ISSN 1992-6502 (Print)
2017. Т. 21, № 4 (78). С. 104–112
Вестник УГАТУ
ISSN 2225-2789 (Online)
http://journal.ugatu.ac.ru

УДК 517.9

Дробно-дифференциальный подход к моделированию процессов фильтрации в сложных неоднородных пористых средах

Р. К. Газизов[1], С. Ю. Лукащук[2]

[1]gazizovrk@gmail.com, [2]lsu@ugatu.su

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 14.11.2017

Аннотация. Для описания процессов фильтрации в сложных трещиновато-пористых средах предложен ряд дробно-дифференциальных математических моделей диффузионного типа. Для однофазной фильтрации неньютоновской жидкости с дробно-дифференциальным уравнением состояния в пористой среде с естественной трещиноватостью получено нелинейное уравнение на давление, содержащее дробные производные Римана–Лиувилля по времени. Для моделирования однофазной фильтрации жидкости в среде с сетью трещин предложена дробно-дифференциальная модификация закона Дарси и получено дробно-дифференциальное уравнение анизотропной фильтрации. Также предложена дробно-дифференциальная модификация модели Баренблатта–Гильмана для неравновесной двухфазной противоточной капиллярной пропитки, учитывающая эффекты степенной памяти при релаксации системы к локальному равновесному состоянию.

Ключевые слова: фильтрация; математическая модель; дробная производная; дробно-дифференциальное уравнение; обобщенный закон Дарси.

ВВЕДЕНИЕ

Процессы переноса в трещиновато-пористых средах часто обладают аномальной кинетикой протекания, то есть кинетикой, не подчиняющейся нормальной (гауссовой) статистике. Наличие в среде трещин приводит к возникновению эффектов пространственной нелокальности и, в ряде случаев, эффектов памяти, подчиняющихся различным степенным законам [1–3]. Математическим аппаратом, позволяющим адекватно описывать такие процессы, является теория интегро-дифференцирования дробного порядка [4–6].

В Уфимском государственном авиационном техническом университете вопросами разработки и исследования математических моделей с дробными производными различных типов занимается исследовательская группа лаборатории группового анализа математических моделей естествознания, техники и технологий (НИЛ ГАММЕТТ). Лаборатория ГАММЕТТ была создана в 2011 г. под руководством ведущего ученого профессора Н. Х. Ибрагимова в рамках выполнения мегагранта по постановлению Правительства РФ от 9 апреля 2010 г. № 220. За время существования лаборатории ее сотрудниками был получен ряд важных результатов в области развития методов современного группового анализа для исследования различных видов математических моделей, в том числе представляемых дробно-дифференциальными уравнениями с производными дробных порядков различных типов. С 2017 г. в рамках проектной части государственного задания Министерства образования и науки РФ, выполняемой коллективами исследователь-

Работа поддержана проектом № 1.3103.2017/4.6 государственного задания Минобрнауки РФ.

ских центров и научных лабораторий, коллективом лаборатории ГАММЕТТ выполняется научный проект по теме «Математическое и компьютерное моделирование процессов фильтрации в неоднородных коллекторах нефтегазовых месторождений на основе дробно-дифференциального подхода». Одним из направлений проекта является разработка новых дробно-дифференциальных моделей фильтрации в трещиновато-пористых средах.

В настоящее время предложено достаточно большое количество дробно-дифференциальных моделей процессов переноса диффузионного типа [7–9]. Такие модели успешно используются, в частности, для описания процессов переноса примесей в геологических формациях со сложной и неоднородной внутренней структурой [2]. Однако для описания фильтрационных процессов в сложных неоднородных пористых средах данный подход еще не нашел широкого применения и большинство предложенных на данный момент дробно-дифференциальных моделей являются линейными. Вместе с тем при фильтрации в таких средах часто наблюдаются нелинейные эффекты. Поэтому представляется актуальной проблема адаптации дробно-дифференциального подхода для моделирования процессов фильтрации в трещиновато-пористых средах и построение соответствующих нелинейных дробно-дифференциальных математических моделей фильтрации. Построение таких моделей, в частности, даст возможность более адекватно предсказывать объемы нефтедобычи в пластах с естественной трещиноватостью, а также моделировать увеличение нефтеотдачи при реализации различных технологических воздействий на пласт (таких как гидроразрыв пласта [10]), приводящих к существенному изменению его структуры.

