УДК 530.1

В. Х. БАГМАНОВ, В. А. БАЙКОВ, А. Р. ЛАТЫПОВ, И. Б. ВАСИЛЬЕВ

МЕТОДИКА ИНТЕРПРЕТАЦИИ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ФРАКТАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Приведен вывод уравнения, описывающего процесс фильтрации флюидов в пористой среде с фрактальными свойствами. Показано, что структура уравнения идентична структуре известных уравнений, описывающих процессы диффузии и случайных блужданий. Даны физическая интерпретация входящих в уравнение параметров и способ их экспериментального определения. *Фильтрация; фрактальные среды*

ВВЕДЕНИЕ

В классической постановке ряд физических процессов — случайные блуждания, диффузия, теплопроводность, фильтрация флюидов описываются одинаковым видом уравнений. При протекании перечисленных процессов во фрактальной среде следует ожидать аналогичной ситуации.

Фундаментальным уравнением, описывающим перенос вещества во фрактальной среде, является уравнение [1] (или SP-уравнение)

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial t} = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left[k r^{D-1-\theta} \frac{\partial \hat{P}}{\partial r} \right], \tag{1}$$

где $\hat{P}(r,t)$ — сглаженная по флуктуациям плотность вероятности нахождения диффундирующей частицы вещества в точке (r,t); D — размерность фрактала по Хаусдорфу; k, θ — параметры, описывающие аномальную проводимость фрактальной среды.

Попытки использования SP-уравнения (1) для описания процесса фильтрации сталкиваются с проблемой интерпретации входящих в него параметров k, θ, D и их экспериментального определения.

1. МЕТОДИКА ПОДХОДА

В основе методики решения проблем фильтрации лежит статистический анализ экспериментальных данных, характеризующих физические свойства пластовых систем. Данный анализ показывает, что пространственные распределения таких характеристик, как пористость, проницаемость, толщина пласта, являются стохастическими фрактальными полями с размерностью Хаусдорфа D, отличающейся от евклидовой размерности E.

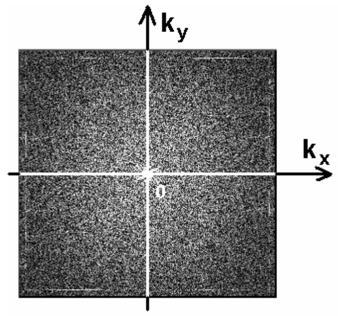

Рис. 1. Фурье-спектр проницаемости нефтяного месторождения

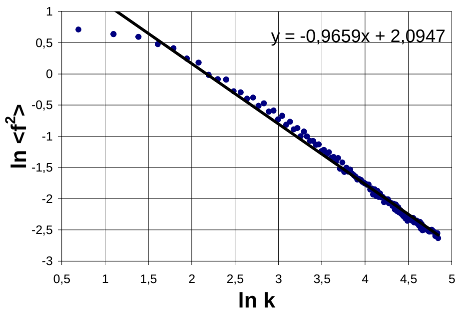

Рис. 2. Зависимость усредненного спектра $\langle f^2 \rangle$ от радиального волнового числа k

В качестве примера на рис. 1 приведен Фурье-спектр $(f(k_x, k_y))$ проницаемости нефтяного месторождения, наглядно показывающий, что данная структура имеет изотропный диффузный характер, масштабная инвариантность которой подтверждается степенной зависимостью усредненного спектра $\langle f^2 \rangle$ от радиального волнового числа $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ (рис. 2).

2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ В СРЕДЕ С ФРАКТАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

2.1. Сглаживание фрактальных полей

Наиболее наглядным проявлением фрактальной структуры вещества является необычное свойство пространственного распределения массы, которое выражается в виде соотношения, установленного Мандельбротом [2]:

$$M \sim L^D, \tag{2}$$

где M — масса, L — размер пространственной области, D — размерность Хаусдорфа.

Соотношение (2) имеет статистическую природу и отражает тот факт, что для нестационарных процессов (а фрактальные процессы нестационарны), средние значения оказываются зависящими от области усреднения.

Из соотношения (2) следует, что средняя плотность вещества ρ зависит от размеров области усреднения и оценивается выражением

$$\rho \sim L^{D-E} = L^{-H}, \tag{3}$$

где $H = E - D$ — показатель Херста.

