МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519.7

А. И. ЗАИКО

# СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС ЗАИКО С РАВНОМЕРНЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Изложена оригинальная математическая модель случайного процесса с равномерным законом распределения. Она адекватно описывает сигналы при дискретных и цифровых измерениях. *Случайный процесс; равномерное распределение*

## ВВЕДЕНИЕ

Широкое распространение для описания измеряемых сигналов получил стационарный случайный процесс с нормальным (Гауссовым) законом распределения. Он обладает эргодическим свойством, хорошо согласуется с центральной предельной теоремой и характеризуется всего тремя параметрами: математическим ожиданием, дисперсией и ковариационной функцией [1, 2].

Недостатком нормального процесса являются бесконечные границы существования, что затрудняет применение его для описания дискретных и цифровых измерений. Использование усеченных нормальных законов распределений устраняет этот недостаток, но усложняет математическое описание [1, 2].

В статье описывается оригинальный стационарный случайный процесс с равномерным законом распределения плотности вероятности, который свободен от этих недостатков и сравнительно прост [3].

## 1. ОДНОМЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ [1, 2]

*Одномерная плотность распределения вероятности* такого процесса

$$w_1[X] = \begin{cases} \dfrac{1}{X_в - X_н}, \\ X_н \le X \le X_в\,; \\ 0\,, \quad \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $X_н$ и $X_в$ — нижняя и верхняя границы изменения сигнала $x(t)$.

*Одномерное распределение вероятности*

$$W_1[X] = \int\limits_{X_н}^{X_1} w_1[Y]\,dY = \begin{cases} 0\,, & X < X_н\,; \\ \dfrac{X - X_н}{X_в - X_н}\,, & X_н \le X \le X_в\,; \\ 1\,, & X_в < X\,. \end{cases}$$

Математическое ожидание такого процесса

$$m = \int\limits_{X_н}^{X_в} X w_1[X]\,dX = \frac{X_в + X_н}{2}\,,$$

дисперсия

$$D = \sigma^2 = \int\limits_{X_н}^{X_в} (X - m)^2 w_1[X]\,dX = \frac{(X_в - X_н)^2}{12}$$

и одномерная характеристическая функция

$$\theta_1[j\nu] = \int\limits_{X_н}^{X_в} w_1[X] \exp^{j\nu X}\,dX = \exp(j\nu m)\frac{\sin(\sqrt{3}\nu\sigma)}{\sqrt{3}\nu\sigma}\,.$$

## 2. ДВУМЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ [4, 5]

*Условная двумерная плотность вероятности* $w_2[X_2|X_1]$, также распределена равномерно между нижней $X_н(X_1)$ и верхней $X_в(X_1)$ границами динамического диапазона изменения $x(t_2)$ при условии, что $x(t_1) = X_1$, которые равны:

$$X_н(X_1) = X_н + (X_1 - X_н)\rho_{12}\,;$$

Контактная информация: (347)272-11-62

$$X_{\text{в}}(X_1) = X_{\text{в}} - (X_{\text{в}} - X_1)\rho_{12}\,,$$

где $\rho_{12} = \rho\,(t_2 - t_1)$ — нормированная корреляционная функция, обладающая следующими свойствами:

1) $\rho_{12} = \rho_{21}$;
2) $\rho_{11} = \rho_{22} = 1$;
3) $\rho_{-\infty 2} = \rho_{1\infty} = \rho_{-\infty\infty} = 0$.

Тогда *условная двумерная плотность вероятности*

$$w_2[X_2|X_1] = \begin{cases} \dfrac{1}{X_{\text{в}}(X_1) - X_{\text{н}}(X_1)} = \\ = \dfrac{1}{(X_{\text{в}} - X_{\text{н}})\,(1-\rho_{12})}\,, \\ X_{\text{н}} \le X_1 \le X_{\text{в}}\,; \\ X_{\text{н}}(X_1) \le X_2 \le X_{\text{в}}(X_1)\,; \\ 0\,, \quad \text{в остальных случаях}\,. \end{cases}$$

Условные математическое ожидание $m_2(X_1)$ и дисперсия $D_2(X_1)$:

$$m_2(X_1) = \int\limits_{X_{\text{н}}(X_1)}^{X_{\text{в}}(X_1)} X_2 w_2\,[X_2\,|X_1\,]\; dX_2 = \\ = m + (X_1 - m)\rho_{12}\,;$$

$$D_2(X_1) = \\ = \int\limits_{X_{\text{н}}(X_1)}^{X_{\text{в}}(X_1)} [X_2 - m_2(X_1)]^2\, w_2\,[X_2\,|X_1\,]\, dX_2 = \\ = D\,(1-\rho_{12})^2\,.$$

Отсюда следует, что $X_2$ можно выбирать раньше или позже $X_1$, т. е. могут быть $t_2 > t_1$ или $t_2 < t_1$.