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ДРОБНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть функция $f(x)$ интегрируема в конечном интервале (a,b). Тогда интегралы

$$({}_aI_x^\alpha f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds,\quad x>a,$$

$$({}_xI_b^\alpha f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b\frac{f(s)}{(s-x)^{1-\alpha}}ds,\quad x<b$$

называются, соответственно, левосторонним и правосторонним дробными интегралами Римана–Лиувилля порядка $\alpha>0$ [4]. Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

С использованием интегралов дробного порядка и оператора дифференцирования вводятся определения производных дробного порядка.

Левосторонней и правосторонней дробными производными Римана–Лиувилля порядка $\alpha>0$ от функции $f(x)$ называются, соответственно,

$$({}_aD_x^\alpha f)(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x\frac{f(s)}{(x-s)^{\alpha-n+1}}ds,$$

$$({}_xD_b^\alpha f)(x)=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_x^b\frac{f(s)}{(s-x)^{\alpha-n+1}}ds,$$

где $n=[\alpha]+1$ (см., например, [4]).

Частные дробные производные по определенной независимой переменной для функции многих переменных получаются заменой производной в приведенных определениях частной производную по требуемой независимой переменной.

Многомерным аналогом интеграла дробного порядка $\alpha\in(0,1)$ в n-мерном пространстве $\Re^n$ является потенциал Рисса [4]:

$$R^\alpha f(\mathbf{r})=\frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\int_{\Re^n}\frac{f(\mathbf{s})}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^{n-\alpha}}d\mathbf{s},$$

где

$$\gamma_n(\alpha)=2^\alpha\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)$$

– нормировочный множитель.

Уравнения, содержащие производные дробного порядка, принято называть дифференциальными уравнениями дробного порядка или, кратко, дробно-дифференциальными уравнениями.

При моделировании фильтрационных процессов часто возникают уравнения диффузионного типа. Одно из классических дробно-дифференциальных обобщений одномерного уравнения диффузии имеет вид [7, 11]

$$ {}_0D_t^{\alpha}u = k\left[\gamma\, {}_aD_x^{\beta+1}u + (1-\gamma)\, {}_xD_b^{\beta+1}u\right], $$

где $\alpha, \beta, \gamma \in (0,1)$ и $k > 0$. Данное уравнение может быть получено методом случайных блужданий с непрерывным временем [12] и описывает в общем случае процессы аномальной диффузии, не подчиняющиеся нормальной (гауссовой) статистике. В частности, если существует конечный второй момент $\langle x^2 \rangle$, то приведенное уравнение дает $\langle x^2 \rangle \sim t^{\mu}$, где $\mu = 2\alpha/(\beta+1)$. Случай $\mu = 1$ соответствует классической (нормальной) диффузии. При $\mu > 1$ скорость расплывания диффузионного пакета оказывается больше, чем в классическом случае, и соответствующий моделируемый процесс называется супердиффузей. При $\mu < 1$, наоборот, диффузионный пакет расплывается медленнее, чем в классическом случае, и процесс называется субдиффузией. Связь процессов аномальной диффузии с устойчивыми негауссовыми законами распределения подробно обсуждается в работе [13].

ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ

Основная идея моделирования заключается в замене реальной трещиновато-пористой среды модельной однородной пористой средой со степенной памятью и/или с пространственной нелокальностью. При этом реализуется неполное (сокращенное) описание фильтрационного процесса дифференциальным уравнением дробного порядка, а наличие дробных производных в модификациях основных законов и соотношений свидетельствует о наличии, так называемых, скрытых переменных [14].

Модель однофазной фильтрации с дробными производными по времени

Рассмотрим случай однофазного течения. Отправной точкой для вывода модели, как и в классическом случае, служит уравнение неразрывности, которое для течения в пористой среде имеет вид

$$ \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{w}) = q, \qquad (1) $$

где ϕ – пористость среды, ρ – плотность фильтрующейся жидкости, $\mathbf{w}$ – вектор скорости жидкости, q – плотность внутренних источников массы, t – время.

В общем случае пористость зависит как от давления жидкости, так и от напряженно-деформированного состояния среды [15]. Трещиновато-пористая среда часто проявляет вязкоупругие свойства [16]. При этом наличие развитой сети трещин с фрактальной структурой приводит к неадекватности классических реологических уравнений Максвелла, Кельвина–Фойгта или Зенера и требует перехода к их известным дробно-дифференциальным аналогам [17]. В результате пористость будет являться функцией не только давления, но и дробной производной (или дробного интеграла) от давления:

$$ \phi = \phi(p, {}_0D_t^{\alpha}p), \quad \alpha \in (-1,1). \qquad (2) $$

Одним из эффективных методов повышения нефтеотдачи является воздействие на нефтяной пласт вязкоупругими составами, например, полимерное заводнение. Классическая (но весьма упрощенная) статистическая теория Рауса для вязкоупругости растворов полимеров в ньютоновской жидкости приводит к дробно-дифференциальному реологическому уравнению с дробной производной порядка $1/2$ [14]. Эксперименты свидетельствуют (см., например, [18]), что в общем случае для описания течения полимеров могут быть эффективно использованы дробно-дифференциальные реологические уравнения с дробными производными, порядок которых принадлежит интервалу $(0,1)$.

