Уфа: УГАТУ, 2006 Вестник УГАТУ Т. 7, № 2 (15). С. 127–223

НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.2

Ф. С. НАСЫРОВ, И. Г. ПАРАМОШИНА

О СТРУКТУРЕ ОДНОМЕРНОГО ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

Показано, что одномерный диффузионный процесс представляется в виде детерминированной функции от винеровского процесса. Это позволило выявить связь между фундаментальными решениями уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка и сопряженного к нему обратного уравнения Колмогорова с произвольными гладкими коэффициентами и таких же уравнений с единичным коэффициентом диффузии и некоторым коэффициентом переноса и построить фундаментальные решения для целого класса таких уравнений. *Симметричный интеграл; стохастические дифференциальные уравнения; уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка; обратное уравнение Колмогорова*

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что если уравнения параболического типа описывают поведение осредненной среды процесса диффузии, то теория случайных процессов позволяет описывать поведение индивидуальной диффундирующей частицы с помощью диффузионных процессов. Под диффузионным процессом в теории случайных процессов понимается строго марковский процесс с непрерывными реализациями, производящий оператор которого есть дифференциальный оператор. Фактически существуют различные определения диффузионного процесса в зависимости от того, что понимается под производящим оператором — сильный инфинитезимальный оператор или другие, близкие понятия, в зависимости от других предположений, накладываемых, например, на траектории случайного процесса.

В настоящей работе рассматривается одномерный диффузионный вещественнозначный процесс, который определяется как марковский процесс с непрерывными реализациями, инфинитезимальный оператор которого есть дифференциальный оператор второго порядка

$$A_t f(x) = \frac{1}{2} a^2(t,x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) + b(t,x) \frac{\partial}{\partial x} f(x).$$

Коэффициенты $a^2(t,x)$ и $b(t,x)$ называются соответственно коэффициентами диффузии и переноса, они связаны с коэффициентами в уравнении теплопроводности. Диффузионные процессы оказались полезными также при изучении различных других явлений, в частности, они возникают как предельные для дискретных моделей, описывающих различные биологические явления, такие, как изменение с течением времени численности особей определенного биологического вида или концентрации гена в популяции.

Существуют два общих способа построения диффузионных процессов, первый из них восходит к А. Н. *Колмогорову* и является способом построения марковских процессов с помощью переходных функций процесса. Колмогоровым было показано, что в случае непрерывного времени переходная функция марковского процесса удовлетворяет некоторому параболическому дифференциальному уравнению, последнее привело к выявлению глубокой связи между диффузионными процессами, теорией полугрупп операторов и уравнениями параболического и эллиптического типов. Так, для переходных плотностей диффузионных процессов справедливы уравнения: прямое Колмогорова, называемое также уравнением Фоккера–Планка, и обратное; последнее в одномерном случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial s} p(s,x,t,y) = \frac{\partial}{\partial x} b(s,x) p(s,x,t,y) + \\ + \frac{1}{2} a^2(s,x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(s,x,t,y), \quad (0.1)$$

т. е. плотность перехода $p(s,x,t,y)$ является фундаментальным решением данного уравнения.

Ито предложил другой, прямой, способ построения диффузионных процессов как решений стохастических дифференциальных уравнений на основе построенной им теории стохастических интегралов. В настоящее время в одномерном случае дано полное описание однородных по времени строго марковских процессов с непрерывными реализациями и в этом смысле теория одномерных диффузионных процессов считалась построенной. В частности, известно, что многие одномерные диффузионные процессы могут быть сконструированы из процесса броуновского движения с помощью процедур случайной замены времени, убивания, отражения и т. д.

Цель данной работы состоит в том, чтобы показать, что в одномерном случае, если коэффициент диффузии не вырождается, теория диффузионных процессов во многом сводится к теории винеровских процессов с гладким случайным сносом, т. е. она значительно проще, чем считалось ранее. Основной результат работы состоит

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 04-01-00286-а, 05-01-97909.

