которое связано с уравнением $v_{xy} = e^{v} + e^{-2v}$ дифференциальной подстановкой (см. [7])

$$v = -\frac{1}{2}\ln(u_x - A).$$

Если $\dim \mathcal{L}_i = \dim \overline{\mathcal{L}}_i = i,\ i = 4, 5$, то

$$u_{xy} = s(u)A(u_x), \quad s'' - c_1 s - c_2 s' = 0,$$

$$A' - \frac{u_x}{A} = \lambda, \quad c_1, c_2, \lambda - \text{const}. \tag{3.12}$$

При $\lambda = 0$ для функции $s = \sin u$ уравнение (3.12) связано с уравнением $v_{xy} = \sin v$ дифференциальной подстановкой $v = \arcsin u_x + u$, а при $s = u$ — подстановкой $v = \arcsin u_x$.

Отметим, что полученный список интегрируемых уравнений совпадает с известным списком.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Жибер, А. В.** Уравнения Клейна–Гордона с нетривиальной группой / А. В. Жибер, А. Б. Шабат // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 5, С. 1103–1107.
2. **Жибер, А. В.** Системы уравнений $u_x = p(u, v),\ v_y = q(u, v)$, обладающие симметриями / А. В. Жибер, А. Б. Шабат // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 1. С. 29–33.
3. **Жибер, А. В.** Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечной алгеброй симметрий / А. В. Жибер // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, № 4. С. 33–54.
4. **Лезнов, А. Н.** Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем / А. Н. Лезнов, В. Г. Смирнов, А. Б. Шабат // Теоретическая и математическая физика. 1982. Т. 51, № 1. С. 10–21.
5. **Шабат, А. Б.** Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана / А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов // Препринт. Уфа : Башкирск. филиал АН СССР, 1981. № 1. 20 с.
6. **Жибер, А. В.** Квадратичные системы, симметрии, характеристические и полные алгебры. Задачи математической физики и асимптотика их решений / А. В. Жибер, Ф. Х. Мукминов // Сборник науч. тр. БНЦ УРО АН СССР. Уфа, 1991. С. 14–33.
7. **Жибер, А. В.** Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа / А. В. Жибер, В. В. Соколов // УМН. 2001. Т. 56 (1). С. 63–106.

ОБ АВТОРАХ

Жибер Анатолий Васильевич, проф., вед. науч. сотр. ИМ УНЦ РАН. Дипл. математик (Новосиб. гос. ун-т, 1969). Д-р физ.-мат. наук по диф. уравнениям (защ. в ИМиМ УрОРАН, Екб., 1994). Иссл. в обл. совр. группового анализа диф. уравнений.

Муртазина Регина Димовна, аспирантка каф. математики. Дипл. магистр математики (УГАТУ, 2004). Готовит дис. о точно интегрируемых нелинейных моделях и характеристических алгебрах под рук. проф. А. В. Жибера.

УДК 532

С. В. ХАБИРОВ

ОДНОМЕРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Модель термовязкой жидкости допускает бесконечную группу преобразований. Любая двумерная подгруппа бесконечной нормальной подгруппы дает инвариантную подмодель нестационарных одномерных движений. Все они сводятся к системе из трех параболических уравнений 2-го поряда для двух обобщенных скоростей, температуры и уравнению для давления типа закона Дарси. *Гидродинамика; инвариантная подмодель*

ВВЕДЕНИЕ

Модели движения жидкости с вязкостью, зависящей от температуры или концентрации легких включений, применяются для описания различных технологических [1] и природных процессов [2]. Уравнения модели допускают бесконечную группу симметрий, что позволяет находить множество упрощенных подмоделей и точных решений. В работах [3, 4] был произведен предварительный групповой анализ модели, в котором классифицированы инвариантные подмодели рангов 3 и 2. Физическая интерпретация движений, описываемых инвариантными подмоделями, есть трудная задача. Здесь дана физическая трактовка движений для инвариантных подмоделей, построенных на двумерных подалгебрах из бесконечного идеала допускаемой алгебры. Эти подмодели называются одномерными нестационарными движениями и получены в работах [4, 5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ гранты 05-01-00080, ОФИ-а 04-01-08050.