Если ввести в рассмотрение сглаженную по флуктуациям плотность $\widehat{\rho}(\vec{r})$, определив ее в соответствии с (3) в форме

$$\widehat{\rho}(\vec{r}) \sim r^{-H}, \tag{4}$$

то выражение (2) интерпретируется в виде

$$\int \widehat{\rho}(\vec{r}) d^E \vec{r} \sim L^D. \tag{5}$$

Суть интерпретации (5) состоит в том, что нерегулярное фрактальное распределение плотности $\rho(\vec{r})$, одним из важнейших свойств которого является дробная размерность, формально можно заменить некоторым регулярным сглаженным распределением $\widehat{\rho}(\vec{r})$, которое будет «имитировать» фрактал, сохранив его главное свойство как объекта с дробной размерностью, выражаемое формулой Мандельброта (2), а также обладать масштабным самоподобием.

Пусть $f(x)$ — случайная фрактальная функция. Введем в рассмотрение сглаженную по флуктуациям функцию $\widehat{f}(x)$, определив ее в соответствии с соотношением (5), являющимся следствием формулы Мандельброта (2). Тогда для одномерного случая будем иметь

$$\int \widehat{f}(x) dx \sim L^D. \tag{6}$$

Из (6) следует: $\widehat{f}(x) = f^* x^{D-1}$, где $f^* = \text{const}$.

Для фрактального поля $f(\vec{r})$ в пространстве с евклидовой размерностью E

$$\begin{gathered} \widehat{f}(\vec{r}) d^E \vec{r} \sim L^{D-E} = r^{-H}; \\ \widehat{f}(r) = f^* r^{-H}. \end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим для определенности трехмерный случай $E = 3$. Связь случайного фрактального поля $f(\vec{r})$, характеризуемого размерностью Хаусдорфа D(или показателем Херста H) со сглаженным по флуктуациям полем $\widehat{f}(r)$, определяемым выражением (7) и «имитирующим» поведение фрактального поля в среднем, можно установить, используя гипотезу эргодичности, которую в данном случае будем понимать как равенство статистического среднего значения функции по ансамблю реализаций $\langle f(\vec{r}) \rangle$ со средним значением:

$$\langle f(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi L^3} \int\limits_0^L \widehat{f}(r) 4\pi r^2 dr.$$

Из данного соотношения следует:

$$f^* = \langle f \rangle \frac{D}{3} L^H. \tag{8}$$

В общем случае

$$f^* = \langle f \rangle \frac{D}{E} L^H. \tag{9}$$

Выражения (7)–(9) позволяют однозначно заменить фрактальное поле $f(\vec{r})$ сглаженным изотропным полем $\widehat{f}(r)$, отражающим поведение $f(\vec{r})$ в «среднем», если известны размерность Хаусдорфа D и статистическое среднее $\langle f \rangle_L$ в некоторой области размера L.

2.2. Вывод уравнения фильтрации

Рассмотрим течение флюида, имеющего физическую плотность ρ_0 в неоднородной среде, пористость которой $m(\vec{r})$ и проницаемость $K(\vec{r})$ являются случайными фрактальными полями.

Запишем закон сохранения массы флюида в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{j}, \tag{10}$$

где ρ — пространственная плотность флюида

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 m(\vec{r}), \tag{11}$$

$\vec{j}$ — плотность потока жидкости, определяемая через скорости фильтрации $\vec{u}$:

$$\vec{j} = \rho_0 \vec{u}. \tag{12}$$

Учитывая закон Дарси:

$$\vec{u} = \tfrac{K}{\mu} \operatorname{grad} P,$$

где μ — вязкость, K — проницаемость, P — давление, из (12) получим

$$\vec{j} = \frac{\rho_0 K}{\mu} \operatorname{grad} P. \tag{13}$$

Для сглаженных по флуктуациям значений, в соответствии с (10), (11), (13):

$$\frac{\partial \widehat{\rho}}{\partial t} = \operatorname{div} \quad \vec{j}; \tag{14}$$

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0 m(\vec{r}); \tag{15}$$

$$\hat{j} = \frac{\rho_0 \widehat{K}(\vec{r})}{\mu} \operatorname{grad} \widehat{P}. \tag{16}$$

В соответствии с определением сглаженных функций (7) имеем:

$$\widehat{m}(r) = m^* r^{Dm-3}; \qquad (17)$$

$$\widehat{K}(r) = K^* r^{Dk-3}, \qquad (18)$$

где D_m и D_k — размерность Хаусдорфа для полей пористости и проницаемости, m^* и K^* — постоянные величины, не зависящие от координат.

