конкуренции, нигилизму, отчуждению от власти, негативному отношению к армии, к органам защиты внутренней и внешней безопасности, к радикальным, непродуманным и нереальным решениям, нарастанию русофобии;

• **консервативное экономическое мышление** — этот тип в России существует , но к нему стали отчасти прислушиваться, к сожалению, только в последние два-три года при анализе отдельных экономических явлений.

• отдельные элементы **социально-ориентированного типа экономического мышления** связаны с социальной защитой пенсионеров, ветеранов, инвалидов и малолетних детей (непонятно, причём здесь «защита», если все законы по социальной системе начинаются со слова «обеспечить»). Этот тип экономического мышления отличают следующие признаки: личная хозяйственная самостоятельность, инициатива, гибкость, адаптивность, динамизм, предприимчивость, способность действовать в условиях конкуренции, социальная ответственность бизнеса, социальная ориентированность рынка, отсутствие безработицы, социальная обеспеченность населения, уверенность в будущем.

• отдельные элементы **экономического мышления «правового государства», «государства всеобщего благоденствия» и потребительского общества** с идеей рационального распределения материальных благ;

• последние два-три года, когда начались извращения новых нуворишей (наживших неправедным путём огромные состояния) по покупке спортивных клубов за границей и т. п., появилось **экономическое мышление с идеей о социальной ответственности бизнеса.** Сама идея не нова, она появилась в конце XIX в. как реакция на многочисленные политические катаклизмы в США и на то, что бизнес не участвовал в решении общенациональных вопросов, не обеспечивал достойных условий жизни всем членам общества;

• разумной реакцией на либеральные экономические ценности в последние годы стало понимание и появление некоторых **элементов советского экономического мышления** (плановость экономических процессов на всех уровнях, отражение в планах социально-экономических аспектов, государственный контроль над рынком и т. д.).

ОБ АВТОРАХ

Голиков Владимир Дмитриевич, проф., каф. менеджмента и маркетинга. Дипл. инж.-электромех. (УАИ, 1969). Д-р социол. наук по социологии управления (БГУ, 1992). Иссл. в обл. социальной ориентации молодежи, экономического поведения.

Путенихина Елена Валерьевна, доц. каф. УС и ЭС. Дипл. менеджер гос. и муницип. управления (УГАТУ, 2001). Канд. социол. наук (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. социол. управления, проблем эконом. мышления.

УДК 517.9

Ю. А. КОРДЮКОВ, А. А. ЯКОВЛЕВ

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМАХ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Вычислены собственные значения оператора Лапласа на дифференциальных формах на римановых многообразиях Гейзенберга. *Спектр; оператор Лапласа; многообразие Гейзенберга; дифференциальные формы; группа Ли; алгебра Ли*

ВВЕДЕНИЕ

Оператор Лапласа на дифференциальных формах на римановом многообразии и его спектральные характеристики являются одними из важнейших объектов исследования в дифференциальной геометрии и анализе на многообразиях. Например, теория Ходжа связывает числа нулевых собственных значений оператора Лапласа с числами Бетти многообразия. Более того, собственные значения оператора Лапласа являются инвариантами риманова многообразия. Следует отметить, что явное вычисление спектра оператора Лапласа является трудной, как правило, неразрешимой задачей, и во многих случаях можно получить только качественную информацию о некоторых его спектральных характеристиках. Однако имеется несколько исключительных случаев, когда спектр оператора Лапласа может быть вычислен явно, и данная работа посвящена исследованию одного из

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 06-01-00208 и 04-01-00190)

таких случаев — вычислению спектра оператора Лапласа на римановых многообразиях Гейзенберга.

1. РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Для любых $x, y, t \in \mathbb{R}$ обозначим

$$\gamma(x,y,t) = \begin{bmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; X(x,y,t) = \begin{bmatrix} 0 & x & t \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вещественная группа Гейзенберга H размерности 3 — это подгруппа Ли группы Ли $GL(3,\mathbb{R})$ невырожденных вещественных матриц размера 3×3, образованная всеми матрицами вида $\gamma(x,y,t)$, и соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{h}$ — это совокупность матриц вида $X(x,y,t)$ с операцией $[X,Y] = XY - YX$. Таким образом, в терминах x, y и t операции в группе Ли H и алгебре Ли $\mathfrak{h}$ задаются соответственно формулами:

$$\gamma(x,y,t)\,\gamma(x',y',t') = \gamma(x+x', y+y', t+t'+xy'),$$
$$[X(x,y,t), X(x',y',t')] = X(0,0,xy'-yx').$$

Пусть Γ — равномерная дискретная подгруппа группы H, т.е. такая дискретная подгруппа в H, что $\Gamma\backslash H$ является трехмерным компактным многообразием (без края). Пример такой подгруппы задается множеством матриц вида $\gamma(x,y,t)$ с $x, y, t \in \mathbb{Z}$.