в том, что диффузионный процесс, определяемый как решение стохастического дифференциального уравнения, есть просто детерминированная функция $\varphi(t, W(t) + C(t))$ от винеровского процесса $W(t)$ с гладким случайным сносом $C(t)$. Из этого факта могут быть выведены различные известные свойства диффузионных процессов. Следовательно, множество стохастических дифференциальных уравнений с неслучайными коэффициентами, удовлетворяющих условиям существования и единственности решения, можно разбить на классы эквивалентности по случайному сносу $C(t)$, поскольку вероятностная структура решений этих уравнений полностью зависит от винеровского процесса со случайным сносом $W(t) + C(t)$. Отсюда, например, следует и соответствующая факторизация для фундаментальных решений уравнений Колмогорова.

1. О СТРУКТУРЕ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА, ЯВЛЯЮЩЕГОСЯ РЕШЕНИЕМ ОДНОМЕРНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Приведем ряд сведений о симметричных интегралах, построенных первым из авторов и позволивших найти способ построения явных формул для решений одномерных стохастических дифференциальных уравнений и их детерминированных аналогов.

Будем говорить, что пара функций $X(s)$, $s \in [0,1]$, и $f(s,u)$, $s \in [0,1]$, $u \in R$, удовлетворяют *условию* (S) *на* $[0,t]$, $t \in [0,1]$, если:

a) функция $X(s)$, $s \in [0,t]$, непрерывна;

b) при п. в. u функция $f(s,u)$, $s \in [0,t]$, имеет ограниченное изменение и непрерывна справа по $s \in [0,t]$;

c) при п. в. u справедливо равенство $\int_0^t \mathbf{1}(X(s) = u)|f|(ds,u) = 0$, где при каждом u функция $|f|(s,u)$ есть полное изменение функции $f(\tau,u)$ по переменной τ на отрезке $[0,s]$;

d) полное изменение $|f|(t,u)$ функции $f(s,u)$ по переменной s на отрезке $[0,t]$ локально суммируемо по u.

Пусть функции $X(s)$ и $f(s,u)$ удовлетворяют условию (S) на отрезке $[0,t]$. Рассмотрим разбиения T_n, $n \in N$, отрезка $[0,t]$: $T_n = \{t_k^{(n)}\}$, $0 = t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_k^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_{m_n}^{(n)} = t$, $n \in N$. Предположим, что $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in N$, и $\lambda_n = \max_k \left| t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)} \right| \to 0$ при $n \to \infty$. Через $X^{(n)}(s), s \in [0,t]$, обозначим ломаную, построенную по функции $X(s)$ и отвечающую разбиению T_n. Введем следующие обозначения: $\Delta t_k^{(n)} = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}$, $\left[\Delta t_k^{(n)}\right] = \left[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}\right]$, $\Delta X_k^{(n)} = X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})$.

Симметричным интегралом (см. [1, 2]) называется

$$\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \times \int_{[\Delta t_k^{(n)}]} f(s, X^{(n)}(s))\, ds\, \Delta X_k^{(n)},$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений $T_n, n \in N$; условие (S) является достаточным условием существования симметричного интеграла.

Симметричный интеграл для винеровского процесса $X(s) = W(s)$ является (см. [1, 2]) детерминированным аналогом стохастического интеграла Стратоновича, в этом случае, если детерминированная непрерывная функция $h(s,u)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial u}h(s,u)$, *формулу Ито* можно записать (см. [3]) в виде

$$\int_0^t h(s,W(s)) * dW(s) = \int_0^t h(s,W(s))dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial u}h(s,W(s))ds,$$

где первое слагаемое в правой части равенства есть стохастический интеграл Ито.