*Двумерная плотность распределения вероятности*

$$w_2[X_1;X_2] = w_1[X_1]w_2[X_2|X_1] = \\ = \begin{cases} \dfrac{1}{(X_{\text{в}} - X_{\text{н}})[X_{\text{в}}(X_1) - X_{\text{н}}(X_1)]} = \\ \dfrac{1}{(X_{\text{в}} - X_{\text{н}})^2\,(1-\rho_{12})}\,, \\ X_{\text{н}} \le X_1 \le X_{\text{в}}\,; \\ X_{\text{н}}(X_1) \le X_2 \le X_{\text{в}}(X_1)\,; \\ 0\,, \quad \text{в остальных случаях}\,. \end{cases}$$

Корреляционная функция процесса

$$R(t_2 - t_1) = \sigma^2\rho_{12}\,.$$

*Двумерная функция вероятности*

$$W_2\,[X_1;X_2] = \int\limits_{X_{\text{н}}}^{X_1}\int\limits_{X_{\text{н}}(X_1)}^{X_2} w_2\,[Y_1;Y_2]dY_1dY_2 = \\ = \begin{cases} 0\,, \quad X_1 < X_{\text{н}}\,, \quad X_2 < X_{\text{н}}\,(X_1)\,; \\ \dfrac{(X_1 - X_{\text{н}})\,[X_2 - X_{\text{н}}\,(X_1)]}{(X_{\text{в}} - X_{\text{н}})^2\,(1-\rho_{12})}\,, \\ X_{\text{н}} \le X_1 \le X_{\text{в}}\,, \\ X_{\text{н}}\,(X_1) \le X_2 \le X_{\text{в}}\,(X_1)\,; \\ 1\,, \quad X_{\text{в}} < X_1\,, \quad X_{\text{в}}\,(X_1) < X_2\,. \end{cases}$$

Двумерная характеристическая функция процесса

$$\theta_2[j\nu_1;j\nu_2] = \\ = \int\limits_{X_{\text{н}}}^{X_{\text{в}}}\int\limits_{X_{\text{н}}(X_1)}^{X_{\text{в}}(X_1)} w_2[X_1;X_2]\exp^{j(\nu_1X_1+\nu_2X_2)}\; dX_1\,dX_2 = \\ = \exp\left[j\,(\nu_1+\nu_2)\,m\right]\times \\ \times\frac{\sin\left[\sqrt{3}\nu_2\,(1-\rho_{12})\,\sigma\right]}{\sqrt{3}\nu_2\,(1-\rho_{12})\,\sigma}\,\frac{\sin\left[\sqrt{3}\,(\nu_1+\nu_2\rho_{12})\,\sigma\right]}{\sqrt{3}\,(\nu_1+\nu_2\rho_{12})\,\sigma}\,.$$

## 3. ТРЕХМЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ [5]

*Условная трехмерная плотность вероятности* $w_3\,[X_3\,|X_1;X_2\,]$ распределена равномерно между нижней $X_{\text{н}}\,(X_1;X_2)$ и верхней $X_{\text{в}}\,(X_1;X_2)$ границами динамического диапазона изменения $x\,(t_3)$ при условии, что $x\,(t_1) = X_1$ и $x\,(t_2) = X_2$, и равна

$$w_3\,[X_3\,|X_1;X_2\,] = \\ = \frac{w_3\,[X_1;X_2;X_3]}{w_2\,[X_1;X_2]} = \frac{w_3\,[X_1;X_2;X_3]}{w_1\,[X_1]\,w_2\,[X_2\,|X_1\,]} = \\ = \begin{cases} \dfrac{1}{X_{\text{в}}\,(X_1;X_2) - X_{\text{н}}(X_1;X_2)} = \\ = \dfrac{1}{(X_{\text{в}} - X_{\text{н}})\left(1 - \frac{\rho_{13}+\rho_{23}}{1+\rho_{12}}\right)}\,, \\ X_{\text{н}} \le X_1 \le X_{\text{в}}\,, \quad X_{\text{н}}\,(X_1) \le X_2 \le X_{\text{в}}\,(X_1)\,, \\ X_{\text{н}}\,(X_1;X_2) \le X_3 \le X_{\text{в}}\,(X_1;X_2)\,; \\ 0\,, \quad \text{в остальных случаях}\,. \end{cases}$$