Определение 1. Назовем риманову метрику g на многообразии $\Gamma\backslash H$ локально левоинвариантной, если ее подъем на группу Ли H при естественной проекции H на $\Gamma\backslash H$ является левоинвариантной римановой метрикой на H.

Любая левоинвариантная риманова метрика на H задается своим значением в единице. Поэтому имеется взаимно однозначное соответствие между локально левоинвариантными римановыми метриками на $\Gamma\backslash H$ и положительно определенными симметрическими матрицами размера 3×3. Левоинвариантная риманова метрика, соответствующая матрице

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix},$$

задается в базисе dx, dy, dt по формуле

$$g = g_{11}dx^2 + 2(g_{12} - g_{31}x)dx\,dy + 2g_{13}dx\,dt + (g_{22} - xg_{32} + x^2 g_{33})dy^2 + 2(g_{23} - xg_{33})dy\,dt + g_{33}\,dt^2.$$

Определение 2. Римановым многообразием Гейзенберга M назовем пару $(\Gamma\backslash H, g)$, где Γ — равномерная дискретная подгруппа в H и g — локально левоинвариантная риманова метрика на $\Gamma\backslash H$.

В дальнейшем мы будем рассматривать частный случай риманова многообразия Гейзенберга, когда Γ — подгруппа группы H, состоящая из матриц вида $\gamma(x,y,t)$ с $x, y, t \in \mathbb{Z}$. Будем отождествлять гладкие функции на $\Gamma\backslash H$ с гладкими функциями на H, инвариантными при левых сдвигах на элементы подгруппы Γ.

2. ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА НА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМАХ

Напомним (см. например, [1]), что оператором Лапласа на n-мерном римановом многообразии (K^n, g) называют дифференциальный оператор второго порядка, действующий в пространстве $E^p(K^n)$ дифференциальных p-форм на K^n, по формуле

$$\Delta = d\delta + \delta d,$$

где d — дифференциал де Рама и δ— кодифференциал де Рама:

$$\delta = (-1)^{n(p-1)-1} * d *,$$

где $*$ обозначает оператор Ходжа на $E^p(K^n)$, задаваемый римановой метрикой g.

Пусть $L^2E(K^n)$ обозначает пространство квадратично интегрируемых дифференциальных форм на компактном римановом многообразии (K^n, g). Риманова метрика g определяет естественным образом структуру гильбертова пространства в $L^2E(K^n)$. Рассмотрим оператор Лапласа Δ на дифференциальных формах на K^n как неограниченный оператор в гильбертовом пространстве $L^2E(K^n)$ с областью определения $E(K^n)$. Поскольку Δ является положительным формально самосопряженным эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка на компактном многообразии, его замыкание в $L^2E(K^n)$ является положительным самосопряженным оператором (см., например, [3]). Более того (см. [3]), этот оператор имеет счетную полную систему собственных форм $\{\omega_j : j = 1, 2, \dots\}$, $\Delta\omega_j = \lambda_j\omega_j$, причем все собственные формы ω_j являются гладкими и $\lambda_j \to +\infty$ при $j \to \infty$. Другими словами, оператор Δ имеет дискретный спектр $\{\lambda_j : j = 1, 2, \dots\}$.

3. СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ФУНКЦИЯХ

Собственные значения оператора Лапласа на функциях на римановом многообразии Гейзенберга $M = \Gamma\backslash H$ были вычислены в работе [5]. Напомним вкратце результаты этой работы. Пусть g — локально левоинвариантная риманова метрика на M, соответствующая матрице

$$g = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Обозначим

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

В локальных координатах (x, y, t) оператор Лапласа на функциях, задаваемый метрикой g, имеет вид

$$\Delta = -\frac{1}{\det h}\left[h_{11}\left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - 2h_{21}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - - h_{21}\frac{\partial}{\partial t} - 2h_{21}x\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\right] + \frac{h_{22}}{\det h}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{g_{33}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Пусть

$$\lambda(a,b) = 4\pi^2 \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} h^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{Z},$$

$$\mu(c,k) = \frac{4\pi^2}{g_{33}} + \frac{2\pi c(2k+1)}{\det h}, \quad c, k \in \mathbb{Z}.$$