1. МОДЕЛЬ ТЕРМОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ЕЕ СИММЕТРИИ

Уравнения движения вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости в пространстве $R^3(\vec{x})$ таковы [6]:

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\vec{u}=0,\\ &\vec{u}_t+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}+\nabla p=\\ &\qquad=\nu(T)\nabla^2\vec{u}+2\nu'(T)\nabla T\cdot E,\\ &c(T)(T_t+\vec{u}\cdot\nabla T)=\\ &\qquad=\nabla\cdot(\lambda(T)\nabla T)+2\nu(T)E:E, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\vec{u}$ — скорость, p — давление, T — температура, ν — кинематическая вязкость, λ — удельный коэффициент теплопроводности, c — теплоемкость E — тензор скоростей деформации.

Уравнения остаются инвариантными при вращениях в $R^3(\vec{x})\times R^3(\vec{u})$ и при переносе начала отсчета времени, а также при добавлении к давлению произвольной функции времени (оператор $\langle\varphi_0(t)\rangle_0=\varphi_0\partial_p$) и при произвольном движении начала в R^3 (операторы в декартовой системе координат $\langle\varphi_j(t)\rangle_j=\varphi_j\partial_{x^j}+\dot{\varphi}_j\partial_{u^j}-x^j\ddot{\varphi}_j\partial_p$, $j=1,2,3$). Операторы $\langle\varphi_i(t)\rangle_i, i=0,1,2,3$, образуют идеал в алгебре Ли всех допускаемых системой (1.1) операторов. Классы неподобных подалгебр размерности 1, 2, 3, 4 перечислены в [3]. Нас интересуют двумерные подалгебры $L_2=\{\sum\limits_j^3\langle\varphi_j^k(t)\rangle_j,\quad k=1,2\}$, с условиями $\sum\limits_j^3(\varphi_j^1\dot{\varphi}_j^2-\varphi_j^2\dot{\varphi}_j^1)=2\epsilon$, где $\epsilon=0$ или 1; $\varphi_j^k(t)$ — произвольные функции, образующие два неколлинеарных вектора $\vec{\varphi}_k(t), k=1,2$. Условия подалгебры в векторном виде таковы: $-\vec{\varphi}_1\cdot\dot{\vec{\varphi}}_2+\vec{\varphi}_2\cdot\dot{\vec{\varphi}}_1=2\varepsilon$, $\quad\vec{\varphi}_1\times\vec{\varphi}_2\neq 0$, где ε — постоянная. Две подалгебры из L_2 задаются пятью функциями из набора $\varphi_j^k(t)$.

Легко проверяется действием операторами $\sum\limits_j^3\langle\varphi_j^k(t)\rangle_j$, что подалгебра L_2 имеет инварианты:

$$\begin{aligned} &t,\quad s=\vec{x}\cdot\vec{\alpha},\\ &\vec{u}-|\vec{\alpha}|^{-2}(\dot{\vec{\varphi}}_1(\vec{n}_1\cdot\vec{x})+\dot{\vec{\varphi}}_2(\vec{n}_2\cdot\vec{x})),\\ &T,\quad p+2^{-1}|\vec{\alpha}|^{-2}((\ddot{\vec{\varphi}}_1\cdot\vec{x})(\vec{n}_1\cdot\vec{x})+\\ &\qquad+(\ddot{\vec{\varphi}}_2\cdot\vec{x})(\vec{n}_2\cdot\vec{x}))+\\ &\qquad+2^{-1}|\vec{\alpha}|^{-4}(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot((\ddot{\vec{\varphi}}_1\cdot\vec{\alpha})(\vec{n}_1\cdot\vec{x})+\\ &\qquad+(\ddot{\vec{\varphi}}_2\cdot\vec{\alpha})(\vec{n}_2\cdot\vec{x})), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где

$$\vec{\alpha}=\vec{\varphi}_1\times\vec{\varphi}_2,\quad \vec{n}_1=\vec{\varphi}_2\times\vec{\alpha}=\vec{\varphi}_1\vec{\varphi}_2^2-\vec{\varphi}_2(\vec{\varphi}_1\cdot\vec{\varphi}_2),$$
$$\vec{n}_2=\vec{\alpha}\times\vec{\varphi}_1=\vec{\varphi}_2\vec{\varphi}_1^2-\vec{\varphi}_1(\vec{\varphi}_1\cdot\vec{\varphi}_2).$$

