УДК 519.2

Ф. С. НАСЫРОВ, И. Г. ПАРАМОШИНА

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ИТО И ИХ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В работе показано, что решение стохастических параболических дифференциальных уравнений в частных производных итовского типа и стохастического уравнения Бюргерса может быть сведено к решению цепочки «обычных» уравнений со случайными коэффициентами. Построены модели решений некоторых уравнений подобного типа, возникающих в приложениях. *Стохастическое дифференциальное уравнение Ито в частных производных параболического типа; стохастическое уравнение Бюргерса, интеграл Стратоновича*

ВВЕДЕНИЕ

В 40-х гг. XX в. японский математик К. *Ито* заложил основы теории стохастических дифференциальных уравнений. Изначально такие уравнения применялись для описания на языке теории вероятностей процессов диффузии. В дальнейшем выяснилось, что стохастические уравнения являются удобным инструментом для решения многих прикладных задач. Стохастические модели применяются для исследования различных физических, химических, социологических процессов, для которых характерно наличие случайных отклонений (различные погрешности, шумы, нестабильность влияющих на процесс факторов).

Мы будем рассматривать уравнения, являющиеся математическими моделями различных процессов, случайные отклонения которых описываются одномерным винеровским процессом. Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, F, \{F_t\}, P)$ с фильтрацией $\{F_t\}$ и согласованный с ним одномерный винеровский процесс $W(t,\omega)$. В дальнейшем символ ω будет опускаться. В первой части работы рассматривается задача Коши для стохастического дифференциального уравнения в частных производных параболического типа (см. [4]) с одномерным винеровским процессом $W(t)$

$$u_t^{'}(t,x) = Au(t,x) + f(t,x,w,u(t,x)) + \\ + b(t,x,w,u(t,x))W_t^{'}(t), \quad u(0,x) = u_0(x)\,, \tag{1}$$

где $x \in \mathbf{R^n}$, формальная производная $W_t^{'}(t)$ понимается в смысле Стратоновича, $A = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x,w)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{n} d_i(t,x,w)\frac{\partial}{\partial x_i}$ — эллиптический оператор второго порядка, в котором $a_{ij}(t,x,w)$ и $d_i(t,x,w)$ — предсказуемые и гладкие функции, а матрица $\{a_{ij}(t,x,w)\}_{i,j=1}^{n}$ — положительно определенная. При этом само уравнение (1) следует записывать в интегральной форме. Эта модель, в частности, используется в биологии, генетике, химии [7] и в других приложениях. Например, в работе [1] показано, что подобное уравнение описывает химические реакции, где $u(t,x)$ — функция зависимости относительного числа частиц реагента от времени t и географической координаты x внутри реактора.

Во второй части статьи рассматривается модель со стохастическим уравнением Бюргерса, возникшая в гидродинамике [2]

$$u_t^{'}(t,x) = \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j}^{''}(t,x) + \\ + u(t,x)\sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^{'}(t,x) + f(u(t,x)) + \\ + b(t,x,w,u(t,x))W_t^{'}(t)\,, \tag{2}$$

где $x \in \mathbf{R^n}$, формальная производная $W_t^{'}(t)$ понимается в смысле Стратоновича, а функция f непрерывна и удовлетворяет условию Липшица.

Основной результат работы состоит в том, что решения рассматриваемых уравнений имеют структуру $\phi(t,x,W(t)+C(t,x))$, где

Контактная информация: (347)273-78-53

$\phi(s,x,v)$ и $C(s,x)$ — гладкие случайные функции. Причем нахождение функции $\phi(s,x,v)$ не представляет особого труда, а функция $C(s,x)$ находится из некоторого классического, а не стохастического уравнения в частных производных, хотя и со случайными коэффициентами, поэтому для уравнений на функцию $C(s,x)$ существуют достаточно хорошо разработанные аналитические и численные методы решений. Последнее позволяет численное решение данных уравнений свести к решению «обычных» уравнений, что резко уменьшает сложность данной задачи.

1. О СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ИТО В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОДНОМЕРНЫМ ВИНЕРОВСКИМ ПРОЦЕССОМ

Рассмотрим задачу Коши (1) для стохастического дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с одномерным винеровским процессом.

Запишем уравнение (1) в интегральной форме

$$u(t,x)-u_0(x)= \\ =\int_0^t \Big(Au(s,x)+f(s,x,u(s,x))\Big)\,ds+ \\ +\int_0^t b(s,x,u(s,x))*dW(s)\,, \quad (3)$$

где второй интеграл в правой части уравнения (3) есть стохастический интеграл Стратоновича.