Положим

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{\lambda(a,b), \quad a, b \in \mathbb{Z}\}, \\ \Sigma_2 &= \{\mu = \mu(c,k) \quad \text{с кратностью } 2c \\ &\qquad \text{для} \quad c \in \mathbb{Z}^+, k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\}. \end{aligned}$$

Теорема 1. [5] *Спектр оператора Лапласа на функциях, задаваемого локально левоинвариантной метрикой, соответствующей матрице* (1), *имеет вид* $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ — *с учетом кратности.*

4. СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ФОРМАХ

Основной результат данной работы заключается в нахождении собственных значений оператора Лапласа на дифференциальных формах на римановом многообразии Гейзенберга $M = \Gamma\backslash H$. Рассмотрим локально левоинвариантную метрику g на M, соответствующую матрице вида

$$g = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Пусть $\{U_1, U_2, U_3\}$ — g-ортонормированный базис в алгебре Ли $\mathfrak{h}$, состоящий из левоинвариантных векторных полей на H:

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{h_{11}}}\frac{\partial}{\partial x}, \quad U_2 = \frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad U_3 = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Двойственный базис $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ левоинвариантных 1-форм на H имеет вид

$$\omega_1 = \sqrt{h_{11}}\, dx, \quad \omega_2 = \sqrt{h_{22}}\, dy$$

$$\omega_3 = \sqrt{g_{33}}\,(dt - x\,dy).$$

Запишем 1-форму ω в виде $\omega = f_1\omega_1 + f_2\omega_2 + f_3\omega_3$.

Тогда оператор Лапласа на дифференциальных 1-формах, задаваемый метрикой g, дается формулой

$$\begin{aligned} \Delta\omega = -\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{h_{11}}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + \frac{1}{h_{22}}\left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 f_i + \right. \\ \left. + \frac{1}{g_{33}}\frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2}\right)\omega_i + \frac{f_3}{h_{11}^2 h_{22}^2}\omega_3 - \\ - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{h_{11}\sqrt{h_{22}}}}\Big[(U_3 f_2 + U_2 f_3)\,\omega_1 + \\ + (-U_3 f_1 - U_1 f_3)\,\omega_2 + (U_1 f_2 - U_2 f_1)\,\omega_3\Big]. \end{aligned}$$

Определим

$$\mu_1(a,b) = 2\pi\frac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{h_{11}}\sqrt{h_{22}}}\sqrt{a^2+b^2}, \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Пусть

$$\Sigma_1 = \{\mu_1(a,b), a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Определим

$$\begin{aligned} \mu_2^1(\lambda,k) &= \\ &= \frac{4\pi^2\lambda^2}{g_{33}} + \pi\lambda(4k+5)\frac{1}{\sqrt{h_{11}h_{22}}} + \frac{1}{2}\frac{g_{33}}{h_{11}h_{22}} \pm \\ &\pm \frac{\sqrt{\left(2\pi\lambda\frac{1}{\sqrt{h_{11}h_{22}}} + \frac{g_{33}}{h_{11}h_{22}}\right)^2 + 8\pi\lambda\frac{g_{33}(k+1)}{\sqrt{(h_{11}h_{22})^3}}}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_2^2(\lambda,k) &= \\ &= \frac{4\pi^2\lambda^2}{g_{33}} + \pi\lambda(4k-3)\frac{1}{\sqrt{h_{11}h_{22}}} + \frac{3}{2}\frac{g_{33}}{h_{11}h_{22}} \pm \\ &\pm \frac{\sqrt{\left(2\pi\lambda\frac{1}{\sqrt{h_{11}h_{22}}} - \frac{g_{33}}{h_{11}h_{22}}\right)^2 + 8\pi\lambda\frac{g_{33}k}{\sqrt{(h_{11}h_{22})^3}}}}{2}. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \Sigma_2^1 &= \{\mu = \mu_2^1(\lambda,k) : \lambda, k \in \mathbb{Z}^+\}, \\ \Sigma_2^2 &= \{\mu = \mu_2^2(\lambda,k) : \lambda, k \in \mathbb{Z}^+\}. \end{aligned}$$

Теорема 2. *Спектр оператора Лапласа на 1-формах, задаваемого локально левоинвариантной метрикой, соответствующей матрице* (2), *имеет вид* $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2^1 \cup \Sigma_2^2$.

