УДК 517.9

А. В. ЖИБЕР, Р. Д. МУРТАЗИНА

О НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРОЙ МЕДЛЕННОГО РОСТА

Предложен новый подход классификации интегрируемых нелинейных уравнений, основанный на исследовании структуры характеристической алгебры. Для уравнения синус-Гордона построен базис характеристической алгебры. *Нелинейное гиперболическое уравнение; характеристическая алгебра; характеристическое уравнение; интеграл; базис*

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются нелинейные уравнения вида

$$u_{xy} = f(u, u_x). \tag{1}$$

В работе [1] показано, что нелинейное уравнение (1) при $f = f(u)$, обладающее высшими симметриями, сводится к одному из следующих:

$$u_{xy} = e^u, \tag{2}$$

$$u_{xy} = \sin u, \tag{3}$$

$$u_{xy} = e^u + e^{-2u}. \tag{4}$$

Уравнение (2) было впервые проинтегрировано Лиувиллем еще более ста лет тому назад, а уравнения (3) и (4) в конце 70-х годов методом обратной задачи теории рассеяния.

Известно, что симметрийный подход (см. [2, 3]) для классификации скалярных интегрируемых нелинейных гиперболических уравнений в общей ситуации наталкивается на серьезные трудности и не приводит к успеху. С другой стороны, условием полной интегрируемости в квадратурах уравнений (1) является конечномерность алгебры Ли, связанной с так называемым характеристическим уравнением (характеристической алгебры), а условием интегрируемости методом обратной задачи рассеяния – наличие конечномерного представления характеристической алгебры (см. [4]).

Понятие характеристической алгебры для экспоненциальных гиперболических систем уравнений введено в работе [5].

В настоящей работе для решения классификационной задачи используется подход, основанный на исследовании структуры характеристической алгебры.

Рассмотрим набор независимых переменных

$$u,\, u_1,\, \overline{u}_1,\, u_2,\, \overline{u}_2, \dots ,u_n,\, \overline{u}_n, \dots ,$$

где

$$u_1 = u_x,\, \overline{u}_1 = u_y,\, u_2 = u_{xx},\, \overline{u}_2 = u_{yy}, \dots$$

Определим x-характеристическую алгебру Ли A уравнений (1). Для этого введем понятие симметрии.

Определение. *Функция*

$$F = F(u, u_1, \overline{u}_1, u_2, \overline{u}_2, \dots , u_n, \overline{u}_n)$$

называется симметрией уравнения (1), *если она удовлетворяет определяющему уравнению*

$$D\overline{D}F = \frac{\partial f}{\partial u_1} DF + \frac{\partial f}{\partial u} F.$$

Здесь $D\,(\overline{D})$ – оператор полного дифференцирования по переменной $x\,(y)$ в силу уравнения (1).

Например,

$$\overline{D} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{u}_{k+1} \frac{\partial}{\partial \overline{u}_k} + \sum_{k=1}^{\infty} D^{k-1}(f) \frac{\partial}{\partial u_k}\,. \tag{5}$$

Известно (см. [2]), что любая симметрия F уравнения (1) представима в виде

$$F = \varphi(u_1,\, u_2, \dots , u_n) + \overline{\varphi}(u, \overline{u}_1,\, \overline{u}_2, \dots , \overline{u}_n),$$

где φ и $\overline{\varphi}$, в свою очередь, есть симметрии уравнения (1).

Обозначим через $\Im$ множество локально-аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных $u, u_1,\, u_2, \dots , u_n, \dots$, то есть

$$\Im = \langle \varphi = \varphi(u, u_1,\, u_2, \dots , u_n),\, n = 1, 2, \dots \rangle.$$

Оператор $\overline{D}$ на этом классе функций действует по правилу (см. (5))

$$\overline{D}\varphi = \overline{u}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \sum_{k=1}^{\infty} D^{k-1}(f(u)) \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}\,.$$

Далее через X_1 и X_2 обозначим следующие векторные поля

$$X_1 = \sum_{k=1}^{\infty} D^{k-1}(f) \frac{\partial}{\partial u_k}\,, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u}\,. \tag{6}$$

Отметим, что

$$\overline{D} = \overline{u}_1 X_2 + X_1. \tag{7}$$

X-характеристическая алгебра Ли уравнения (1) есть алгебра A, порожденная элементами X_1 и X_2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 04-01-00190-а, 05-01-00775-а).

