

УДК 519.876.5

Н. А. ЗАЙКО

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕРЕНИЯ ЭРГОДИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Для анализа вероятностных характеристик случайных процессов, обладающих эргодическим свойством, построена математическая модель, учитывающая дискретность процессов измерений, имеющих место при использовании цифровой техники. Получены характеристики случайных процессов и оценки их погрешностей. *Эргодический случайный процесс ; вероятностные характеристики ; дискретные измерения*

ВВЕДЕНИЕ

Эргодические случайные процессы позволяют находить свои вероятностные характеристики по одной реализации, поэтому эта модель получила широкое распространение в теории измерений.

Эргодическое свойство случайных процессов заключается в том, что осреднение по времени эквивалентно осреднению по параметру измерения при большой длительности реализации.

При статических измерениях значительную роль играет оценка погрешности, поскольку пренебрежение погрешностями или их некорректный учет приводят к серьезным ошибкам и неправильным решениям. Поэтому задача повышения точности при исследовании вероятностных характеристик случайных процессов в настоящее время является весьма актуальной.

Общепринятая теория погрешности основывается на элементарном подходе к определению погрешностей и упрощенных моделях, которые сложились исторически. Сущность этого подхода заключается в том, что каждый фактор, влияющий на результат измерения, учитывается своей элементарной моделью погрешности. Так, при статистической обработке цифровых измерений случайных процессов отдельно учитываются погрешности квантования по уровню и дискретизации во времени показаний, ограниченности объема выборки и длины реализации, способа восстановления сигнала между отсчетами. По ним отдельно выбираются апертура квантования по уровню и шаг дискретизации во времени, объем выборки и длина реализации. Для оценки погрешности измерения ве-

роятностных характеристик случайных процессов оценки элементарных погрешностей суммируются. При этом они считаются или функционально связанными, или полностью независимыми. Найти их априорную корреляцию между собой практически невозможно. Поэтому элементарный подход к определению погрешностей обладает малой достоверностью. Это объясняется тем, что каждая элементарная погрешность в нарушение единства измерений находится своим методом, на основе своей математической модели и не учитывает влияние остальных факторов.

Расширить возможности указанного выше элементарного подхода можно за счет комплексного учета основных факторов, влияющих на точность статистических измерений: погрешности отсчетов, алгоритмов восстановления сигналов между отсчетами, шага дискретизации, объема выборки и длины реализации. Идея комплексного подхода заключается в том, чтобы рассматривать погрешность измерений как единое и неделимое целое, трансформирующееся с изменением режимов измерений, условий эксплуатации и других факторов [1] и определять их вероятностные характеристики на основе изучения реализаций самих процессов.

Ранее были изучены процессы непрерывного измерения [2], которые характерны для аналоговых устройств. В связи с широким использованием цифровой техники и компьютеров для анализа результатов измерений, возникает необходимость исследования влияния дискретизации на результат измерений.

1. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим функцию

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \varepsilon, \\ 0, & x < 0, \quad x > \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b \frac{1}{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x) dx = \int_a^b \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & 0 \in [a, b], \\ 0, & 0 \notin [a, b]. \end{cases}$$

— δ — функция Дирака.

Функция единичного скачка

$$1(x) = \int_{-\infty}^x \delta(x) dx = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

В силу свойств эргодичности (без учета погрешности измерения)

$$P \{X < x(t) < X + \varepsilon\} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi_\varepsilon[x(t_n) - X],$$

где n — номер измерения, N — количество измерений.

Плотность вероятности

$$\omega_1(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P \{X < x(t) < X + \varepsilon\}}{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta[x(t_n) - X].$$

Функция распределения вероятностей

$$\Omega_1(X) = \int_{-\infty}^X \omega_1(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^X \delta[x(t_n) - x] dx = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1[x(t_n) - X]. \quad (1)$$

Математическое ожидание

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} X \omega_1(X) dX = \int_{-\infty}^{\infty} X \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta[x(t_n) - X] dX = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(t_n). \quad (2)$$

Дисперсия

$$D_X = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[X - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(t_n) \right]^2 \omega_1(X) dX = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x^2(t_n) - \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(t_n) \right]^2.$$