Воспользуемся методом, предложенным первым из авторов [5], и будем искать решение задачи Коши (3) в форме $u(t,x) = \tilde{u}(t,x,W(t))$, где $\tilde{u}(t,x,v)$ — неизвестная функция. Вычислим при каждом x стохастический дифференциал функции $\tilde{u}(t,x,W(t))$ в форме Стратоновича:

$$\tilde{u}(t,x,W(t))-\tilde{u}(0,x,W(0))= \\ =\int_0^t \tilde{u}_s^{'}(s,x,W(s))\,ds+ \\ +\int_0^t \tilde{u}_v^{'}(s,x,W(s))*dW(s)\,. \quad (4)$$

Сопоставляя соотношения (3) и (4), в силу стандартных рассуждений, приведенных в работе [5], получим:

$$\tilde{u}_v^{'}(s,x,v)=b(s,x,\tilde{u}(s,x,v))\,, \quad (5)$$

$$\tilde{u}_s^{'}(s,x,W(s))=A\tilde{u}(s,x,W(s))+ \\ +f(s,x,\tilde{u}(s,x,W(s)))\,. \quad (6)$$

Из соотношения (5) следует, что $\int \frac{d\tilde{u}}{b(s,x,\tilde{u})} = W(s)+C(s,x)$. Это позволяет представить решение уравнения (3) в неявном виде $\tilde{u}(s,x,W(s)) = \phi(s,x,W(s)+C(s,x))$, где $\phi(s,x,y)$ — уже известная случайная функция, а функцию $C(s,x)$ будем искать с помощью соотношения (6). Чтобы получить уравнение на функцию $C(s,x)$ в явном виде, подставим функцию $\phi(s,x,W(s)+C(s,x))$ в уравнение (6) и после преобразований получим

$$C_s^{'}(s,x)=AC(s,x)+ \\ +\frac{\tilde{A}C(s,x)}{b(s,x,\phi(s,x,W(s)+C(s,x)))}\,, \quad (7)$$

где оператор $\tilde{A}C(s,x)$ имеет вид:

$$\tilde{A}C(s,x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\times \\ \times\Big(C_{x_i}^{'}(s,x)C_{x_j}^{'}(s,x)b(s,x,\phi)b_\phi^{'}(s,x,\phi)+ \\ +C_{x_j}^{'}(s,x)(b_{x_i}^{'}(s,x,\phi)+ \\ +b_\phi^{'}(s,x,\phi)\phi_{x_i}^{'}(s,x,W(s)+C(s,x)))+ \\ +C_{x_i}^{'}(s,x)b_{x_j}^{'}(s,x,\phi)\Big)+ \\ +A\phi(s,x,W(s)+C(s,x))+ \\ +f(s,x,\phi(s,x,W(s)+C(s,x)))- \\ -\phi_s^{'}(s,x,W(s)+C(s,x))\,,$$

где $\phi=\phi(s,x,W(s)+C(s,x))$.

Следовательно, решение уравнения (1) представляется в виде $u(t,x) = \phi(t,x,W(t) + C(t,x))$, где $\phi(t,x,y)$ и $C(t,x)$ — гладкие случайные функции. Причем неизвестную функцию $\phi(t,x,y)$ следует искать из соотношения $\phi_g^{'}(t,x,y) = b(t,x,\phi(t,x,y))$, а функцию $C(t,x)$ — из уравнения (7).

Таким образом, решение задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с помощью методов, приведенных в работе [5], сводится к решению задачи Коши для классического, а не стохастического уравнения, но со случайными коэффициентами.

Пример 1

Одним из частных случаев уравнения (1) является модель роста популяции в случайной среде, рассмотренная D. A. *Dawson* и H. *Salehi* [3] в 1980 г., которая имеет вид

$$u(t,x) - u(0,x) =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^t u''_{xx}(s,x)\,ds + \int_0^t \sigma u(s,x) * dW(s)\,,$$
$$u(0,x) \equiv c \geq 0\,, \quad x \in \mathbf{R}\,, \tag{8}$$