Пусть L_n – линейное пространство коммутаторов длины $n-1$, $n=2,3,\dots$. Например, L_2 – линейная оболочка векторных полей X_1, X_2, а L_3 порождается элементом $[X_1, X_2]$ и т. д. Тогда характеристическую алгебру Ли A представим в виде

$$A=\bigcup_{i=2}^{\infty} L_i.$$

Аналогично вводится y-характеристическая алгебра Ли $\overline{A}$ уравнения (1)

$$\overline{A}=\bigcup_{i=2}^{\infty} \overline{L}_i.$$

В работе показано, что ограничение на порядок роста размерности пространств L_n и $\overline{L}_m$, а именно не более чем на единицу, по крайней мере на первых шагах, полностью определяет правую часть уравнения (1). При этом полученный список уравнений совпадает с известным списком интегрируемых уравнений.

1. УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА

В этом параграфе рассматриваются уравнения

$$u_{xy}=f(u). \tag{1.1}$$

Оператор полного дифференцирования D на множестве функций $\Im$ определяется так:

$$D=\sum_{i=0}^{\infty} u_{i+1}\frac{\partial}{\partial u_i}.$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1.1. *Пусть векторное поле Z имеет вид*

$$Z=\alpha_1\frac{\partial}{\partial u_1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial u_2}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial u_3}+\dots,$$

$$\alpha_i=\alpha_i(u,\, u_1,\, u_2,\, \dots),\ i=1,2,3,\dots$$

Тогда $[D,Z]=0$, если и только если $Z=0$.

Доказательство. Имеем

$$[D,Z]=$$
$$=(D(\alpha_1)\frac{\partial}{\partial u_1}+D(\alpha_2)\frac{\partial}{\partial u_2}+D(\alpha_3)\frac{\partial}{\partial u_3}+\dots)-$$
$$-(\alpha_1\frac{\partial}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial u_1}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial u_2}+\dots)=0.$$

Таким образом, получаем, что

$$\alpha_1=0,\ D(\alpha_1)-\alpha_2=0,\ D(\alpha_2)-\alpha_3=0,\ \dots$$

и, следовательно, $\alpha_i=0$ для $i=1,2,3,\dots$.

Лемма доказана.

Далее, так как D и $\overline{D}$ коммутируют и

$$[D,\overline{D}]=fX_2+\overline{u}_1[D,X_2]+[D,X_1],$$

то

$$[D,X_1]=-fX_2,\quad [D,X_2]=0. \tag{1.2}$$

Пусть $X_3=[X_2,X_1]$. Используя тождество Якоби и (1.2) получаем

$$[D,X_3]=-f_uX_2. \tag{1.3}$$

Положим

$$\pounds_n=\bigcup_{i=2}^{n} L_i,\quad n=3,4,\dots.$$

Следует отметить, что операторы X_1, X_2 – линейно независимы при $f(u)\neq 0$.

Лемма 1.2. *Размерность линейного пространства $\pounds_3$ равна двум тогда и только тогда, когда*

$$X_3-cX_1=0.$$

При этом правая часть уравнения (1.1) *принимает вид*

$$f(u)=\alpha e^{cu},$$

где α, c – постоянные, $\alpha\neq 0$.