Условные математическое ожидание $m_3\,(X_1;X_2)$ и дисперсия $D_3\,(X_1;X_2)$:

$$\left.\begin{array}{l} m_3\,(X_1;X_2) = \\ = \displaystyle\int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)} X_3 w_3\,[X_3\,|X_1;X_2\,]\;dX_3 = \\ \qquad = m + (X_1 - m)\,\dfrac{\rho_{13}-\rho_{23}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2} + \\ \qquad\qquad + (X_2 - m)\,\dfrac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\;; \\ D_3\,(X_1;X_2) = \\ \quad = \displaystyle\int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_в(X_1;X_2)} [X_3 - m_3\,(X_1;X_2)]^2 \times \\ \qquad\qquad \times\, w_3\,[X_3\,|X_1;X_2\,]\;dX_3 = \\ \qquad\qquad = D\left(1-\dfrac{\rho_{13}+\rho_{23}}{1+\rho_{12}}\right)^2 . \end{array}\right\}$$

Отсюда следует, что $w_3\,[X_3\,|X_1;X_2\,]$ является четной функцией по отношению к сдвигам времени $t_2-t_1$, $t_3-t_1$ и $t_3-t_2$. Это означает, что $X_1$, $X_2$ и $X_3$ можно выбирать в любой последовательности.

*Трехмерная безусловная плотность распределения вероятностей*

$$\begin{array}{l} w_3\,[X_1;X_2;X_3] = \\ \qquad w_2\,[X_1;X_2]\,w_3\,[X_3\,|X_1;X_2\,] = \\ \qquad w_1\,[X_1]\,w_2\,[X_2\,|X_1\,]\,w_3\,[X_3\,|X_1;X_2\,] = \end{array}$$

$$= \begin{cases} 1\Big/\left\{\begin{array}{l}(X_в - X_н)\,[X_в\,(X_1) - X_н(X_1)] \\ {[X_в\,(X_1;X_2) - X_н(X_1;X_2)]}\end{array}\right\} = \\ = 1/((X_в - X_н)^3\,(1-\rho_{12}) \times \\ \times\left(1-\dfrac{\rho_{13}+\rho_{23}}{1+\rho_{12}}\right)), \\ X_н \le X_1 \le X_в; \\ X_н(X_1) \le X_2 \le X_в\,(X_1)\;; \\ X_н(X_1;X_2) \le X_3 \le X_в\,(X_1;X_2)\;; \\ 0\,, \quad в \quad остальных \quad случаях\,. \end{cases}$$

*Трехмерная функция вероятности*

$$W_3\,[X_1;X_2;X_3] =$$

$$= \int\limits_{X_н}^{X_1}\;\int\limits_{X_н(X_1)}^{X_2}\;\int\limits_{X_н(X_1;X_2)}^{X_3} W_3\,[Y_1;Y_2;Y_3]dY_1dY_2dY_3 =$$

$$= \begin{cases} 0\,, \quad X_1 < X_н\,, \quad X_2 < X_н\,(X_1)\,, \\ X_3 < X_н\,(X_1;X_2)\;; \\ ((X_1 - X_н)\,[X_2 - X_н(X_1)] \times \\ {[X_3 - X_н(X_1;X_2)])/} \\ ((X_в - X_н)\,[X_в\,(X_1) - X_н(X_1)]) \times \\ \times [X_в\,(X_1;X_2) - X_н(X_1;X_2)])\,, \\ X_н \le X_1 \le X_в;\; X_н(X_1) \le X_2 \le X_в\,(X_1)\;; \\ X_н(X_1;X_2) \le X_3 \le X_в\,(X_1;X_2)\;; \\ 1\,, \quad X_в < X_1\,; \quad X_в(X_1) < X_2\,; \\ X_в(X_1;X_2) < X_3\,. \end{cases}$$