где второй интеграл в правой части уравнения понимается в смысле Стратоновича. Решение уравнения будем искать в форме $u(t,x) = \tilde{u}(t,x,W(t))$, тогда

$$\begin{aligned} &\tilde{u}'_v(s,x,v) = \sigma\tilde{u}(s,x,v))\,,\\ &\tilde{u}'_s(s,x,W(s)) = \frac{1}{2}\tilde{u}''_{xx}(s,x,W(s))\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Из соотношения (9) имеем $\tilde{u}(s,x,W(s)) = \exp(\sigma(W(s)+C(s,x)))$, где неизвестная функция $C(t,x)$ ищется из уравнения

$$\begin{aligned} &C'_s(s,x) = \frac{C''_{xx}(s,x) + \sigma(C'_x(s,x))^2}{2}\,,\\ &C(0,x) = \frac{1}{\sigma}\ln c\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнение (10) — это потенциальное уравнение Бюргерса, для которого, как известно (см. [6]), существует автомодульное решение вида $\tilde{C}(z)$, где $z = xt^{-\frac{1}{2}}$. Определяющим уравнением для функции $\tilde{C}(z)$ является обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\tilde{C}'' + \sigma(\tilde{C}')^2 + z\tilde{C}' = 0\,. \tag{11}$$

Таким образом, решение уравнения (8) сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения (11).

2. О РЕШЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

Рассмотрим задачу Коши для стохастического дифференциального уравнения Бюргерса с цветным шумом, которое в интегральной форме имеет вид

$$u(t,x) - u_0(x) =$$
$$= \int_0^t \Big(\sum_{b,j=1}^n u''_{x_ix_j}(s,x) + f(u(s,x)) +$$
$$+ u(s,x)\sum_{b=1}^n u'_{x_i}(s,x)\Big)\,ds +$$
$$+ \int_0^t b(s,x,u(s,x)) * dW(s)\,,$$

второй интеграл в правой части уравнения понимается в смысле Стратоновича. Решение ищем в форме $u(t,x) = \tilde{u}(t,x,W(t))$. Вычислив при каждом x стохастический дифференциал функции $\tilde{u}(t,x,W(t))$ в форме Стратоновича и повторяя рассуждения, приведенные выше для стохастических уравнений параболического типа, получим:

$$\begin{aligned} &\tilde{u}'_v(s,x,W(s)) = b(s,x,\tilde{u}(s,x,W(s)))\,,\\ &\tilde{u}'_s(s,x,W(s)) =\\ &= \sum_{b,j=1}^n \tilde{u}''_{x_ix_j}(s,x,W(s)) + f(\tilde{u}(s,x,W(s))) +\\ &\qquad + \tilde{u}(s,x,W(s))\sum_{b=1}^n \tilde{u}'_{x_i}(s,x,W(s)). \end{aligned} \tag{12}$$

Из соотношения (12) следует, что $\int \frac{d\tilde{u}}{b(s,x,\tilde{u})} = W(s) + C(s,x)$, следовательно, решение уравнения Бюргерса представляется в виде $\tilde{u}(s,x,W(s)) = \phi(s,x,W(s)+C(s,x))$, где $\phi(s,x,y)$ и $C(s,x)$ — гладкие случайные функции.

Уравнение на функцию $C(s,x)$ в явном виде получим из соотношения (13):

$$\begin{aligned} C'_s(s,x) &= \sum_{b,j=1}^n C''_{x_ix_j}(s,x) +\\ &+ \phi(s,x,g)\sum_{b}^n C'_{x_i}(s,x) +\\ &+ (\tilde{G}C(s,x) + \sum_{b,j=1}^n \phi''_{x_ix_j}(s,x,g) +\\ &+ \phi(s,x,g)\sum_{b}^n \phi'_{x_i}(s,x,g) + f(\phi(s,x,g)) -\\ &- \phi'_s(s,x,g))/(b(s,x,\phi(s,x,g)))\,, \end{aligned} \tag{13}$$

где $g = g(s,x) = W(s) + C(s,x)$, а оператор $\tilde{G}C(s,x)$ имеет вид:

$$\sum_{b,j=1}^n \Big(C'_{x_i}(s,x)C'_{x_j}(s,x)b(s,x,\phi)b'_\phi(s,x,\phi) +$$
$$+C'_{x_j}(s,x)(b'_{x_i}(s,x,\phi)+b'_\phi(s,x,\phi)\phi'_{x_i}(s,x,g))+$$

$$+ C'_{x_i}(s,x) b'_{x_j}(s,x,\phi)\Big) ,$$

где $\phi = \phi(s, x, W(s) + C(s, x))$.