Справедливо тождество

$$\vec{\alpha}^2\dot{\vec{\alpha}}-\vec{\alpha}(\dot{\vec{\alpha}}\cdot\vec{\alpha})+\vec{n}_1(\dot{\vec{\varphi}}_1\cdot\vec{\alpha})+\vec{n}_2(\dot{\vec{\varphi}}_2\cdot\vec{\alpha})\equiv 0, \tag{1.3}$$

так как вектор слева имеет нулевые ковариантные координаты в базисе $\vec{\varphi}_1,\vec{\varphi}_2,\vec{\alpha}$.

2. ПОДМОДЕЛЬ ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ

С помощью инвариантов (1.2) запишем представление инвариантного решения [5]

$$\begin{aligned} &\vec{u}=\vec{U}(t,s)+|\vec{\alpha}|^{-2}(\dot{\vec{\varphi}}_1(\vec{n}_1\cdot\vec{x})+\\ &\qquad+\dot{\vec{\varphi}}_2(\vec{n}_2\cdot\vec{x})-\dot{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})),\\ &T=T(t,s),\\ &p=P(t,s)-2^{-1}|\vec{\alpha}|^{-2}((\ddot{\vec{\varphi}}_1\cdot\vec{x})(\vec{n}_1\cdot\vec{x})+\\ &\qquad+(\ddot{\vec{\varphi}}_2\cdot\vec{x})(\vec{n}_2\cdot\vec{x}))-2^{-1}|\vec{\alpha}|^{-4}(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\times\\ &\qquad\times((\ddot{\vec{\varphi}}_1\cdot\vec{\alpha})(\vec{n}_1\cdot\vec{x})+(\ddot{\vec{\varphi}}_2\cdot\vec{\alpha})(\vec{n}_2\cdot\vec{x})). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Решения системы (1.1) рассматриваем с точностью до преобразований, допускаемых системой,

$$\begin{aligned} &\vec{x}'=\vec{x}+\vec{\psi}(t),\\ &\vec{u}'=\vec{u}+\dot{\vec{\psi}}(t),\\ &p'=p-\vec{x}\cdot\ddot{\vec{\psi}}(t)-\tfrac{1}{2}\vec{\psi}(t)\cdot\ddot{\vec{\psi}}(t)+\sigma(t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\vec{\psi}(t),\quad\sigma(t)$ — произвольные функции. Отсюда следует, что функции $\vec{U}(t,s)$ и $P(t,s)$ определены с точностью до слагаемых, зависящих от t.

Подстановка представления (2.1) в систему (1.1) дает

$$\vec{U}\cdot\vec{\alpha}=0,$$

$$\vec{U}_t+\vec{\alpha}P_s+|\vec{\alpha}|^{-2}\times$$
$$\times\left(\dot{\vec{\varphi}}_1(\vec{U}\cdot\vec{n}_1)+\dot{\vec{\varphi}}_2(\vec{U}\cdot\vec{n}_1)+\dot{\vec{\varphi}}_2(\vec{U}\cdot\vec{n}_2)\right)+s\vec{e}=$$
$$=\nu\vec{\alpha}^2\vec{U}_{ss}+\nu'T_s\left(\vec{U}_s\vec{\alpha}^2-2\dot{\vec{\alpha}}\right), \tag{2.3}$$