Доказательство. Пусть $\dim \pounds_3=2$. Тогда, так как

$$X_3=f_u\frac{\partial}{\partial u}+f_{uu}u_1\frac{\partial}{\partial u_1}+\dots,$$

то $X_3=c(u)X_1$, согласно лемме 1 и формулам (1.2) и (1.3) имеем

$$[D,X_3-cX_1]=-f_uX_2-D(c)X_1+cfX_2=0,$$

Последнее соотношение эквивалентно следующей системе уравнений

$$f_u-cf=0,\quad D(c)=0.$$

Следовательно c — const и $f=\alpha e^{cu}$.

Лемма доказана.

Таким образом, нелинейное уравнение (1.1) с двумерной характеристической алгеброй Ли A сводится к уравнению Лиувилля (2).

Пусть $X_4=[X_2,X_3]$, $X_5=[X_1,X_3]$. Используя тождество Якоби и (1.2), (1.3) получаем

$$[D,X_4]=-f_{uu}X_2,\quad [D,X_5]=f_uX_3-fX_4. \tag{1.4}$$

Далее будем предполагать, что размерность линейного пространства $\pounds_3$ равна трем и покажем, что случай, когда $\dim \pounds_4=3$, не реализуется.

Действительно, если $\dim \pounds_4=3$, то

$$X_4=c_1X_1+c_2X_3\quad \text{и}\quad X_5=\overline{c}_1X_1+\overline{c}_2X_3, \tag{1.5}$$

где $c_i=c_i(u,u_1,u_2,\dots)$, $\overline{c}_i=\overline{c}_i(u,u_1,u_2,\dots)$, $i=1,2$.

Первое соотношение (1.5), согласно утверждению леммы 1 и формулам (1.2)–(1.4) эквивалентно соотношениям

$$D(c_1) = 0, \quad c_1 f - f_{uu} + c_2 f_u = 0, \quad D(c_2) = 0.$$

Поэтому c_1, c_2 — постоянные и

$$f_{uu} - c_2 f_u - c_1 f = 0. \qquad (1.6)$$

Второе соотношение (1.5) эквивалентно следующей системе уравнений

$$D(\overline{c}_1) + c_1 f = 0, \quad \overline{c}_1 f + \overline{c}_2 f_u = 0,$$

$$D(\overline{c}_2) + c_2 f - f_u = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что $\overline{c}_2$ — const, т. е. $f_u = c_2 f$. Тогда, как показано выше, $\dim \pounds_3 = 2$.

Пусть теперь $\dim \pounds_4 = 4$. Тогда, используя Лемму 1.1 и формулы (1.2)–(1.4), получаем, что либо

$$X_4 = c_1 X_1 + c_2 X_3 + c_3 X_5$$

и, следовательно,

$$D(c_1) - c_1 c_3 f = 0, \quad f_{uu} - c_1 f - c_2 f_u = 0,$$

$$D(c_2) + c_3 f_u - c_2 c_3 f = 0, \qquad (1.7)$$

либо

$$X_5 = \overline{c}_1 X_1 + \overline{c}_2 X_3 + \overline{c}_3 X_4$$

и тогда

$$D(\overline{c}_1) = 0, \quad \overline{c}_1 f + \overline{c}_2 f_u + \overline{c}_3 f_{uu} = 0,$$

$$D(\overline{c}_2) - f_u = 0, \quad D(\overline{c}_3) + f = 0. \qquad (1.8)$$

Согласно первому и третьему уравнениям (1.7) c_1, c_2 — const, $c_3 = 0$ (иначе $f_u = c_2 f$, тогда $\dim \pounds_3 = 2$) и функция f удовлетворяет уравнению $f_{uu} - c_2 f_u - c_1 f = 0$.

Если выполнено (1.8), то $f = 0$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.3. *Размерность пространства $\pounds_4$, порожденного операторами X_1, X_2, X_3, X_4 и X_5, равна 4 тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет уравнению вида*

$$f_{uu} - p f_u - q f = 0, \qquad (1.9)$$

где p, q — const и $f_u \neq \beta f$. При этом $X_4 = pX_3 + qX_1$.