Следовательно, решение задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения Бюргерса (2) также можно свести к решению задачи Коши для классического, а не стохастического уравнения, но со случайными коэффициентами.

Пример 2

Рассмотрим частный случай уравнения (2)

$$\begin{aligned} u'_t(t,x) = u''_{xx}(t,x) + f(u(t,x)) + \\ + u(t,x)u'_x(t,x) + W'_t(t) , \\ t \in [0,T] , \quad x \in [0,1] , \end{aligned} \quad (14)$$

с начальным условием $u(0, x) = u_0(x)$ и граничными условиями $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$. Предполагается, что функция f непрерывна и удовлетворяет условию Липшица, формальная производная $\frac{\partial}{\partial t} W(t)$ понимается в смысле Стратоновича, а само уравнение следует рассматривать в интегральном виде

$$u(t,x) - u_0(x) = \int_0^t \Big(u''_{xx}(s,x) + \\ + f(u(s,x)) + u(s,x) u'_x(s,x) \Big)\, ds + \int_0^t 1 * dW(s) , \quad (15)$$

второй интеграл в правой части уравнения есть интеграл Стратоновича. Пусть $u(t, x) = \tilde{u}(t, x, W(t))$ — решение уравнения (15), тогда получим:

$$\begin{aligned} &\tilde{u}'_v(s,x,v) = 1 , \\ &\tilde{u}'_s(s,x,W(s)) = \tilde{u}''_{xx}(s,x,W(s)) + \\ &\qquad + f(\tilde{u}(s,x,W(s))) + \\ &\qquad + \tilde{u}(s,x,W(s)) \tilde{u}'_x(s,x,W(s)) . \end{aligned} \quad (16)$$

Из соотношения (17) вытекает, что $\int d\tilde{u} = W(s) + C(s, x)$, следовательно, $\tilde{u}(s, x, W(s)) = W(s) + C(s, x)$, где $C(s, x)$ — гладкая случайная функция, которую будем искать из уравнения

$$\begin{aligned} C'_s(s,x) = C''_{xx}(s,x) + f(W(s) + C(s,x)) + \\ + (W(s) + C(s,x)) C'_x(s,x) , \end{aligned}$$

с начальными и краевыми условиями $C(0, x) = u_0(x)$, $C(t, 0) = C(t, 1) = -W(t)$.

3. СТОХАСТИЧЕСКОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В предыдущих разделах было показано, что решение ряда стохастических дифференциальных уравнений в частных производных представляется в виде гладкой случайной функции от винеровского процесса со сносом $C(s, x)$, причем неизвестные функции $C(s, x)$ являются, в свою очередь, решением классических дифференциальных уравнений в частных производных. Последнее позволяет предложить следующий алгоритм для решения задач типа (1) и (2):

1. Моделируется траектория броуновского движения $W(t)$;
2. С помощью метода, предложенного в работе [5], строится классическое уравнение в частных производных на функцию $C(s, x)$;
3. Уравнение на функцию $C(s, x)$ решается аналитическими или численными методами;
4. Из соотношений (5) или (12) находится структура $\phi(t, x, W(t) + C(t, x))$ решения стохастического дифференциального уравнения в частных производных и, наконец, само решение как функция $\phi(t, x, W(t) + C(t, x))$.

Пример 3

Рассмотрим уравнение из примера 1 в области $Q = [0, 1] \times [1, 2]$ с $\sigma = 1$ и с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} &u(t,x) - u(0,x) = \frac{1}{2} \int_0^t u''_{xx}(s,x)\, ds + \\ &+ \int_0^t u(s,x) * dW(s) , \quad u(0,x) = x, \\ &u(s,1) = u(s,2) = \exp\left(W(s)\right) . \end{aligned} \quad (17)$$

Решение этого уравнения представляется в виде $\tilde{u}(s, x, W(s)) = \exp(W(s) + C(s, x))$, где неизвестная функция $C(s, x)$ ищется из потенциального уравнения Бюргерса

$$C'_s(s,x) = \frac{C''_{xx}(s,x) + (C'_x(s,x))^2}{2} . \quad (18)$$

Из начальных условий на функцию $u(s, x)$ легко выводятся условия для уравнения (19): $C(0, x) = \ln x$, $C(s, 1) = C(s, 2) = 0$.