$$cT_t=\vec{\alpha}^2\left(\lambda T_s\right)_s+2\nu E:E, \tag{2.4}$$

где $2E=\nabla\otimes\vec{u}+(\nabla\otimes\vec{u})^T$, $\quad\nabla\otimes\vec{u}=\vec{\alpha}\otimes\vec{U}_s+|\vec{\alpha}|^{-2}\left(\vec{n}_1\otimes\dot{\vec{\varphi}}_1+\vec{n}_2\otimes\dot{\vec{\varphi}}_2-\vec{\alpha}\otimes\dot{\vec{\alpha}}\right)$, $\vec{e}=-\left(|\vec{\alpha}|^{-2}\dot{\vec{\alpha}}\right)^{\cdot}-2|\vec{\alpha}|^{-4}\left((\dot{\vec{\alpha}}\cdot\vec{n}_1)\dot{\vec{\varphi}}_1+(\dot{\vec{\alpha}}\cdot\vec{n}_2)\dot{\vec{\varphi}}_2\right)-|\vec{\alpha}|^{-4}\left((\ddot{\vec{\varphi}}_1\cdot\vec{\alpha})\vec{n}_1+(\ddot{\vec{\varphi}}_2\cdot\vec{\alpha})\vec{n}_2\right)$.

Вектор $\vec{U}$ рассмотрим в базисе $\vec{\varphi}_1,\vec{\varphi}_2,\vec{\alpha}$. Если $U_i=\vec{U}\cdot\vec{\varphi}_i$ — ковариантные координаты, то

$$\begin{aligned} &\vec{U}=|\vec{\alpha}|^{-2}[\vec{\varphi}_1\left(U_1\vec{\varphi}_2^2-U_2(\vec{\varphi}_1\cdot\vec{\varphi}_2)\right)+\\ &+\vec{\varphi}_2\left(-U_1(\vec{\varphi}_1\cdot\vec{\varphi}_2)+U_2\vec{\varphi}_1^2\right)]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Для ковариантных координат U_i получим уравнения

$$\begin{aligned} &U_{it}+2\varepsilon|\vec{\alpha}|^{-2}\left(U_1\left(\vec{\varphi}_i\cdot\vec{\varphi}_2\right)-U_2\left(\vec{\varphi}_i\cdot\vec{\varphi}_1\right)\right)-\\ &\qquad-4s\varepsilon|\vec{\alpha}|^{-4}\left(\vec{\alpha}\times\dot{\vec{\alpha}}\right)\cdot\vec{\varphi}_i=\\ &\qquad=\nu\vec{\alpha}^2U_{iss}+\nu_s\left(\vec{\alpha}^2\upsilon_{is}+2\vec{\alpha}\cdot\dot{\vec{\varphi}}_i\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Для тензора скоростей деформации имеем

$$
\begin{aligned}
&2E = -2|\vec{\alpha}|^{-4}\vec{\alpha}\cdot\dot{\vec{\alpha}} \quad \vec{\alpha}\otimes\vec{\alpha} + 2|\vec{\alpha}|^{-4}\times\\
&\times\left(\vec{\varphi}_2^2\dot{\vec{\varphi}}_1 - (\vec{\varphi}_1\cdot\vec{\varphi}_2)\,\dot{\vec{\varphi}}_2\right)\cdot\vec{n}_1 \quad \vec{\varphi}_1\otimes\vec{\varphi}_1+\\
&+2|\vec{\alpha}|^{-4}\left(\vec{\varphi}_1^2\dot{\vec{\varphi}}_2 - (\vec{\varphi}_1\cdot\vec{\varphi}_2)\,\dot{\vec{\varphi}}_1\right)\cdot\vec{n}_2\vec{\varphi}_2\otimes\vec{\varphi}_2+\\
&+\left(|\vec{\alpha}|^{-2}\left(U_{1s}\vec{\varphi}_2^2 - U_{2s}\vec{\varphi}_1\cdot\vec{\varphi}_2\right) - 2|\vec{\alpha}|^{-4}\dot{\vec{\alpha}}\cdot\vec{n}_1\right)\times\\
&\times(\vec{\varphi}_1\otimes\vec{\alpha}+\vec{\alpha}\otimes\vec{\varphi}_1)+\\
&+\left(|\vec{\alpha}|^{-2}\left(U_{2s}\vec{\varphi}_1^2 - U_{1s}\vec{\varphi}_1\cdot\vec{\varphi}_2\right) - 2|\vec{\alpha}|^{-4}\dot{\vec{\alpha}}\cdot\vec{n}_2\right)\times\\
&\times(\vec{\varphi}_2\otimes\vec{\alpha}+\vec{\alpha}\otimes\vec{\varphi}_2)+\\
&+\left(|\vec{\alpha}|^{-2}\left(\vec{\varphi}_1\cdot\vec{\varphi}_2\right)^{\cdot} - |\vec{\alpha}|^{-4}\left(\vec{\varphi}_1\cdot\vec{\varphi}_2\right)\left(\vec{\varphi}_1^2\vec{\varphi}_2^2\right)^{\cdot}\right)\times\\
&\times(\vec{\varphi}_1\otimes\vec{\varphi}_2+\vec{\varphi}_2\otimes\vec{\varphi}_1).
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Проекция уравнения (2.3) на вектор $\vec{\alpha}$ дает уравнение