Рассмотрим детерминированный аналог стохастического дифференциального уравнения

$$\eta(t) - \eta(0) = \int_0^t a(s,\eta(s)) * dX(s) + \int_0^t B(s,\eta(s))ds,$$

где $X(s)$ — детерминированная непрерывная функция, имеющая неограниченную вариацию на любом временном отрезке или реализация случайного процесса с такими же свойствами, а коэффициенты $a(s,x) \neq 0$ и $b(s,x)$ всегда считаются детерминированными функциями.

В работе [2] было показано, что решение уравнения следует искать в виде $\eta(s) = \varphi(s, X(s) + C(s))$, где $\varphi(s,u)$ — гладкая детерминированная функция, а $C(s)$ – гладкая функция (случайный процесс с гладкими траекториями), при этом неизвестные функции следует искать из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\varphi(s,u) = a(s,\varphi(s,u)), \\ &\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,u+C(s))|_{u=X(s)} = \\ &\qquad = B(s,\varphi(s,X(s)+C(s))). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Первое уравнение из (1.1) определяет из равенства

$$\int \frac{d\varphi}{a(s,\varphi)} = u + C(s) \tag{1.2}$$

неявную функцию $\varphi(s,u)$ в предположении, что из равенства (1.2) функция $\varphi(s,u)$ определяется однозначным образом, второе уравнение есть дифференциальное уравнение на функцию $C(s)$:

$$C'(s) = \\ = \frac{B(s,\varphi(s,X(s)+C(s))) - \frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,x)|_{x=X(s)+C(s)}}{a(s,\varphi(s,X(s)+C(s)))},$$

$$\varphi(0,X(0)+C(0)) = \eta(0), \qquad (1.3)$$

при этом необходимо, чтобы последнее уравнение удовлетворяло условиям существования и единственности решения.

Наиболее просто выглядит решение однородного уравнения

$$\eta(t)-\eta(0) = \int_0^t a(\eta(s)) * dX(s) + \int_0^t B(\eta(s))\,ds,$$

в этом случае решение имеет вид $\eta(s) = \varphi(X(s) + C(s))$, где $\varphi(x)$ — детерминированная функция.

Пусть $X(s) = W(s)$ — стандартный винеровский процесс, тогда мы приходим к классическому стохастическому дифференциальному уравнению в форме Стратоновича, которое определяет диффузионный процесс. В этом случае для рассматриваемого уравнения известны различные условия существования и единственности решения (см.[3, 4]). С помощью формулы Ито исходное уравнение можно записать в форме Ито

$$\eta(t)-\eta(0) = \int_0^t a(s,\eta(s))dX(s) + \int_0^t b(s,\eta(s))\,ds, \qquad (1.4)$$

где $b(s,x) = B(s,x) + \frac{1}{2}a(s,x)\frac{\partial}{\partial x}a(s,x)$, а первый интеграл в правой части есть стохастический интеграл Ито. Известно (см. [3, 4]), что решение уравнения (1.4) определяет диффузионный процесс и плотности вероятностей перехода этого процесса являются фундаментальными решениями уравнения (0.1).

Поскольку решение стохастического дифференциального уравнения (1.4) записывается в форме $\eta(s) = \varphi(s, W(s)+C(s))$, то, зная вид детерминированной функции $\varphi(s,u)$ и случайной гладкой функции $C(s)$, мы можем построить решение стохастического дифференциального уравнения (1.4), которое зависит от винеровского процесса $W(s)$ со случайным сносом $C(s)$. При этом вся вероятностная информация о решении $\eta(s)$ содержится в случайном процессе $W(s) + C(s)$.

Обратно, если нам известны функции $a(s,x)$ и $C(s)$, мы можем найти из соотношения (1.3) функцию $B(t,x) = C'(t)a(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}\varphi(s,x)$, где функция $\varphi(s,x)$ определяется из формулы (1.2).

Следовательно множество стохастических дифференциальных уравнений вида (1.4), удовлетворяющие перечисленным выше предположениям, можно разбить на классы эквивалентности по случайному сносу $C(s)$, поскольку вероятностная структура решений этих уравнений зависит от винеровского процесса со случайным сносом $W(s) + C(s)$.