Для построения разностной схемы разобьем исходную область прямоугольной сеткой с шагами $\Delta s = 1/M, \Delta x = 1/N$. В вычислениях

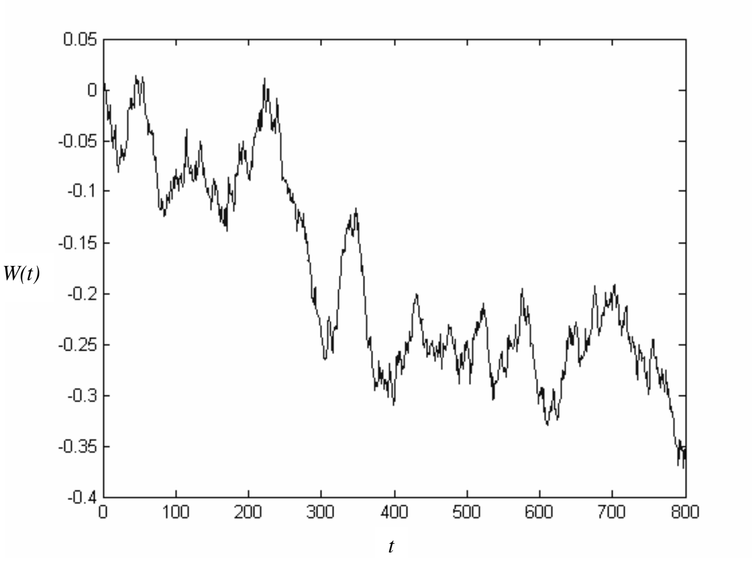

Рис. 1. Модель винеровского случайного процесса

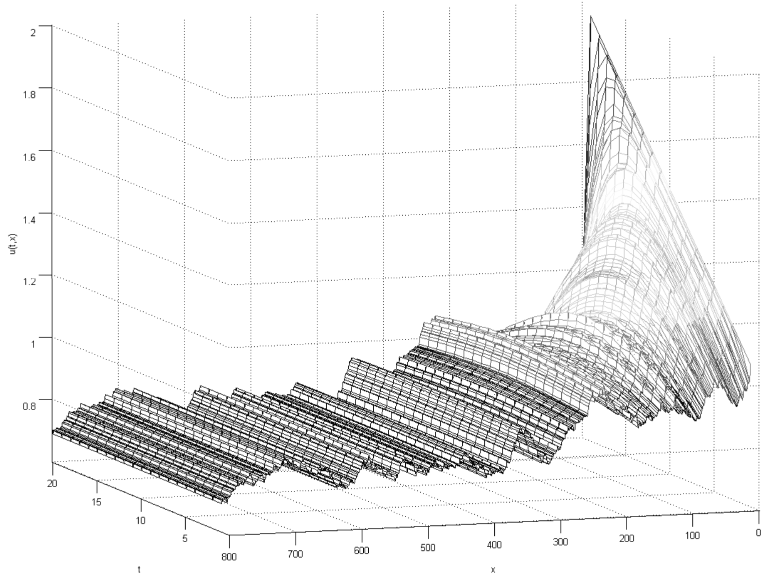

Рис. 2

используются значения винеровского процесса в точках $s_i, i = 0, ..., M-1$ разбиения отрезка $[0, 1]$. Поэтому нам необходимо смоделировать винеровский процесс $W(t)$. Пусть точки $t_1 < t_2 < ... < t_n$ равноудалены друг от друга:

$$t_i - t_{i-1} = \Delta t\,, \quad i = 2, ..., n\,,$$

тогда приращения винеровского процесса

$$W(t_2) - W(t_1)\,,$$
$$W(t_3) - W(t_2)\,, ..., W(t_n) - W(t_{n-1})$$

имеют нормальное распределение $N(0, \Delta t)$. Поэтому достаточно сгенерировать $n-1$ независимых случайных величин: $\nu_0, \nu_1, ..., \nu_{i-1} \Rightarrow N(0, \Delta t)$, а затем вычислить $W(t_i) = \sum_{j=1}^{i} \nu_j$.

На рис. 1 представлена модель винеровского случайного процесса.

