x\geq 0} \quad \max_{i=1,2,\dots,n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \underline{a}_{ij}x_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{b}_{ij}x_j}.$$

Поскольку

$$\underline{\lambda} = \min_{x:(x,e^m)=1,x\geq 0} \quad \max_{i=1,2,\dots,n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \underline{a}_{ij}x_j}{\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{b}_{ij}x_j},$$

то $\tilde{\lambda} \geq \underline{\lambda}$. Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Модель Неймана $(\mathrm{mid}\mathbf{A}, \mathrm{mid}\mathbf{B})$ определяет как прямой, так и двойственный луч Неймана для модели Неймана с мультипликативной неопределенностью в элементах матриц затрат A и выпуска B.

Число Фробениуса модели Неймана $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ с интервальными матрицами затрат и выпуска ограничено сверху числом Фробениуса для модели Неймана $(\overline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}})$, снизу — числом Фробениуса для модели Неймана $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$, где $\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}$ — точечные матрицы верхних границ интервалов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно, $\underline{\mathbf{A}}$, $\underline{\mathbf{B}}$ — точечные матрицы нижних границ интервалов этих же матриц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ашманов, С. А.** Введение в математическую экономику : учеб. пособие для спец. «Прикл. математика» / С. А. Ашманов. М. : Наука, 1984. 293 с.
2. **Альсевич, В. В.** Введение в математическую экономику. Конструктивная теория / В. В. Альсевич. М : Едиториал УРСС, 2005. 256 с.
3. **Цисарь, И. Ф.** Компьютерное моделирование экономики / И. Ф. Цисарь, В. Г. Нейман. М. : Диалог-МИФИ, 2002. 304 с.
4. **Латипова, А. Т.** Модель оптимизации бюджетирования для предприятий минерально-сырьевого комплекса / А. Т. Латипова // Стратегия развития минерально-сырьевого комплекса в XXI в : матер. междунар. конф. М.–Бишкек. М. : РУДН, 2004. С. 206–208.
5. **Латипова А. Т.** Модель оптимизации ценовой стратегии для задач бюджетирования / А. Т. Латипова // Дискретный анализ и исследование операций : матер. Рос. конф. (Новосибирск, 28 июня – 2 июля 2004). Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 2004. С. 206.
6. **Латипова, А. Т.** Ценовая диверсификация в бюджетировании / А. Т. Латипова // Экономика и менеджмент: проблемы и перспективы : тр. Междунар. науч.-практ. конф. 6–11 июня 2005 г. СПб. : изд-во Политехн. ун-та, 2005. С. 562–566.
7. **Латипова, А. Т.** Оптимизация бюджета продаж / А. Т. Латипова, А. В. Панюков // Вестник Южно-Уральск. гос. ун-та. Сер. Рынок: Теория и практика. Челяб. : ЮУрГУ, 2006. Вып. 4, № 15 (170). С. 116–120.
8. **Жолен, Л.** Прикладной интервальный анализ / Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер. М. ; Ижевск : Ин-т комп. иссл., 2005. 468 с.
9. **Латипова, А. Т.** Математическая модель бюджетирования / А. Т. Латипова // Проблемы теоретической и прикладной математики: тр. 37-й рег. молодежн. конф. Екб. : УрО РАН, 2006. С. 391–397.

ОБ АВТОРАХ

Панюков Анатолий Васильевич, зав. каф. экон.-мат. методов и стат. Ю.-Уральск. гос. ун-та. Дипл. инж.-мат. (ЧелПИ, 1980). Д-р физ.-мат. наук по мат. моделир. (ВЦ РАН, 1999). Иссл. в обл. комп. технол. и мат. моделир.

Латипова Алина Таиховна, асс. той же каф. Дипл. экон. по инф. сист. в экономике (ЮУрГУ, 2003). Иссл. в обл. комп. технол., мат. моделир.