С учетом (15)–(18) выражение (14) в сферической системе координат примет вид

$$\frac{\partial(m^*\rho_0)}{\partial t} = \frac{1}{r^{D_m-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{D_k-1}\frac{K^*\rho_0}{\mu}\frac{\partial\widehat{P}}{\partial r}\right]; \qquad (19)$$

полагая в (19)

$$\frac{\partial(m^*\rho_0)}{\partial t} = \frac{\partial(m^*\rho_0)}{\partial\hat{P}}\frac{\partial\hat{P}}{\partial t}, \qquad (20)$$

найдем:

$$\frac{\partial\widehat{P}}{\partial t} = \frac{1}{r^{Dm-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{Dk-1}\lambda\frac{\partial\widehat{P}}{\partial r}\right], \qquad (21)$$

где $\lambda = \frac{\rho_0 K^*}{\mu\beta}$, $\beta = \frac{\partial(m^*\rho_0)}{\partial P}$.

Уравнение (21) можно записать в форме SP-уравнения (1):

$$\frac{\partial\widehat{P}}{\partial t} = \frac{1}{r^{D_m-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{D_m-1-\theta}\lambda\frac{\partial\widehat{P}}{\partial r}\right], \qquad (22)$$

где $\theta = D_k - D_m$.

Таким образом, уравнение фильтрации в среде с фрактальной пористостью и проницаемостью (22) по форме соответствует SP-уравнению (1), если параметры данного уравнения интерпретировать следующим образом:

$$K = \lambda; \quad D = D_m; \quad \theta = D_k - D_m. \qquad (23)$$

Для двумерного и одномерного случаев уравнение (21) не изменяет своего вида. Отличие состоит в том, что размерность Хаусдорфа нужно вычислять не по формуле $D = 3 - H$, а по формулам $D = 2 - H$ и $D = 1 - H$ соответственно.

3. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ХЕРСТА СЛУЧАЙНЫХ ФРАКТАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Метод определения показателей Херста двумерного случайного поля $\xi(\vec{\rho})$, под которым подразумевается в данном случае распределение по месторождению (карта) пористости $m(\vec{\rho})$ или проницаемости $K(\vec{\rho})$, основывается на анализе спектральной плотности мощности $S\left(\vec{k}\right)$:

$$S\left(\vec{k}\right) = \left|\iint\langle\xi(\vec{\rho}+\vec{\tau})\,\xi(\vec{\rho})\rangle\, e^{-i\vec{k}\vec{\tau}}d^2\tau\right|,$$

где $\langle\xi(\vec{\rho}+\vec{\tau})\,\xi(\vec{\rho})\rangle$ — корреляционная функция поля $\xi(\vec{\rho})$. Если случайное поле является фрактальным, то спектральная плотность мощности в зависимости от модуля волнового числа k ведет себя как

$$S(k) \sim k^{-(2H+1)}.$$

Таким образом, в случае фрактального поля показатель Херста определяется по наклону графика:

$$\ln(S(k)) = C - (2H+1)\ln(k), \qquad (24)$$

т. е., график спектральной плотности мощности в логарифмических координатах является прямой линией.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В уравнение, описывающее процесс фильтрации во фрактальной пористой среде (19), помимо стационарных параметров ρ_0 и μ, входят величины:

$$D_k,\ D_m,\ m^*,\ K^*,\ \beta,$$

для определения которых требуется нестандартный подход.