Будем искать функцию C_Δ, которая является приближением функции $C(s, x)$, в узлах сетки $\{s_i, x_j\}$, $i = 0, ..., M-1, j = 1, ..., N-1$. Заменим производные в уравнении (19) разностными отношениями:

$$C_s^{'} \approx \frac{C_\Delta(s_{i+1}, x_j) - C_\Delta(s_i, x_j)}{\Delta s}\,,$$
$$C_x^{'} \approx \frac{C_\Delta(s_i, x_{j+1}) - C_\Delta(s_i, x_j)}{\Delta x}\,,$$
$$C_{xx}^{''} \approx \frac{C_\Delta(s_i, x_{j-1}) - 2C_\Delta(s_i, x_j) + C_\Delta(s_i, x_{j+1})}{(\Delta x)^2}\,.$$

Подставляя эти соотношения вместо соответствующих производных в (19), получим явную формулу:

$$C_\Delta(s_{i+1}, x_j) = C_\Delta(s_i, x_j) + \\ + \frac{\Delta s}{2(\Delta x)^2}\Big(C_\Delta(s_i, x_{j-1}) - 2C_\Delta(s_i, x_j) + \\ + C_\Delta(s_i, x_{j+1}) + \\ + \Big(C_\Delta(s_i, x_{j+1}) - C_\Delta(s_i, x_j)\Big)^2\Big). \quad (19)$$

Таким образом мы можем построить матрицу значений функции $C_\Delta(s_i, x_j)$, $i = 0, ..., M-1, j = 1, ..., N-1$ в узлах сетки. Причем первый и последний столбцы матрицы значений формируются из условий $C_\Delta(s_i, 1) = C_\Delta(s_i, 2) = 0$, а первая строка — из условия $C_\Delta(0, x_j) = \ln x_j$. Вторая строка по формуле (20) рассчитывается на основании первой, третья — на основании второй и т. д.

На рис. 2 представлен график численного решения $\exp(W(s) + C(s, x))$ уравнения (18).

Таким образом, основной результат работы состоит, в частности, в том, что нет необходимости решать исходное стохастическое уравнение в частных производных, что представляет собой исключительно тяжелую и трудоемкую в вычислительном плане задачу, а достаточно только моделировать процесс броуновского движения и воспользоваться достаточно хорошо разработанными для «обычных» уравнений в частных производных вычислительными методами.

В заключение необходимо выделить тот факт, что все предыдущие рассуждения справедливы не только для винеровского процесса $W(t)$, но и для любых детерминированных непрерывных функций или случайных процессов с непрерывными с вероятностью 1 реализациями $W(t)$, которые имеют неограниченную вариацию на любом конечном промежутке. Например, в качестве функции $W(t)$ может быть взята функция Вейерштрасса, координатная функция кривой Пеано или другая непрерывная функция с фрактальными свойствами. Если рассматривать приведенные выше уравнения с такими функциями, то условие предсказуемости коэффициентов уравнений следует опустить и везде в рассуждениях необходимо заменить интеграл Стратоновича на симметричный интеграл, который является (см. подробнее в [5]) детерминированным аналогом стохастического интеграла Стратоновича по винеровскому процессу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Arnold, L.** On the consistency of the mathematical models of chemical reactions // L. Arnold // Dynamics of synergetic systems, Bielefeld. (1980). P. 107–118.
2. **Aurely, A.** On numerical approximation of stochastic Burgers' equation / A. Aurely, G. Istvan // The Shiryaev Festschrift. P. 1–17.
3. **Dawson, D. A.** Spatially homogeneous random evolutions / D. A. Dawson, H. Salehi // J. Multivariate Anal. 10 (1980). P. 141–180.
4. **Peszat, S.** SPDEs driven by a homogeneous wiener process, stochastic partial differential equations and applications / S. Peszat. Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, (2002). P. 417–429.
5. **Насыров, Ф. С.** Симметричные интегралы и стохастический анализ / Ф. С. Насыров // Теория вероятностей и ее применения. Т. 51, вып. 3. С. 496–517.
6. **Полянин, А. Д.** Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. М. : ФизМатЛит, 2005. 256 с.
7. **Розовский, Б. Л.** Эволюционные стохастические системы / Б. Л. Розовский. М. : Наука, 1983. 207 с.

ОБ АВТОРАХ

Насыров Фарит Сагитович, проф. каф. математики. Дипл. математик (ЛГУ, 1976). Д-р физ.-мат. наук по теории вероятностей, матем. статистике и по матем. анализу (ИМ им. Соболева, Новосибирск, 2002). Иссл. в обл. теории случ. процессов, теории функций, фин. математики.

Парамошина Ирина Геннадьевна, дипл. математик-инженер по прикладной математике (УГАТУ, 2001). Готовит диссертацию по моделированию и численно-аналитическому решению задач, описываемых СДУ в частных производных.