$$
\begin{aligned}
&|\vec{\alpha}|^4P_s + 2\nu_s|\vec{\alpha}|^2(\vec{\alpha}\cdot\dot{\vec{\alpha}}) =\\
&= 2\dot{\vec{\alpha}}\cdot(U_1\vec{n}_1+U_2\vec{n}_2) + s\left(\vec{\alpha}\cdot\ddot{\vec{\alpha}} - 2\dot{\vec{\alpha}}^2\right),
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

которое связывает градиент инвариантного давления с ковариантными координатами инвариантной скорости (аналог закона Дарси). В (2.8) входит слагаемое с градиентом температуры, если вязкость зависит от температуры.

Уравнения (2.4), (2.7), (2.6), (2.8) образуют замкнутую систему инвариантной подмодели одномерных движений. Подмодель можно трактовать как относительное движение в подвижной системе координат $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \vec{\alpha}$.

3. ПОДВИЖНАЯ ОРТОНОРМИРОВАННАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Подмодель одномерных движений становится более простой, если подвижные базисные векторы образуют ортонормированный репер

$$\vec{\varphi}_i^2 = 1, \quad \vec{\varphi}_1\cdot\vec{\varphi}_2 = 0, \quad \vec{\varphi}_3 = \vec{\alpha} = \vec{\varphi}_1\times\vec{\varphi}_2, \quad \vec{n}_i = \vec{\varphi}_i.$$

Введем вектор угловой скорости подвижного репера

$$\dot{\vec{\varphi}}_i = \vec{\omega}\times\vec{\varphi}_i, \quad i = 1,2,3 \Rightarrow \vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3}\omega_i\vec{\varphi}_i,$$

где $\omega_1(t) = \vec{\varphi}_3\cdot\dot{\vec{\varphi}}_2 = -\vec{\varphi}_2\cdot\dot{\vec{\varphi}}_3$, $\omega_2(t) = \vec{\varphi}_1\cdot\dot{\vec{\varphi}}_3 = -\vec{\varphi}_3\cdot\dot{\vec{\varphi}}_1$, $\omega_3(t) = \vec{\varphi}_2\cdot\dot{\vec{\varphi}}_1 = -\vec{\varphi}_1\cdot\dot{\vec{\varphi}}_2 \Rightarrow \omega_3 = \varepsilon$ — постоянная.

Уравнения подмодели принимают вид

$$
\begin{aligned}
&U_1t = \nu U_1ss + \nu_s(U_1s - 2\omega_2) + 2\varepsilon(U_2 + 2\omega_1 s),\\
&U_2t = \nu U_2ss + \nu_s(U_2s + 2\omega_1) - 2\varepsilon(U_1 - 2\omega_2 s),\\
&cT_t = (\lambda T_s)_s + \nu(U_1s - 2\omega_2)^2 + \nu(U_2s + 2\omega_1)^2,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где $\nu_s = \nu^{'}(T)T_s$.

Для давления получим закон типа Дарси

$$P_s = 2(U_1\omega_2 - U_2\omega_1) - 3s(\omega_1^2+\omega_2^2).$$

Отсюда следуют два простых утверждения.

Градиент инвариантного давления линейно уменьшается вдоль пути s, но поддерживается силой Кориолиса.