Дисперсия дисперсии

$$D(D_X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[X - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(t_n) \right]^2 - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x^2(t_n) + \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(t_n) \right]^2 \right\}^2 \times \omega_1(X) dX = \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x(t_j) - x(t_n)) \times \left[\left(x(t_j) + x(t_n) - \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N x(t_i) \right)^2 \right] \right\}^2.$$

2. УЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ

Пусть известна (измерена заранее) плотность вероятности погрешности $\omega[\Delta]$, где $\Delta = \langle x \rangle - x$ — погрешность измерения (символом $\langle x \rangle$ обозначается измеряемое значение искомого параметра x , т. е. $\langle x \rangle = x + \Delta$).

Погрешности измерений в разные моменты времени считаются независимыми случайными величинами.

Пусть также задана выборка $\langle x_n \rangle = \langle x(t_n) \rangle$. Тогда вероятность попадания $x(t)$ в диапазон с учетом погрешности измерения определяется как математическое ожидание вероятности $(-\infty < \Delta_n < \infty, n = 1, \dots, N)$

$$\langle P \rangle \{X < x(t) < X + \varepsilon\} = mP \{X < x(t) < X + \varepsilon\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P \{X < x(t) < X + \varepsilon\} \times \\
&\quad \times \omega[\Delta_1] d\Delta_1 \dots \omega[\Delta_N] d\Delta_N = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\varepsilon}[\langle x_n \rangle - X - \Delta_n] \omega[\Delta_n] d\Delta_n = \\
&\quad = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_{\langle x_n \rangle - X - \varepsilon}^{\langle x_n \rangle - X} \omega[\Delta] d\Delta.
\end{aligned}$$

Математическое ожидание плотности вероятности

$$\begin{aligned}
\langle \omega_1(X) \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\langle P \rangle \{X < x(t) < X + \varepsilon\}}{\varepsilon} = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \omega[\langle x_n \rangle - X]. \quad (3)
\end{aligned}$$

Математическое ожидание распределения вероятности

$$\begin{aligned}
\langle \Omega_1(X) \rangle &= \langle P \rangle \{-\infty < x(t) < X\} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^N 1[\langle x_n \rangle - X - \Delta_n] \times \\
&\quad \times \omega[\Delta_1] d\Delta_1 \dots \omega[\Delta_N] d\Delta_N = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} 1[\langle x_n \rangle - X - \Delta_n] \omega[\Delta_n] d\Delta_n = \\
&\quad = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_{\langle x_n \rangle - X}^{\infty} \omega[\Delta] d\Delta.
\end{aligned}$$

Дисперсия плотности вероятности равна бесконечности, поскольку в подынтегральную функцию входит квадрат δ -функции.

Дисперсия распределения вероятности в силу (1) равна

$$\begin{aligned}
\langle D \rangle \langle \Omega_1(X) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [\Omega_1(X) - \langle \Omega_1(X) \rangle]^2 \times \\
&\quad \times \omega[\Delta_1] d\Delta_1 \dots \omega[\Delta_N] d\Delta_N = \\
&= \frac{1}{N} \langle \Omega_1(X) \rangle - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \left[\int_{\langle x_i \rangle - X}^{\infty} \omega[\Delta] d\Delta \right]^2.
\end{aligned}$$

Дисперсия дисперсии распределения вероятности ($-\infty < \Delta_n < \infty$, $n = 1, \dots, N$)