Трехмерная характеристическая функция процесса

$$\begin{array}{c} \theta_3\,[j\nu_1;j\nu_2;j\nu_3] = \exp\,[j\,(\nu_1+\nu_2+\nu_3)\,m] \times \\ \times\,\dfrac{\sin\left[\sqrt{3}\nu_3\left(1-\frac{\rho_{13}+\rho_{23}}{1+\rho_{12}}\right)\sigma\right]}{\sqrt{3}\nu_3\left(1-\frac{\rho_{13}+\rho_{23}}{1+\rho_{12}}\right)\sigma} \times \\ \times\,\dfrac{\sin\left[\sqrt{3}\left(\nu_2+\nu_3\frac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\right)(1-\rho_{12})\,\sigma\right]}{\sqrt{3}\left(\nu_2+\nu_3\frac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\right)(1-\rho_{12})\,\sigma} \times \\ \times\,\dfrac{\sin\left[\sqrt{3}\,(\nu_1+\nu_2\rho_{12}+\nu_3\rho_{13})\,\sigma\right]}{\sqrt{3}\,(\nu_1+\nu_2\rho_{12}+\nu_3\rho_{13})\,\sigma}\,. \end{array}$$

### 4. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

*Условная четырехмерная плотность вероятности* $w_4\,[X_4\,|X_1;X_2;X_3\,]$ распределена равномерно между нижней $X_н\,(X_1;X_2;X_3)$ и верхней $X_в\,(X_1;X_2;X_3)$ границами динамического диапазона изменения $x\,(t_3)$ при условии $x\,(t_1) = X_1$ и $x\,(t_2) = X_2$, и равна

$$w_4\,[X_4\,|X_1;X_2;X_3\,] =$$

$$= \begin{cases} 1/[X_в\,(X_1;X_2;X_3) - X_н(X_1;X_2;X_3)]\,, \\ X_н \le X_1 \le X_в\,, \\ X_н\,(X_1) \le X_2 \le X_в\,(X_1)\,, \\ X_н\,(X_1;X_2) \le X_3 \le X_в\,(X_1;X_2)\,, \\ X_н(X_1;X_2;X_3) \le X_4 \le X_в\,(X_1;X_2;X_3)\;; \\ 0\,, \quad в \quad остальных \quad случаях\,, \end{cases}$$

где

$$\begin{array}{l} X_в\,(X_1;X_2;X_3) - X_н\,(X_1;X_2;X_3) = \\ = (X_в - X_н)\,[1-\rho_{34}\,(1-\rho_{12}^2)\left(1-\dfrac{\rho_{13}+\rho_{23}}{1+\rho_{12}}\right)+ \\ \qquad + \rho_{24}\,(1-\rho_{13}^2)\left(1-\dfrac{\rho_{12}+\rho_{23}}{1+\rho_{13}}\right)+ \\ \qquad + \rho_{14}\,(1-\rho_{23}^2)\left(1-\dfrac{\rho_{12}+\rho_{13}}{1+\rho_{23}}\right)]/ \\ \qquad\qquad (1+2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{13}-\rho_{12}^2-\rho_{23}^2-\rho_{13}^2)\,. \end{array}$$

Условные математическое ожидание $m_4(X_1;X_2;X_3)$ и дисперсия $D_4(X_1;X_2;X_3)$:

$$\begin{gathered}m_4(X_1;X_2;X_3)=\\=\int\limits_{X_н(X_1;X_2;X_3)}^{X_в(X_1;X_2;X_3)} X_4 w_4[X_4|X_1;X_2;X_3]\,dX_4=\\=m+(X_1-m)(-\rho_{34}(\rho_{13}-\rho_{12}\rho_{23})-\\-\rho_{24}(\rho_{12}-\rho_{13}\rho_{23})+\rho_{14}(1-\rho_{23}^2))/\\(1+2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{13}-\rho_{12}^2-\rho_{23}^2-\rho_{13}^2)+\\+(X_2-m)(-\rho_{34}(\rho_{23}-\rho_{12}\rho_{13})+\\+\rho_{24}(1-\rho_{13}^2)-\rho_{14}(\rho_{12}-\rho_{23}\rho_{13}))/\\(1+2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{13}-\rho_{12}^2-\rho_{23}^2-\rho_{13}^2)+\\+(X_3-m)(\rho_{34}(1-\rho_{12}^2)-\\-\rho_{24}(\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12})-\rho_{14}(\rho_{13}-\rho_{23}\rho_{12}))/\\(1+2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{13}-\rho_{12}^2-\rho_{23}^2-\rho_{13}^2)\,.\end{gathered}$$

Плотность вероятности $w_4[X_4|X_1;X_2;X_3]$ является четной функцией по отношению к сдвигам времени.