Движение не зависит от вязкости тогда и только тогда, когда $U_1 = 2\omega_2 s$, $U_2 = -2\omega_1 s$, $P = \frac{1}{2}s^2(\omega_1^2+\omega_2^2)$ и угловая скорость $\vec{\omega}$ постоянна.

Система (3.1) — замкнутая нелинейная система 3-х параболических уравнений.

Запишем ее компактно, положив $c = \nu'$, $\lambda = k\nu^{'}$, $k = \mathrm{const}$, $U_1 = 2s\omega_2 + u_1$, $U_2 = u_2 - 2\omega_1 s$,

$$
\begin{aligned}
&u_{1t} = (\nu u_1 s)_s + 2\varepsilon u_2 - 2s\dot{\omega}_2,\\
&u_{2t} = (\nu u_2 s)_s - 2\varepsilon u_1 + 2s\dot{\omega}_1,\\
&\nu_t = k\nu_{ss} + \nu(u_{1s}^2 + u_{2s}^2).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Функции $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ в (3.2) могут быть произвольными. Их можно выбирать для нахождения точных решений.

Например, пусть $\omega_1 = \cos t$, $\omega_2 = \sin t$, $u_1 = A(s)\cos t$, $u_2 = A(s)\sin t$, $\nu = \nu(s)$. Тогда из (3.2) следует $\varepsilon = -\frac{1}{2}$, $(\nu A^{'})^{'} = 2s$, $k\nu^{''} + 2\nu A'^2 = 0$.

Интегрирование дает уравнение Эмдена–Фаулера

$$\nu\nu^{''} + k^{-1}(s^2+C)^2 = 0,$$

а величина $A(s)$ определена квадратурой

$$A = \int(s^2+C)\nu^{-1}ds.$$

Репер, относительно которого определено движение, двигается по закону

$$
\begin{aligned}
\vec{\varphi}_1 &= -\vec{A}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cos t \quad \cos\frac{\sqrt{5}t}{2} + \sin t\,\sin\frac{\sqrt{5}t}{2}\right)+\\
&+\vec{B}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cos t\,\sin\frac{\sqrt{5}t}{2} - \sin t\,\cos\frac{\sqrt{5}t}{2}\right) + \vec{C}\cos t,\\
\vec{\varphi}_2 &= \vec{A}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin t\,\cos\frac{\sqrt{5}t}{2} + \cos t\,\sin\frac{\sqrt{5}t}{2}\right)+\\
&+\vec{B}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin t\,\sin\frac{\sqrt{5}t}{2} + \cos t\,\sin\frac{\sqrt{5}t}{2}\right) + \vec{C}\sin t,\\
\vec{\varphi}_3 &= \frac{1}{2}\vec{C} + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\vec{A}\cos\frac{\sqrt{5}t}{2} - \vec{B}\sin\frac{\sqrt{5}t}{2}\right),
\end{aligned}
$$

где $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ — постоянные векторы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В модели термовязкой жидкости определены все подмодели обобщенно одномерных нестационарных движений. Подмодель состоит из трех связанных нелинейных параболических уравнений. Движение жидкости рассмотрено относительно подвижного репера. В относительном движении градиент инвариантного давления определен по закону Дарси. Для специальных движений подвижного репера возможно построение точных решений. Перечисление точных решений есть задача групповой классификации подмодели одномерных движений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Урманчеев, С. Ф.** Установившиеся течения жидкости с температурной аномальной вязкостью / С. Ф. Урманчеев, И. Н. Киреев // Докл. академии наук. 2004. Т. 396, № 2. С. 204 –207.
2. **Бармин, А. А.** Гидродинамика вулканических извержений / А. А. Бармин, О. Э. Мельник // Успехи механики. 2002. Т. 1, № 1. С. 32 –60.
3. **Хабиров, С. В.** Симметрийный анализ модели несжимаемой жидкости с вязкостью и теплопроводностью, зависящими от температуры : препринт института механики УНЦ РАН / С. В. Хабиров. Уфа : Гилем, 2004. 37 с.
4. **Хабиров, С. В.** К групповому анализу модели термовязкой несжимаемой жидкости / С. В. Хабиров // Вестник УГАТУ. 2005. Т. 6, № 2 (13). С. 34–39.
5. **Fushchych, W.** Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations. I, II / W. Fushchych, R. Popowych // Nolinear Mathematical Physics. 1994. V. 1, No. 1. P. 75–113 ; N 2. P. 158–189.
6. **Андреев, В. К.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Радионов. Новосибирск : Наука, 1994, 318 с.