Винеровский процесс со случайным сносом $\xi(s) = W(s) + C(s)$ может быть записан в виде стохастического дифференциала $\xi(t) - \xi(0) = \int_0^t dW(s) + \int_0^t C'(s)\,ds$, в силу формулы Ито и соотношения (1.3) из этого равенства получаем для процесса $\xi(s)$ стохастическое дифференциальное уравнение

$$\xi(t)-\xi(0) = \int_0^t dW(s) + \\ + \int_0^t \frac{b(s,\varphi(s,\xi(s))) - \frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,x)|_{x=\xi(s)}}{a(s,\varphi(s,\xi(s)))}\,ds,$$

$$\xi(0) = W(0) + C(0), \qquad (1.5)$$

где первый интеграл в правой части равенства есть стохастический интеграл Ито. Если переходные плотности процесса $\eta(t)$, определяемого уравнением (1.4), удовлетворяют (см. [4]) уравнению (0.1), то уравнению (1.5) соответствует обратное уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{p}(s,x,t,y) = \\ = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{p}(s,x,t,y) + \tilde{b}(s,x)\frac{\partial}{\partial x}\tilde{p}(s,x,t,y), \qquad (1.6)$$

где

$$\tilde{b}(s,x) = \frac{b(s,\varphi(s,x)) - \frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,x)}{a(s,\varphi(s,x))}. \qquad (1.7)$$

2. О ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО СТОХАСТИЧЕСКОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

В дальнейшем всюду предполагается, что $X(s) = W(s)$, $a(t,x) \neq 0$ при п. в. x и функции $a(t,x)$ и $b(t,x)$ дважды непрерывно дифференцируемы по x.

Покажем, что знание переходной плотности распределения процесса $W(s) + C(s)$ позволяет построить фундаментальное решения для целого класса уравнений Колмогорова, соответствующего уравнению (0.1). Цель данного раздела состоит в том, чтобы прямым вычислением проверить этот факт. Поскольку с точки зрения уравнения Колмогорова знак коэффициента $a(t,x)$ безразличен, ниже будем считать, что $a(t,x) \geqslant 0$. Пусть $p(s,x,t,y)$ и $\tilde{p}(s,x,t,y)$ — переходные плотности процессов $\eta(s)$ и $W(s)+C(s)$ соответственно. Обозначим через $\varphi_s^{-1}(y)$ функцию, обратную при каждом s функции $y = \varphi(s,u)$. В силу соотношения $\eta(s) = \varphi(s,W(s)+C(s))$ справедливо соответствующее равенство для плотностей вероятностей перехода:

$$p(s,u,t,y) = \\ = \frac{d}{dy}\int_R \mathbf{1}(\varphi(t,v) \leqslant y)\tilde{p}(s,\varphi_t^{-1}(u),t,v)\,dv = \\ = \frac{d}{dy}\int_R \mathbf{1}(u \leqslant \varphi_t^{-1}(y))\tilde{p}(s,\varphi_t^{-1}(u),t,v)dv =$$

$$= \frac{\tilde{p}(s, \varphi_s^{-1}(u), t, \varphi_t^{-1}(y))}{a(t, y)}. \qquad (2.1)$$

Опираясь на формулу (2.1), вычислим частные производные переходной плотности $p(s, t, u, y)$ и подставим их в уравнение (0.1). Имеем

$$a(t, y)\frac{\partial}{\partial s}p(s, u, t, y) = \frac{\partial}{\partial s}\tilde{p}(s, \varphi_s^{-1}(u), t, \varphi^{-1}(y)) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\tilde{p}(s, x, t, \varphi_t^{-1}(y))|_{x=\varphi_s^{-1}(u)}\frac{\partial}{\partial s}\varphi_s^{-1}(u).$$