В качестве исходных экспериментальных данных используются геофизические массивы данных, отражающие пространственное распределение пористости (m) и проницаемости (K) по месторождению. Общая схема состоит из следующих этапов:

1) на основе массивов данных строятся карты K и m;

2) на основе карт, отражающих распределение пористости и проницаемости, с помощью Фурье-анализа определяются показатели Херста H_k и H_D. Методика определения показателей Херста приведена выше в разделе 3;

3) размерности Хаусдорфа находятся по формулам

$$D_k = 3 - H_k;\ D_m = 3 - D_m;$$

4) параметры m^* и K^* определяются на основе формулы (9)

$$m^* = \langle m\rangle_L \tfrac{D_m}{2} L^{H_m}; \quad K^* = \langle K\rangle_L \tfrac{D_k}{2} L^{H_k};$$

5) для определения средних значений $\langle m\rangle_L$ и $\langle K\rangle_L$ выбираются прямоугольные области размером $L \times L$ и путем перемещения выбранной области по соответствующей карте организуется статистический псевдоансамбль реализаций, по которому производится усреднение;

6) для определения параметра β:

$$\beta = \frac{\partial(m^*\rho_0)}{\partial P},$$

воспользуемся тем, что отношение $\frac{\beta}{m^*}$ является масштабно-инвариантной величиной, действительно:

$$\frac{\beta}{m^*} = \frac{\partial(m^*\rho_0)}{\partial P m^*} = \frac{\partial\big(\langle m\rangle_L \rho_0\big)}{\partial P \langle m\rangle_L} = \frac{\langle\beta\rangle_L}{\langle m\rangle_L},$$

откуда следует

$$\beta = m^* \frac{\langle\beta\rangle_L}{\langle m\rangle_L}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены выражения, позволяющие однозначно интерпретировать фрактальное поле сглаженным изотропным полем, отражающим поведение истинного фрактального поля в «среднем».

Методика интерпретации и определения параметров уравнения фильтрации в среде с фрактальными свойствами позволяет на основе Фурье-анализа провести оценку фрактальных размерностей пористости и проницаемости газонефтяных месторождений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **O'Shaughnessy, B.** Defection of Fractals / B. O'Shaughnessy, I. Procaccia // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 32, No. 5. P. 3073–3083.
2. **Mandelbrot, B.** The Fractal Geometry of Nature / B. Mandelbrot . San Francisco : Freeman, 1992. 656 p.

ОБ АВТОРАХ

Багманов Валерий Хусаинович, доц. каф. телекоммун. систем. Дипл. физик (МГУ, 1974). Канд. физ.-мат. наук по применению выч. техники, мат. моделир. и мат. методов в науч. исследованиях (БГУ, 1994). Исcл. в обл. моделир. и обраб. случайн. сигналов.

Байков Виталий Анварович, зам. ген. дир. ООО «ЮНГ-НТЦ Уфа». Дипл. физик, преп. физики (БГУ, 1977). Д-р физ.-мат. наук (ИПМ им. М. В. Келдыша, 1991) по групповому анализу уравнений нелинейной механики. Иссл. в обл. волновых процессов, нелинейн. механики, физики нефти, мат. и физ. моделирования.

Латыпов Альберт Рифович, ген. дир. ООО «ЮНГ-НТЦ Уфа». Дипл. горн. инж. (Уфим. нефт. ин-т, 1986). Канд. техн. наук (АзИНЕФТЕХИМ, 1989). Иссл. в обл. геологии, разраб. и эксплуатации нефт. и газ. месторождений, компьютер. моделир. процессов разраб.

Васильев Игорь Борисович, зав. сект. гидродин. моделирования в ООО «ЮНГ-НТЦ Уфа». Дипл. мат.-инж. (УГАТУ, 1998). Иссл. в обл. группового анализа диф. уравнений, физики пласта.

УДК 51:681

В. П. ЖИТНИКОВ, Г. И. ФЕДОРОВА, О. Р. ЗИННАТУЛЛИНА

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА С УСЛОВИЯМИ, ИМЕЮЩИМИ МЕСТО В ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ХЕЛЕ–ШОУ

Рассматриваются плоская и осесимметричная задачи Хеле–Шоу в неограниченной области. Особенности искомых функций учитываются путем представления решения в виде суммы известной функции с заданными особенностями и неизвестной функции без особенностей. Найдено точное решение (в квадратурах) задачи Римана–Гильберта, возникающей в каждый фиксированный момент времени. *Плоская и осесимметричная задача*; *электрохимическое формообразование*; *задача Римана–Гильберта*; *комплексный потенциал*

Задача Хеле–Шоу со свободными границами может быть сформулирована следующим образом. В некоторой области искомая функция удовлетворяет уравнению Лапласа. На границах области эта функция имеет кусочно-постоянные значения. Границы области подвижны, причем