ОБ АВТОРЕ

Хабиров Салават Валеевич, проф., гл. науч. сотр., зав. лаб. ИМ УНЦ РАН, проф. каф. математики УГАТУ. Дипл. механик (Новосиб. гос. ун-т, 1970). Д-р физ.-мат. наук (защ. в Ин-те мат. и мех. РАН, Екб., 1991). Иссл. в обл. груп. анализа диф. уравнений.

УДК 519.237.5

Н. К. БАКИРОВ

ОПТИМАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ШАРА, СОДЕРЖАЩЕГО РЕГРЕССИОННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Показано, что доверительные множества в виде шаров накрывают вектор регрессионных коэффициентов с наибольшей вероятностью только, если столбцы матрицы планирования регрессионного эксперимента ортогональны и имеют одинаковую длину. *Доверительное оценивание; регрессионные коэффициенты; вероятностные неравенства*

Рассматривается задача доверительного оценивания вектора регрессионных коэффициентов $a \in R^d$ в классической модели, [1]:

$$Y = Xa + \varepsilon,$$

где $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^T$ — отклики, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)^T$ — погрешности, $a = (a_1, a_2, ..., a_d)^T$ – неизвестный вектор коэффициентов, $X = \|X_{i,j}\|_{i,j=1}^{n,d}$ — неслучайная матрица планирования регрессионного эксперимента. Погрешности $\varepsilon_i, i = 1, 2, ..., n$ считаем независимым с общим гауссовским распределением $N(0, \sigma^2)$, σ^2 — неизвестно. Несмещенная оценка $\widehat{a}$ для вектора a строится по методу наименьших квадратов, [1]: $\widehat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y$, при этом случайный вектор $\widehat{a} - a$ имеет гауссовское распределение $N(0, \sigma^2 (X^T X)^{-1})$. Обозначим через $X_k \in R^n, k = 1, 2, .., n$ столбцы матрицы X и через $|.|$ — евклидову норму в R^n. Известно [1, с. 532], что $D\widehat{a}_k \geq \sigma^2 / |X_k|^2$ и равенство достигается только в том случае, когда векторы X_k ортогональны. В настоящей работе мы доказываем еще один оптимизационный результат. Обозначим $\Delta^2 = d^{-1} Tr X^T X = d^{-1} \sum_{k=1}^{d} |X_k|^2, S^2_{\text{ост.}} = |Y - X\widehat{a}|^2$ и через $F_{d,n-d}$ — случайную величину (сл. в.), имеющую распределение Фишера с $(d, n-d)$ степенями свободы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-97924 р)

Стандартное доверительное множество для векторного параметра a имеет вид, [1]:

$$\{|X(\widehat{a} - a)|^2 / S^2_{\text{ост.}} \leqslant \lambda_\alpha\},$$

где λ_α – соответствующая квантиль сл. в. $F_{d,n-d}$. В ряде случаев, на наш взгляд, более естественны доверительные множества в виде шаров с центром в точке $\widehat{a}$. В теореме 1 показано, что доверительная вероятность для таких множеств, точнее, величина $P\left\{\Delta^2 |\widehat{a} - a|^2 / S^2_{\text{ост.}} < x\right\}$, для всех $x > 0$ максимальна, если столбцы матрицы X ортогональны и имеют одинаковую длину.

Теорема 1. *Для всех* $x > 0$

$$P\left\{\frac{\Delta^2 |\widehat{a} - a|^2}{S^2_{\text{ост.}}} < x\right\} \leqslant P\left\{F_{d,n-d} < x\right\},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда (A) *векторы* X_k *ортогональны друг другу и имеют одинаковую длину.*