Далее будем считать, что выполняется условие леммы 1.3. Введем операторы длины 4:

$$X_6 = [X_1, X_5] \quad \text{и} \quad X_7 = [X_2, X_5].$$

Используя тождество Якоби нетрудно показать, что $X_7 = pX_5$. Поэтому $\dim \pounds_5 \leqslant 5$.

Замечание. *Если $X_7 = 0$, то $p = 0$ и равенство (1.9) принимает вид*

$$f_{uu} - qf = 0.$$

Тогда уравнение (1.1) сводится к уравнению синус-Гордона (3).

С помощью формул (1.2)–(1.4), получаем, что

$$[D, X_6] = (f_u - 2pf) X_5. \qquad (1.10)$$

Легко проверить, что $\dim \pounds_5 = 5$. Теперь введем операторы длины 5:

$$X_8 = [X_3, X_5], \quad X_9 = [X_1, X_6], \quad X_{10} = [X_2, X_6].$$

Оператор $X_8 = -pX_6 + X_{10}$. Поэтому $\dim \pounds_6 \leq 7$.

Далее нетрудно показать, используя (1.2)–(1.4), (1.10), что

$$[D, X_9] = -f X_{10} + (f_u - 2pf) X_6,$$

$$[D, X_{10}] = (q - 2p^2) f X_5. \qquad (1.11)$$

Отметим, что случай $\dim \pounds_6 = 5$ не реализуется. При выполнении условия, что $\dim \pounds_6 = 6$ имеем

$$X_{10} = 0 \quad \text{и} \quad q = 2p^2,$$

тогда уравнение (1.1) приводится к уравнению Цицейки (4).

2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА

В этом параграфе мы приведем краткое описание x-характеристической алгебры Ли A уравнения

$$u_{xy} = e^u + e^{-u}. \qquad (2.1)$$

Введем кратные коммутаторы следующего специального вида

$$X_{i_1 \dots i_n} = ad_{i_1} \dots ad_{i_{n-1}} X_{i_n}, \quad ad_j Y = [X_j, Y].$$

Тогда линейное пространство L_n есть линейная оболочка элементов $X_{i_1 \dots i_n}$, где $i_k = 1, 2$, $k = 1, \dots, n$.

Выделим элементы вида

$$Y_n = X_{1 \dots 121}, \quad Z_n = X_{21 \dots 121}.$$

Теорема. *Для уравнения синус-Гордона (2.1) справедливы равенства*

$$\dim L_n = \begin{cases} 2, \text{при } n = 2k, \\ 1, \text{при } n = 2k-1, \end{cases}, \quad k = 3, 4, \dots . \qquad (2.2)$$

При этом линейное пространство L_{2k} порождается векторным полем $X_{1\dots121}$, а L_{2k+1} — полями $X_{1\dots121}$ и $X_{21\dots121}$.

Доказательство. Элементы X_1, X_2 и X_3 определены в §1. Здесь мы, для удобства, положим $X_4 = [X_1, X_3]$. Тогда пространство L_5 — есть линейная оболочка элементов $[X_1, X_4]$, $[X_2, X_4]$. Используя тождество Якоби и соотношения

$$[D, X_1] = -(e^u + e^{-u}) X_2, \quad [D, X_2] = 0,$$

$$[D, X_3] = -(e^u - e^{-u}) X_2,$$

$$[D, X_4] = -(e^u + e^{-u})X_1 + (e^u - e^{-u})X_3, \quad (2.3)$$

получаем, что

$$[D, [X_2, X_4]] = 0.$$

Следовательно, согласно Леммы 1, $[X_2, X_4] = 0$ и, поэтому L_5 порождается элементом $[X_1, X_4] = X_{1121}$.

Обозначим $X_5 = [X_1, X_4]$, тогда $[D, X_5] = (e^u - e^{-u})X_4$.