*Четырехмерная безусловная плотность распределения вероятностей*

$$\begin{gathered}w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]=w_3[X_1;X_2;X_3]\\w_4[X_4|X_1;X_2;X_3]=\\=w_1[X_1]\,w_2[X_2|X_1]\,w_3[X_3|X_1;X_2]\\w_4[X_4|X_1;X_2;X_3]=\\=\begin{cases}1/\{(X_в-X_н)[X_в(X_1)-X_н(X_1)]\times\\\times[X_в(X_1;X_2)-X_н(X_1;X_2)]\times\\{[X_в(X_1;X_2;X_3)-X_н(X_1;X_2;X_3)]\}\,.}\end{cases}\end{gathered}$$

Четырехмерная характеристическая функция процесса

$$\begin{gathered}\theta_4[j\nu_1],,j\nu_2,j\nu_3,j\nu_4]=\\=\exp[j(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4)m]\times\\\times\sin\{\sqrt{3}\nu_4[1-(\rho_{34}(1-\rho_{12}^2)\left(1-\frac{\rho_{13}+\rho_{23}}{1+\rho_{12}}\right)+\\+\rho_{24}(1-\rho_{13}^2)\left(1-\frac{\rho_{12}+\rho_{23}}{1+\rho_{13}}\right)+\\+\rho_{14}(1-\rho_{23}^2)\left(1-\frac{\rho_{12}+\rho_{13}}{1+\rho_{23}}\right))/\\(1+2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{13}-\rho_{12}^2-\rho_{23}^2-\rho_{13}^2)]\sigma\}/\\\sqrt{3}\nu_4[1-(\rho_{34}(1-\rho_{12}^2)\left(1-\frac{\rho_{13}+\rho_{23}}{1+\rho_{12}}\right)+\\+\rho_{24}(1-\rho_{13}^2)\left(1-\frac{\rho_{12}+\rho_{23}}{1+\rho_{13}}\right)+\\+\rho_{14}(1-\rho_{23}^2)\left(1-\frac{\rho_{12}+\rho_{13}}{1+\rho_{23}}\right))/\\(1+2\rho_{12}\rho_{23}\rho_{13}-\rho_{12}^2-\rho_{23}^2-\rho_{13}^2)]\sigma\times\\\times\{\sin\{\sqrt{3}[\nu_3+\nu_4\times(\rho_{34}(1-\rho_{12}^2)-\\-\rho_{24}(\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12})-\rho_{14}(\rho_{13}-\rho_{23}\rho_{12}))/\\((1-\rho_{12}^2)-\rho_{23}(\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12})-\\-\rho_{13}(\rho_{13}-\rho_{23}\rho_{12}))](1-\frac{\rho_{12}+\rho_{13}}{1+\rho_{23}})\sigma\}/\\\{\sqrt{3}[\nu_3+\nu_4\times(\rho_{34}(1-\rho_{12}^2)-\\-\rho_{24}(\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12})-\rho_{14}(\rho_{13}-\rho_{23}\rho_{12}))/\\((1-\rho_{12}^2)-\rho_{23}(\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12})-\\-\rho_{13}(\rho_{13}-\rho_{23}\rho_{12}))]\left(1-\frac{\rho_{12}+\rho_{13}}{1+\rho_{23}}\right)\sigma\}\times\\\times\{\sin[\sqrt{3}(\nu_2+\nu_3\frac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}+\\+\nu_4\frac{\rho_{24}-\rho_{14}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2})(1-\rho_{12})\sigma]\}/\\\{\sqrt{3}(\nu_2+\nu_3\frac{\rho_{23}-\rho_{13}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}+\\+\nu_4\frac{\rho_{24}-\rho_{14}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2})(1-\rho_{12})\sigma\}\times\\\times\{\sin[\sqrt{3}(\nu_1+\nu_2\rho_{12}+\nu_3\rho_{13}+\nu_4\rho_{14})\sigma]\}/\\\{\sqrt{3}(\nu_1+\nu_2\rho_{12}+\nu_3\rho_{13}+\nu_4\rho_{14})\sigma\}\,.\end{gathered}$$