$$\begin{aligned}
\langle D \rangle \langle D \rangle \langle \Omega_1(X) \rangle &= \\
&= m \left\{ [\Omega_1(X) - \langle \Omega_1(X) \rangle]^2 - \langle D \rangle \langle \Omega_1(X) \rangle \right\}^2 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N 1[x(t_n) - X] - \langle \Omega_1(X) \rangle \right]^2 - \right. \\
&\quad \left. - \langle D \rangle \langle \Omega_1(X) \rangle \right\}^2 \omega[\Delta_1] d\Delta_1 \dots \omega[\Delta_N] d\Delta_N = \\
&= \frac{2}{N^2} \langle \Omega_1(X) \rangle^2 + \frac{1}{N^3} \langle \Omega_1(X) \rangle - \\
&\quad - \langle \Omega_1(X) \rangle \frac{4}{N^3} \sum_{i=1}^N \left[\int_{\langle x_i \rangle - X}^{\infty} \omega[\Delta] d\Delta \right]^2 - \\
&\quad - \frac{7}{N^4} \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{\langle x_i \rangle - X}^{\infty} \omega[\Delta] d\Delta \right\}^2 + \\
&\quad + \frac{12}{N^4} \sum_{i=1}^N \left[\int_{\langle x_i \rangle - X}^{\infty} \omega[\Delta] d\Delta \right]^3 - \\
&\quad - \frac{6}{N^4} \sum_{i=1}^N \left[\int_{\langle x_i \rangle - X}^{\infty} \omega[\Delta] d\Delta \right]^4 + \\
&\quad + \frac{2}{N^4} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\int_{\langle x_i \rangle - X}^{\infty} \omega[\Delta] d\Delta \right]^2 \right\}^2.
\end{aligned}$$

3. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ С УЧЕТОМ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ

Полученную функцию плотности апостериорной вероятности используем для получения статистических характеристик измеряемого сигнала.

Математическое ожидание X , согласно (3)

$$\begin{aligned}
\langle \langle m_X \rangle \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} X \omega(\langle x_n \rangle - X) dX = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} (\langle x_n \rangle - y) \langle \omega(y) \rangle dy = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle x_n \rangle - m_{\Delta}, \quad (4)
\end{aligned}$$

где m_{Δ} — математическое ожидание погрешности.

Дисперсия в силу (2) равна

$$\begin{aligned} \langle\langle D_X \rangle\rangle &= M \left([X - \langle\langle m_X \rangle\rangle]^2 \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[X - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle x_n \rangle + m_{\Delta} \right]^2 \langle \omega_1(X) \rangle dX = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle x_j \rangle^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle x_n \rangle \right)^2 + D_{\Delta}. \end{aligned}$$

Дисперсия дисперсии

$$\begin{aligned} \langle\langle DD_X \rangle\rangle &= m \{ D_X - \langle\langle D_X \rangle\rangle \}^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[X - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \langle x_n \rangle + m_{\Delta} \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\langle x_j \rangle - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle x_i \rangle \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - D_{\Delta} \right\}^2 \langle \omega_1(X) \rangle dX = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [\langle x_j \rangle - \langle x_l \rangle] \times \right. \\ &\quad \times \left[\langle x_j \rangle + \langle x_l \rangle - \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N \langle x_n \rangle \right] \right\}^2 + \\ &\quad + \langle\langle D_X \rangle\rangle D_{\Delta} - D_{\Delta}^2 + D(D_{\Delta}). \end{aligned}$$

4. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В качестве тестового примера была взята функция $y = 1 + e^{-\frac{n-1}{1000}} \sin\left(\frac{\pi(n-1)}{1000}\right)$.

Рассмотрим зависимость относительной погрешности математического ожидания (4) от количества отсчетов N (рис. 1). Данную зависимость удобнее всего проиллюстрировать в логарифмическом масштабе, поэтому по оси абсцисс будем откладывать десятичный логарифм от количества отсчетов N , а по оси ординат — десятичный логарифм относительной погрешности вычисления величины математического ожидания $\langle\langle m_X \rangle\rangle$. Цифрой 0 обозначена зависимость погрешности вычисленных результатов, цифрами 1–3 показаны результаты фильтрации численных данных, проведенные согласно методике, описанной в [3].

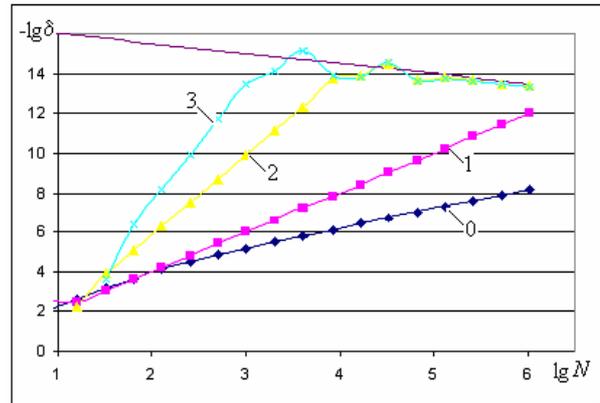


Рис. 1. Оценка погрешности математического ожидания. Прямая $y = 16,5 - \frac{1}{2} \lg N$

Как видно из результатов, представленных на рис. 1, при суммировании погрешность округления накапливается по статистическому закону (примерно пропорционально \sqrt{N}), что совпадает с выводами, сделанными в [3]. Уменьшение точности наблюдается при $\lg N > 3$ (используются переменные типа double).