Другим возможным способом моделирования раствора полимера в ньютоновской жидкости является его описание как жидкости с дробно-дифференциальным уравнением состояния. Возможность использования дробно–дифференциальных уравнений состояния была показана в работах [19, 20]. В работе [21] при исследовании акустических волн в среде с дробной релаксацией было получено дробно-дифференциальное уравнение состояния, в котором плотность является функцией не только давления, но дробной производной от него:

$$\rho = \rho(p, {}_0D_t^{\beta} p), \quad \beta \in (-1{,}1)\,. \qquad (3)$$

Влияние трещин в пористой среде на фильтрацию жидкости может быть учтено модификацией закона Дарси. В работах [22–24] предложены различные дробно-дифференциальные обобщения данного линейного закона. Однако в общем случае закон фильтрации является нелинейным. Одной из возможных нелинейных модификаций закона фильтрации является

$${}_0D_t^{\gamma}(\nabla p) = -F\left(|\mathbf{w}|\right)\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}, \;\; \gamma \in (0{,}1)\,, \qquad (4)$$

где $F(z)$ – заданная функция. В предельном случае $\gamma = 1$ уравнение (4) переходит в известный [25] нелинейный закон фильтрации целого порядка.

Закон (4) является по природе субдиффузионным и может быть использован для моделирования фильтрации в естественных трещиновато-пористых средах, в которых трещины распределены в среднем равномерно по объему. В этом случае основной поток жидкости определяется именно течением по трещинам, а пористая часть среды оказывает тормозящее действие на поток и играет роль областей захвата частиц жидкости.

Разрешая (4) относительно скорости, получим

$$\mathbf{w} = -f\left({}_0D_t^{\gamma}(\nabla p)\right)\frac{\nabla p}{|\nabla p|}, \;\; \gamma \in (0{,}1)\,, \qquad (5)$$

где $f(z) = F^{-1}(z)$.

Подстановка (2), (3) и (5) в закон сохранения (1) приводит к следующему нелинейному дробно-дифференциальному уравнению фильтрации вязкоупругой среды в трещиновато-пористой среде:

$$\begin{aligned}(c_{f1} + c_{\phi 1})p_t + c_{\phi\alpha}\, {}_0D_t^{\alpha+1} p + c_{f\beta}\, {}_0D_t^{\beta+1} p = \\ = q + \frac{1}{\phi}\operatorname{div}\left[f\left({}_0D_t^{\gamma}(\nabla p)\right)\frac{\nabla p}{|\nabla p|}\right] + \\ + \frac{f({}_0D_t^{\gamma}\nabla p)}{\phi}\left(c_{f1}\nabla p + c_{f\beta}\, {}_0D_t^{\beta}(\nabla p)\right),\end{aligned} \qquad (6)$$

где

$$c_{f1} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}, \quad c_{\phi 1} = \frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial p}$$

– классические изотермические сжимаемости жидкости и пористой среды, соответственно, а

$$c_{f\beta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial\, {}_0D_t^{\beta} p}, \quad c_{\phi\alpha} = \frac{1}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial\, {}_0D_t^{\alpha} p}$$

– их обобщенные дробно-дифференциальные изотермические сжимаемости.

Уравнение (6) относится к классу нелинейных дробно-дифференциальных уравнений аномальной диффузии. В общем случае его анализ представляет собой достаточно нетривиальную задачу. Однако на практике далеко не всегда все эффекты, учитываемые уравнением, проявляются одновременно и являются значимыми. В результате из (6) могут быть получены различные семейства более простых моделей.