Пространство L_6 — есть линейная оболочка элементов $[X_1, X_5]$, $[X_2, X_5]$, $[X_3, X_4]$. Используя тождество Якоби имеем

$$[X_3, X_4] = [X_2, X_5].$$

Поэтому L_6 порождается элементами $[X_1, X_5] = X_{11121}$, $[X_2, X_5] = X_{21121}$.

Далее пусть $X_6 = [X_1, X_5]$, тогда

$$[D, X_6] = -(e^u - e^{-u})X_5 + (e^u + e^{-u})[X_2, X_5],$$

$$[D, X_{21121}] = (e^u + e^{-u})X_4.$$

Линейная оболочка L_7 порождается элементами

$$[X_1, X_6], \quad [X_2, X_6], \quad [X_3, X_5],$$
$$[X_1, X_{21121}], \quad [X_2, X_{21121}].$$

Используя тождество Якоби, имеем

$$[X_3, X_5] = -[X_1, X_{21121}] + [X_2, X_6].$$

Нетрудно показать, что

$$[D, [X_2, X_{21121}]] = (e^u - e^{-u})X_4 = [D, X_5],$$

следовательно, $[X_2, X_{21121}] = X_5$. А также, так как

$$[D, [X_1, X_{21121}]] =$$
$$= -(e^u + e^{-u})[X_2, X_{21121}] + (e^u + e^{-u})X_5,$$
$$[D, [X_2, X_6]] = -(e^u + e^{-u})[X_2, X_{21121}] + (e^u + e^{-u})X_5,$$

то $[X_1, X_{21121}] = [X_2, X_6]$ и $[X_2, X_6] = 0$.

Значит L_7 порождается элементом $[X_1, X_6] = X_{111121}$.

Пусть $X_{i+1} = [X_1, X_i]$, тогда

$$[D, X_{i+1}] = (e^u - e^{-u})X_i - (e^u + e^{-u})[X_2, X_i], \quad (2.4)$$

$$[D, [X_2, [X_2, X_i]]] =$$
$$(e^u - e^{-u})X_{i-1} + (e^u + e^{-u})[X_2, X_{i-1}], \quad (2.5)$$

$$[X_j, X_{i-j+3}] = 0, \quad j = 3, 4, \ldots, \quad (2.6)$$

$$[X_j, X_{21\ldots121}] = 0, \quad j = 3, 4, \ldots. \quad (2.7)$$

Так как

$$[D, [X_2, X_{i+1}]] =$$
$$= -(e^u + e^{-u})[X_2, [X_2, X_i]] + (e^u + e^{-u})X_i,$$

и

$$[D, [X_1, [X_2, X_i]]] =$$
$$= -(e^u + e^{-u})[X_2, [X_2, X_i]] + (e^u + e^{-u})X_i, \quad (2.8)$$

то

$$[X_2, X_{i+1}] = [X_1, [X_2, X_i]]. \quad (2.9)$$

Предположим, что L_{2k-1} порождается элементом $[X_1, X_{2k-2}]$. Заметим, что

$$[X_2, X_{2k-2}] = 0.$$

Тогда линейная оболочка L_{2k} порождается элементами

$$[X_1, X_{2k-1}], \quad [X_2, X_{2k-1}],$$
$$[X_3, X_{2k-2}], \ldots, [X_j, X_{21\ldots121}].$$

Согласно формулам (2.6) и (2.7) видно, что все эти элементы, кроме первых двух, равны нулю. Значит L_{2k} порождается элементами $[X_1, X_{2k-1}]$, $[X_2, X_{2k-1}]$ и

$$[D, [X_2, X_{2k-1}]] =$$
$$= -(e^u + e^{-u})[X_2, [X_2, X_{2k-2}]] + (e^u + e^{-u})X_{2k-2} =$$
$$= (e^u + e^{-u})X_{2k-2}.$$