## 5. МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО

Это свойство ограниченного последействия описывается уравнением [1]

$$w_3[X_3|X_1;X_2]=w_2[X_3|X_2]\,.$$

Из него следует, что при $\rho_{13}=\rho_{12}\rho_{23}$, где $t_1\le t_2\le t_3$, *условная двумерная плотность вероятности* процесса

$$\begin{gathered}w_2[X_3|X_2]=\frac{w_3[X_1;X_2;X_3]}{w_2[X_1;X_2]}=\\=\frac{w_3[X_1;X_2;X_3]}{w_1[X_1]\,w_2[X_2|X_1]}=\\=\begin{cases}\dfrac{1}{X_в(X_2)-X_н(X_2)}=\\=\dfrac{1}{(X_в-X_н)(1-\rho_{23})}\,,\\X_н\le X_1\le X_в\,,\\X_н(X_1)\le X_2\le X_в(X_1)\,,\\X_н(X_2)\le X_3\le X_в(X_2)\,;\\0,\quad \text{в остальных случаях}\,,\end{cases}\end{gathered}$$

где границы изменения

$$X_н(X_2) = X_н + (X_2 - X_н)\rho_{23};$$
$$X_в(X_2) = X_в - (X_в - X_2)\rho_{23}.$$

Условные математическое ожидание $m_3(X_2)$ и дисперсия $D_3(X_2)$ такого процесса:

$$m_3(X_2) = \int\limits_{X_н(X_2)}^{X_в(X_2)} X_3 w_2[X_3|X_2]\,dX_3 = m + (X_2 - m)\rho_{23};$$

$$D_3(X_2) = \int\limits_{X_н(X_2)}^{X_в(X_2)} [X_3 - m_3(X_2)]^2 w_2[X_3|X_2]\,dX_3 = D(1-\rho_{23})^2.$$

Решением уравнения $\rho_{13} = \rho_{12}\rho_{23}$ является нормированная корреляционная функция

$$\rho_{ij} = \rho(t_j - t_i) = \exp(-\alpha|t_j - t_i|),\quad 0 \le \alpha < \infty.$$

Трехмерная характеристическая функция такого процесса

$$\theta_3[j\nu_1; j\nu_2; j\nu_3] = \exp[j(\nu_1+\nu_2+\nu_3)m] \times \frac{\sin\left[\sqrt{3}\nu_3(1-\rho_{23})\sigma\right]}{\sqrt{3}\nu_3(1-\rho_{23})\sigma} \times \frac{\sin\left[\sqrt{3}(\nu_2+\nu_3\rho_{23})(1-\rho_{12})\sigma\right]}{\sqrt{3}(\nu_2+\nu_3\rho_{23})(1-\rho_{12})\sigma} \times \frac{\sin\left[\sqrt{3}(\nu_1+\nu_2\rho_{12}+\nu_3\rho_{12}\rho_{23})\sigma\right]}{\sqrt{3}(\nu_1+\nu_2\rho_{12}+\nu_3\rho_{12}\rho_{23})\sigma}.$$

Аналогично для условных плотностей вероятности процесса с марковским свойством большей размерности выполняется условие $\rho_{ij} = \rho_{il}\rho_{lk}\cdots\rho_{rj}$, где $t_i \le t_l \le t_k \le \cdots \le t_r \le t_j$.

Так, для *условной четырёхмерной плотности вероятности* такого процесса

$$w_4[X_4|X_1;X_2;X_3] = w_2[X_4|X_3] = \frac{w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]}{w_3[X_1;X_2;X_3]} = \frac{w_4[X_1;X_2;X_3;X_4]}{w_1[X_1]\,w_2[X_2|X_1]\,w_2[X_3|X_2]} = \begin{cases} \dfrac{1}{X_в(X_3) - X_н(X_3)} = \dfrac{1}{(X_в - X_н)(1-\rho_{34})}, \\ X_н \le X_1 \le X_в, \\ X_н(X_1) \le X_2 \le X_в(X_1), \\ X_н(X_2) \le X_3 \le X_в(X_2), \\ X_н(X_3) \le X_4 \le X_в(X_3); \\ 0, \quad \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где границы изменения

$$X_н(X_3) = X_н + (X_3 - X_н)\rho_{34};$$
$$X_в(X_3) = X_в - (X_в - X_3)\rho_{34}.$$