Замечание 1. Оператор Ходжа $*$, задаваемый метрикой g, определяет для любого $k = 0, 1, 2, 3$, унитарный изоморфизм $* : L^2E^k(M) \to L^2E^{3-k}(M)$, причем $*\Delta = \Delta *$. Следовательно, спектр оператора Лапласа на 2-формах и 3-формах совпадает соответственно с его спектром на 1-формах и 0-формах, т. е. функциях. Тем самым в данной работе завершено вычисление спектра оператора Лапласа на дифференциальных формах на римановых многообразиях Гейзенберга, начатое в работе [5]. Отметим также работу [4], в которой были вычислены собственные значения оператора Дирака на римановых многообразиях Гейзенберга.

Замечание 2. Можно явно выписать соответствующую полную ортонормированную систему, состоящую из собственных форм оператора Лапласа на римановом многообразии Гейзенберга.

Доказательство теоремы 2 основано на идеях работы [5] и использует некоммутативный гармонический анализ, а именно теорию представлений нильпотентных групп Ли, развитую Кирилловым в [2]. Использование этих методов позволяет свести вычисление к хорошо известной задаче вычисления спектра квантового гармонического осциллятора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дубровин, Б. А.** Современная геометрия: Методы и приложения / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. 2-е изд., перераб. М. : Наука, 1986. 760 с.
2. **Кириллов, А. А.** Унитарные представления нильпотентных групп Ли / А. А. Кириллов // Успехи мат. наук. 1962. 17, № 4. С. 53–104.
3. **Шубин, М. А.** Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория / М. А. Шубин. 2-е изд. М. : Наука, 2001. 310 с.
4. **Ammann, B.** The Dirac operator on nilmanifolds and collapsing circle bundles / B. Ammann, Ch. Baer // Ann. Global Anal. Geom. 1998. Vol. 16. P. 221–253.
5. **Gordon, C. S.** The spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg manifolds / C. S. Gordon, E. N. Wilson // Michigan Math. J. 1986. Vol, 33. P. 253–271.

ОБ АВТОРАХ

Кордюков Юрий Аркадьевич, проф., вед. науч. сотр. ИМ УНЦ РАН. Дипл. математик (МГУ, 1984). Д-р физ.-мат. наук по диф. уравнениям (ИМ УНЦ РАН, Уфа, 2004). Иссл. в обл. спектр. теории диф. операторов, анализа и теории диф. уравнений на многообразиях.

Яковлев Андрей Александрович, асп. каф. математики УГАТУ. Дипл. магистр в обл. прикл. мат. и информатики (УГАТУ, 2004). Готовит дис. о спектре диф. операторов на многообразиях со слоениями под рук. проф. Ю. А. Кордюкова.

УДК 519.8

С. Г. ГАЗЕТДИНОВА, Р. А. ЯРЦЕВ

О ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ГРАФОВ С ПРИОРИТЕТАМИ ПО МЕТОДОЛОГИИ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Предлагается новая методика моделирования процессов управления на основе графов с приоритетами по методологии экспертных оценок. Данная методика предусматривает построение обобщенной модели процесса на основе предложенных экспертами индивидуальных моделей, устраняя их избыточность и сохраняя различия. При этом в целях упрощения контроля процесса предоставляется возможность преобразования обобщенной модели к виду индивидуальных моделей. *Процесс; модель; граф; экспертная оценка; управление*

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, многие управляемые процессы в различных системах носят дискретный характер и моделируются с помощью ориентированных графов, вершины которых изображают состояния процессов, а дуги — переходы между ними. Подобные модели в виде графов с приоритетами, каждой из дуг которых соответствуют предикат активности (переменная, определяющая условие перехода по данной дуге) и символы информационного сопровождения, лежат в основе иерархических моделей, разрабатываемых проф. В. В. *Мироновым* и его учениками (см., например, [1–7]). Эти базовые графы с приоритетами являются моделями так называемых элементарных процессов (ЭП), которые, взаимодействуя между собой на различных уровнях иерархии, образуют моделируемый иерархический процесс (ИП). Помимо графа элементарного процесса (ГЭП) модель любого ЭП содержит его предикат активности, определяемый аналогично предикату активности дуги, а также рекурсивные функции развития и информационного сопровождения, с помощью которых на ГЭП отслеживается текущая вершина, изображающая