Теперь пусть имеем L_{2k}, порожденное элементами $[X_1, X_{2k-1}]$, $[X_2, X_{2k-1}]$, тогда L_{2k+1} — есть линейная оболочка элементов

$$[X_1, X_{2k}], \quad [X_2, X_{2k}], \quad [X_1, [X_2, X_{2k-1}]],$$
$$[X_2, [X_2, X_{2k-1}]], \quad [X_3, X_{2k-1}], \ldots, [X_j, X_{21\ldots121}].$$

Из соотношений (2.6) и (2.7) следует, что

$$[X_3, X_{2k-1}] = [X_4, X_{2k-2}] = \ldots = [X_j, X_{21\ldots121}] = 0,$$

а из (2.4), (2.5) имеем

$$[D, [X_2, [X_2, X_{2k-1}]]] =$$
$$= (e^u - e^{-u})X_{2k-2} + (e^u + e^{-u})[X_2, X_{2k-2}] =$$
$$= [D, X_{2k-1}],$$

то есть $[X_2, [X_2, X_{2k-1}]] = X_{2k-1}$.

Соотношения (2.8) и (2.9) принимают вид

$$[X_2, X_{2k}] = [X_1, [X_2, X_{2k-1}]] =$$
$$= -(e^u + e^{-u})X_{2k-1} + (e^u + e^{-u})X_{2k-1} = 0.$$

Следовательно L_{2k+1} порождается элементом $[X_1, X_{2k}]$. Таким образом, из принципа математической индукции вытекает справедливость равенств (2.2).

Теорема доказана.

Таким образом, базис x-характеристической алгебры Ли A состоит из элементов

$$X_1, X_2, X_{21}, Y_3, Y_4, Y_5, Z_5, Y_6, Y_7, Z_7, \ldots$$
$$\ldots, Y_{2n}, Y_{2n+1}, Z_{2n+1}, \ldots.$$

Отметим, что в работе [6] уравнение синус-Гордона представлено как квадратичная система и в ней предложен другой базис характеристической алгебры.

3. УРАВНЕНИЯ $u_{xy} = f(u, u_x)$

X-характеристическая алгебра Ли A уравнения (1) порождается векторными полями

$$X_1 = \sum_{i=1}^{\infty} D^{i-1}(f)\frac{\partial}{\partial u_i} \quad \text{и} \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u},$$

а y-характеристическая алгебра Ли $\overline{A}$ полями

$$Y_1 = u_1\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{\infty} \overline{D}^{i-1}(f)\frac{\partial}{\partial \overline{u}_i} \quad \text{и} \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial u_1}.$$

Напомним, что

$$A = \bigcup_{i=2}^{\infty} L_i, \quad \overline{A} = \bigcup_{i=2}^{\infty} \overline{L}_i, \quad \mathcal{L}_n = \bigcup_{i=2}^{n} L_i,$$

$$\overline{\mathcal{L}}_n = \bigcup_{i=2}^{n} \overline{L}_i, \quad n = 3, 4, \dots ,$$

где $L_n(\overline{L}_n)$ — линейная оболочка векторных полей $X_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ($Y_{i_1 i_2 \dots i_n}$) (см. разд. 2).

Классификация уравнений (1) основана на предложении.

Лемма 3.1. *Пусть*

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \ \alpha_i = \alpha_i(u, \overline{u}_1, u_1, u_2, \dots , u_{n_i}),$$

$$i = 1, 2, \dots ,$$

$$Y = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial \overline{u}_i}, \ \overline{\alpha}_i = \overline{\alpha}_i(u, u_1, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots , \overline{u}_{n_i}),$$

$$i = 1, 2, \dots ,$$

то $[D, X] = 0$ *и* $[\overline{D}, Y] = 0$ *тогда и только тогда, когда* $X = Y = 0$.