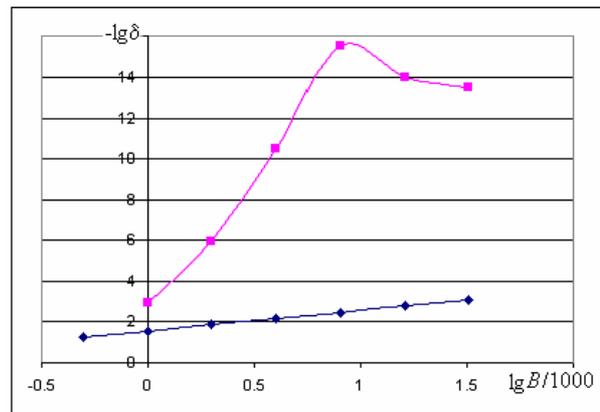


Рис. 2. Результаты фильтрации зависимости значений математического ожидания от величины диапазона измерения

Для изучения характера изменения математического ожидания при расширении диапазона были проведены расчеты, результаты которых представлены на рис. 2. По оси абсцисс откладывается $\lg B/1000$, где B — величина диапазона измерения, а по оси ординат — $\lg \delta$, где δ — относительное отличие текущего вычисленного значения от эталонного предельного значения. Каждое использованное значение исследуемой зависимости для каждого B получалось в результате фильтрации по N , аналогичной рассмотренному выше примеру (см. рис. 1).

Как видно из рис. 2, зависимость математического ожидания от величины диапазона B приближенно можно представить функцией $m_\infty - \frac{\text{const}}{B}$. Фильтрация позволяет уточнить предельное значение математического ожидания на несколько значащих цифр.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, эргодическое свойство стационарных случайных процессов определяется с использованием плотности распределения вероятностей, а не моментных характеристик. А уже через плотности распределения вероятностей оно должно распространяться на моментные характеристики случайных процессов. Это позволяет системно определить характеристики погрешностей алгоритмов дискретных измерений эргодических случайных процессов и во взаимосвязи учесть вклад в достоверность получаемых характеристик погрешностей.

Эти идеи легли в основу разработки интеллектуальной системы для исследования вероятностных характеристик случайных процессов, позволяющей с требуемой точностью выдавать рекомендации для их инженерного использования. В качестве методологического стержня для решения сформулированной задачи предполагается использовать комплексный подход к определению погрешностей [4].

Построенная дискретная модель измерения дает возможность использовать извест-

ные методы и алгоритмы оценки погрешности дискретизации вычислительных процессов [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Заико, Н. А.** Интеллектуальная система для моделирования случайных процессов на базе комплексного подхода к определению погрешностей / Н. А. Заико // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 5 (23). С. 101–107.
2. **Заико, А. И.** Определения и алгоритмы измерения характеристик эргодических процессов / А. И. Заико // Метрология. 2003. № 4. С. 3–15.
3. **Житников, В. П.** Основы многокомпонентного анализа численных результатов : учеб. пособие / В. П. Житников, Н. М. Шерыхалина, Г. И. Федорова, О. Р. Зиннатуллина. Уфа : УГАТУ, 2007. 117 с.
4. **Заико, Н. А.** Интеллектуальная система для анализа вероятностных характеристик случайных процессов / Н. А. Заико // Полет. 2007. № 9. С. 39–44.

ОБ АВТОРЕ



Заико Наталья Александровна, асп. каф. компьют. матем. Дипл. инж.-сист. (УГАТУ, 2004). Готовит дис. в обл. повыш. точности и уменьш. длительности измерений интел. систем обработки информации.