Воспользуемся первой из формул (1.2) и найдем частную производную по x

$$a(t, y)\frac{\partial}{\partial x}p(s, u, t, y) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\tilde{p}(s, x, t, \varphi_t^{-1}(y))|_{x=\varphi_s^{-1}(u)}\frac{\partial}{\partial u}\varphi_s^{-1}(u) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\tilde{p}(s, x, t, \varphi_t^{-1}(y))|_{x=\varphi_s^{-1}(u)}\frac{1}{a(s, u)}.$$

Остается вычислить вторую производную

$$a(t, y)\frac{\partial^2}{\partial u^2}p(s, u, t, y) =$$

$$= \frac{1}{a^2(s, u)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{p}(s, x, t, \varphi_t^{-1}(y))|_{x=\varphi_s^{-1}(u)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{p}(s, x, t, \varphi_t^{-1}(y))|_{x=\varphi_s^{-1}(u)}\frac{\partial}{\partial u}a(s, u)\right].$$

Подставив вычисленные частные производные в уравнение (0.1), после алгебраических преобразований получим

$$-\frac{\partial}{\partial s}\tilde{p}(s, \varphi_s^{-1}(u), t, \varphi_t^{-1}(y)) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{p}(s, x, t, \varphi_t^{-1}(y))|_{x=\varphi_s^{-1}(u)} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\tilde{p}(s, x, t, \varphi_t^{-1}(y))|_{x=\varphi_s^{-1}(u)}\frac{1}{a(s, u)}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial}{\partial s}\varphi_s^{-1}(u)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_s^{-1}(x)|_{x=\varphi_s^{-1}(u)} + b(s, u)\right]. \qquad (2.2)$$

Поскольку при каждом s имеем $\varphi(s, \varphi_s^{-1}(u)) = u$, то, дифференцируя последнее тождество по s, приходим к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s, x)|_{x=\varphi_s^{-1}(u)} + \frac{\partial}{\partial x}\varphi(s, x)|_{x=\varphi_s^{-1}(u)}\frac{\partial}{\partial s}\varphi_s^{-1}(u).$$

Следовательно, выражение в квадратных скобках в правой части формулы (2.2) равно

$$b(s, u) - \frac{\partial}{\partial s}\varphi(s, \varphi_s^{-1}(u)).$$

Положив затем $u = \varphi(s, x)$ в равенстве (2.2), приходим к уравнению (1.6).

Итак, множество стохастических дифференциальных уравнений, удовлетворяющих перечисленным выше предположениям, можно разбить на классы эквивалентности по случайному сносу $C(s)$, поскольку вероятностная структура решений этих уравнений зависит от винеровского процесса со случайным сносом $W(s) + C(s)$. Аналогичная ситуация справедлива и для фундаментальных решений параболических уравнений, соответствующих стохастическим дифференциальным уравнениям, в этом случае факторизация уравнений происходит (см. (1.6) и (1.7)) по коэффициенту переноса $\tilde{b}(s, x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Насыров, Ф.С.** Симметричные интегралы и их применение в финансовой математике / Ф. С. Насыров // Тр. МИАН. 2002. Т. 237. С. 265–278.
2. **Насыров, Ф.С.** Симметричные интегралы и потраекотрные аналоги стохастических дифференциальных уравнений / Ф. С. Насыров // Вестник УГАТУ. 2003. Т. 4, № 2. С. 55–66.
3. **Гихман, И.И.** Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. М. : Наука, 1977. 586 с.
4. **Королюк, В.С.** Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. М. : Наука, 1985. 640 с.

ОБ АВТОРАХ

Насыров Фарит Сагитович, проф. каф. математики. Дипл. математик (ЛГУ, 1976). Д-р физ.-мат. наук по теории вероятностей и мат. статистике и по мат. анализу (защ. в ИМ им. Соболева, Новосибирск, 2002). Иссл. в обл. теории случайных процессов, теории функций, финансовой математики.

Парамошина Ирина Геннадьевна, дипл. математик-инж. по прикладной мат. (УГАТУ, 2001). Готовит дис. по теории случайных процессов под рук. проф. Ф. С. Насырова.