Исследование размерности линейных пространств $\overline{\mathcal{L}}_n$, $n = 3, 4$ приводит к следующему результату:

- $\dim \overline{\mathcal{L}}_3 = 2$, если только уравнение (1) имеет вид

$$u_{xy} = u_x A(u); \tag{3.1}$$

- $\dim \overline{\mathcal{L}}_3 = 3$, если

$$u_{xy} = A(u_x), \quad A' - \frac{u_x}{A} = \lambda, \quad \lambda - \text{const}; \tag{3.2}$$

либо

$$u_{xy} = e^u A(u_x), \quad AA' - u_x = 0; \tag{3.3}$$

либо

$$u_{xy} = s(u)u_x + B, \quad B - \text{const} \neq 0; \tag{3.4}$$

- $\dim \overline{\mathcal{L}}_4 = 4$, если

$$u_{xy} = s(u)u_x + B(u); \tag{3.5}$$

либо

$$u_{xy} = s(u)A(u_x), \quad A' - \alpha\frac{u_1}{A} = \lambda, \quad \lambda - \text{const}; \tag{3.6}$$

либо

$$u_{xy} = e^u A(u_x),$$

где функция A удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} &c_1' A + 2c_1 A' = \lambda u_1 c_1^2 A^2, \\ &c_1(1 - \lambda A)(u_1 A' - A) + A'' = 0; \end{aligned} \tag{3.7}$$

либо

$$u_{xy} = e^u A(u_x),$$

где функция A удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} &A'' + c_3\lambda(A - u_1 A') = 0, \\ &c_3(A' - c_3 u_1 \lambda A) + c_3' A = 0; \end{aligned} \tag{3.8}$$

либо

$$u_{xy} = A(u_x). \tag{3.9}$$

Уравнения вида $u_{xy} = e^u A(u_x)$ можно записать так:

$$v_y = e^u, \quad u_x = \varphi(v).$$

Последнее сводится к уравнению

$$v_{xy} = v_x \varphi(v). \tag{3.10}$$

Задача об интегрировании уравнений (3.2), (3.3) и (3.7)–(3.9) сводится к интегрированию обыкновенного уравнения, поэтому далее мы их рассматривать не будем.

Интерес представляет уравнение (3.6).

Линейное пространство $\overline{\mathcal{L}}_4$ порождается полями

$$Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3 = [Y_2, Y_1],$$
$$Y_4 = [Y_2, Y_3] \quad \text{и} \quad Y_5 = [Y_1, Y_3].$$

Для уравнения (3.6), как отмечено выше, $\dim \overline{\mathcal{L}}_4 = 4$, а именно

$$Y_4 = \frac{\alpha}{A^2(u_1)}(Y_1 - u_1 Y_3). \tag{3.11}$$

Далее рассмотрим пространства $\overline{\mathcal{L}}_5$, $\overline{\mathcal{L}}_6$, порожденные операторами $Y_6 = [Y_2, Y_5]$, $Y_7 = [Y_1, Y_5]$ и $Y_8 = [Y_2, Y_7]$, $Y_9 = [Y_1, Y_7]$, $Y_{10} = [Y_3, Y_5]$ соответственно.

Для уравнения (3.6) имеем

$$Y_6 = -\frac{\alpha u_1}{A^2} Y_5, \quad Y_{10} = \frac{\alpha u_1}{A^2} Y_7 + Y_8,$$

поэтому $\dim \overline{\mathcal{L}}_5 = 5$, $\dim \overline{\mathcal{L}}_6 \leqslant 7$. При $\dim \overline{\mathcal{L}}_6 = 6$ получаем, что

$$s'' = 0 \quad \text{и} \quad \alpha = 2\lambda^2.$$

При $s = u$ уравнение (3.6) растяжением независимых переменных функции $A(u_x)$ приводится к виду

$$u_{xy} = 3uA(u_x), \quad (u_x - A)(A + 2u_x)^2 = 1,$$

которое связано с уравнением $v_{xy} = e^v + e^{-2v}$ дифференциальной подстановкой (см. [7])

$$v = -\frac{1}{2}\ln(u_x - A).$$

Если $\dim \mathcal{L}_i = \dim \overline{\mathcal{L}}_i = i,\ i = 4, 5$, то

$$u_{xy} = s(u)A(u_x), \quad s'' - c_1 s - c_2 s' = 0,$$

$$A' - \frac{u_x}{A} = \lambda, \quad c_1, c_2, \lambda - \text{const}. \qquad (3.12)$$

При $\lambda = 0$ для функции $s = \sin u$ уравнение (3.12) связано с уравнением $v_{xy} = \sin v$ дифференциальной подстановкой $v = \arcsin u_x + u$, а при $s = u$ — подстановкой $v = \arcsin u_x$.