Условные математическое ожидание $m_4(X_3)$ и дисперсия $D_4(X_3)$:

$$m_4(X_3) = \int\limits_{X_н(X_3)}^{X_в(X_3)} X_4 w_2[X_4|X_3]\,dX_4 = m + (X_3 - m)\rho_{34};$$

$$D_4(X_3) = \int\limits_{X_н(X_3)}^{X_в(X_3)} [X_4 - m_4(X_3)]^2 w_2[X_4|X_3]\,dX_4 = D(1-\rho_{34})^2.$$

Четырехмерная характеристическая функция для такого процесса

$$\theta_4[j\nu_1; j\nu_2; j\nu_3; j\nu_4] = \exp[j(\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4)m] \times \frac{\sin\left[\sqrt{3}\nu_4(1-\rho_{34})\sigma\right]}{\sqrt{3}\nu_4(1-\rho_{34})\sigma} \times \frac{\sin\left[\sqrt{3}(\nu_3+\nu_4\rho_{34})(1-\rho_{23})\sigma\right]}{\sqrt{3}(\nu_3+\nu_4\rho_{34})(1-\rho_{23})\sigma} \times \frac{\sin\left[\sqrt{3}(\nu_2+\nu_3\rho_{23}+\nu_4\rho_{23}\rho_{34})(1-\rho_{12})\sigma\right]}{\sqrt{3}(\nu_2+\nu_3\rho_{23}+\nu_4\rho_{23}\rho_{34})(1-\rho_{12})\sigma} \times \frac{\sin\left[\sqrt{3}(\nu_1+\nu_2\rho_{12}+\nu_3\rho_{12}\rho_{23}+\nu_4\rho_{12}\rho_{23}\rho_{34})\sigma\right]}{\sqrt{3}(\nu_1+\nu_2\rho_{12}+\nu_3\rho_{12}\rho_{23}+\nu_4\rho_{12}\rho_{23}\rho_{34})\sigma}.$$

Таким образом, предлагаемый случайный процесс требует минимума априорной информации и описывается всего тремя параметрами: нижней $X_н$ и верхней $X_в$ границами изменения и нормированной корреляционной функцией $\rho_{ij}$. Он адекватен большому количеству реальных сигналов, легко идентифицируем, удобен для описания дискретной обработки сигналов и цифровой техники [6–8].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Бендат, Дж.** Прикладной анализ случайных данных / Дж. Бендат, А. Пирсол. М. : Мир, 1989. 540 с.
2. **Губарев, В. В.** Вероятностные модели : Справ. Ч. 2 / В. В. Губарев. Новосибирск : Новосиб. электротехн. ин-т, 1992. 210 с.
3. **Заико, А. И.** Свид. 72200700005. Случайный процесс Заико А. И. с равномерным законом распределения. Математическая модель / А. И. Заико. Зарег. ФГУП «ВНТИЦ» 28.02.07 г. Описание. 10 с.
4. **Заико, А. И.** Случайный сигнал с равномерным законом распределения / А. И. Заико // Измерительная техника. 1999. № 1. С. 9–11.
5. **Заико, А. И.** Случайные процессы. Модели и измерения : учеб. пособие / А. И. Заико. М. : МАИ, 2006. 207 с.
6. **Заико, А. И.** Динамическая модель аналого-цифрового преобразователя поразрядного уравновешивания / А. И. Заико // Измерительная техника. 2000. № 7. С. 53–56.
7. **Заико, А. И.** Динамическая модель следящего аналого-цифрового преобразователя / А. И. Заико // Измерительная техника. 2001. № 7. С. 21–24.
8. **Заико, А. И.** Выбор шага дискретизации сигналов с равномерным законом распределения по информационному критерию / А. И. Заико // Измерительная техника. 2002. № 2. С. 24–26.


## ОБ АВТОРЕ

**Заико Александр Иванович,** проф. каф. теоретич. основ электротехн. Дипл. инж. электрон. тех-ки (УАИ, 1970). Д-р техн. наук по информац.-измерит. системам (ЛЭТИ, 1990). Заслуж. изобретатель РБ и РФ. Член-кор. Междунар. инж. акад. Иссл. в обл. метрологич. обесп., анализа и синтеза информац.-измерит. систем.