Отметим, что полученный список интегрируемых уравнений совпадает с известным списком.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Жибер, А. В.** Уравнения Клейна–Гордона с нетривиальной группой / А. В. Жибер, А. Б. Шабат // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 5, С. 1103–1107.
2. **Жибер, А. В.** Системы уравнений $u_x = p(u, v),\ v_y = q(u, v)$, обладающие симметриями / А. В. Жибер, А. Б. Шабат // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 1. С. 29–33.
3. **Жибер, А. В.** Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечной алгеброй симметрий / А. В. Жибер // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, № 4. С. 33–54.
4. **Лезнов, А. Н.** Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем / А. Н. Лезнов, В. Г. Смирнов, А. Б. Шабат // Теоретическая и математическая физика. 1982. Т. 51, № 1. С. 10–21.
5. **Шабат, А. Б.** Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана / А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов // Предпринт. Уфа : Башкирск. филиал АН СССР, 1981. № 1. 20 с.
6. **Жибер, А. В.** Квадратичные системы, симметрии, характеристические и полные алгебры. Задачи математической физики и асимптотика их решений / А. В. Жибер, Ф. Х. Мукминов // Сборник науч. тр. БНЦ УРО АН СССР. Уфа, 1991. С. 14–33.
7. **Жибер, А. В.** Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа / А. В. Жибер, В. В. Соколов // УМН. 2001. Т. 56 (1). С. 63–106.

ОБ АВТОРАХ

Жибер Анатолий Васильевич, проф., вед. науч. сотр. ИМ УНЦ РАН. Дипл. математик (Новосиб. гос. ун-т, 1969). Д-р физ.-мат. наук по диф. уравнениям (защ. в ИМиМ УрОРАН, Екб., 1994). Иссл. в обл. совр. группового анализа диф. уравнений.

Муртазина Регина Димовна, аспирантка каф. математики. Дипл. магистр математики (УГАТУ, 2004). Готовит дис. о точно интегрируемых нелинейных моделях и характеристических алгебрах под рук. проф. А. В. Жибера.

УДК 532

С. В. ХАБИРОВ

ОДНОМЕРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Модель термовязкой жидкости допускает бесконечную группу преобразований. Любая двумерная подгруппа бесконечной нормальной подгруппы дает инвариантную подмодель нестационарных одномерных движений. Все они сводятся к системе из трех параболических уравнений 2-го поряда для двух обобщенных скоростей, температуры и уравнению для давления типа закона Дарси. *Гидродинамика; инвариантная подмодель*

ВВЕДЕНИЕ

Модели движения жидкости с вязкостью, зависящей от температуры или концентрации легких включений, применяются для описания различных технологических [1] и природных процессов [2]. Уравнения модели допускают бесконечную группу симметрий, что позволяет находить множество упрощенных подмоделей и точных решений. В работах [3, 4] был произведен предварительный групповой анализ модели, в котором классифицированы инвариантные подмодели рангов 3 и 2. Физическая интерпретация движений, описываемых инвариантными подмоделями, есть трудная задача. Здесь дана физическая трактовка движений для инвариантных подмоделей, построенных на двумерных подалгебрах из бесконечного идеала допускаемой алгебры. Эти подмодели называются одномерными нестационарными движениями и получены в работах [4, 5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ гранты 05-01-00080, ОФИ-а 04-01-08050.