В качестве примера рассмотрим случай, когда влиянием изменения пористости на фильтрацию можно пренебречь ($\phi = \mathrm{const}$), внутренние источники массы отсутствуют и модель является одномерной. Тогда из (6) получаем

$$\begin{aligned}c_{f1}p_t + c_{f\beta}\, {}_0D_t^{\beta+1} p = \left[g\left({}_0D_t^{\gamma}(p_x)\right)\right]_x + \\ + g({}_0D_t^{\gamma} p_x)\left(c_{f1}p_x + c_{f\beta}\, {}_0D_t^{\beta}(p_x)\right),\end{aligned} \qquad (7)$$

где $g(z) = f(z)/\phi$. В предположении малости градиента давления (часто справедливом при фильтрации) последним слагаемым в правой части (7) можно пренебречь как более малым по сравнению с первым слагаемым правой части. В этом случае (7) упрощается и принимает вид дробно-дифференциального обобщения нелинейного телеграфного уравнения:

$$c_{f1}p_t + c_{f\beta}\, {}_0D_t^{\beta+1} p = \left[g\left({}_0D_t^{\gamma}(p_x)\right)\right]_x . \qquad (8)$$

Выполним в данном уравнении нелокальную замену зависимой переменной: $p_x = {}_0I_t^{\gamma} u$, где u – новая зависимая переменная. Дифференцируя (8) по x и осуществляя замену переменных, в силу известных (см., например, [4, 5]) свойств операторов дробного интегрирования и дифференцирования

$${}_0D_t^{\alpha}\, {}_0I_t^{\beta} = {}_0D_t^{\alpha-\beta}, \quad {}_0D_t^{\alpha}\, {}_0I_t^{\alpha} = 1,$$

получим уравнение

$$c_{f1}\, {}_0D_t^{1-\gamma} u + c_{f\beta}\, {}_0D_t^{1+\beta-\gamma} u = \left[g(u)\right]_{xx}$$

или

$$c_{f1}\ {}_0D_t^{1-\gamma}u + c_{f\beta}\ {}_0D_t^{1+\beta-\gamma}u = \left[h(u)u_x\right]_x, \quad (9)$$

где $h(u) = g'(u)$.

При $\beta < \gamma$ уравнение (9) будет уравнением субдиффузионного типа, при $\beta = \gamma$ это будет уравнение диффузии с нелокальным возмущением, при $\beta > \gamma$ имеем диффузионно-волновое уравнение.

Модель однофазной фильтрации с дробными производными по пространству

В том случае, когда трещины в среде являются следствием технологического воздействия на нее (например, возникают в результате гидроразрыва пласта), их распределение оказывается сильно неоднородным. Если в окрестности скважины имеется фрактальная сеть трещин с центром на оси скважины, то в этом случае закон фильтрации может быть модифицирован включением дробных производных по пространству. В случае равномерного радиального притока простейшая модификация закона Дарси имеет вид

$$w = -\frac{k_\nu}{\mu}\ {}_0D_r^\nu p, \quad \nu \in (0{,}1), \quad (10)$$

где w – скорость, p – давление, k_ν – дробный аналог проницаемости, μ – вязкость жидкости, r – расстояние от центра скважины.

Пусть k_ν, μ, ϕ – постоянные, и уравнение состояния флюида имеет классический вид $\rho = \rho(p)$. Тогда подстановка (10) в (1), в предположении малости градиента давления, приводит к уравнению

$$p_t = a_\nu r^{-1}\left[r\ {}_0D_r^\nu(p)\right]_r + q, \quad (11)$$

где $a_\nu = k_\nu / (\mu\phi c_{f1})$ – постоянный коэффициент. Уравнение (11) является уравнением супердиффузии и может быть переписано в виде

$$p_t = a_\nu\ {}_0D_r^{\nu+1}(p) + a_\nu r^{-1}\ {}_0D_r^\nu(p) + q.$$

Рассмотрим задачу о стационарном (т.е. $p_t = 0$) притоке к скважине в предположении отсутствия источников массы ($q = 0$). Тогда уравнение (11) принимает особенно простой вид

$$\left[r\ {}_0D_r^\nu(p)\right]_r = 0 \quad (12)$$

и имеет общее решение

$$p(r) = r^{\nu-1}[C_1 \ln r + C_2], \quad (13)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Пусть поставлена первая краевая задача, то есть известно давление p_w в скважине радиуса r_w и давление p_c на контуре питания радиуса r_c:

$$p(r_w) = p_w, \quad p(r_c) = p_c. \quad (14)$$

Подстановка (14) в (13) дает для постоянной C_1 значение

$$C_1 = \left(\frac{p_w}{r_w^{\nu-1}} - \frac{p_c}{r_c^{\nu-1}}\right) / \ln\frac{r_w}{r_c}. \quad (15)$$

Из (12) имеем ${}_0D_r^\nu(p) = C_1 r^{-1}$. Подстановка этого выражения в (10) с учетом (15) дает выражение для скорости:

$$w = -C_1\frac{k_\nu}{\mu}\frac{1}{r},$$

где C_1 определяется по (15), что позволяет рассчитать дебет скважины $Q = 2\pi rhw$, где h – толщина пласта.

Сравнение (13) с классическим ($\nu = 1$) законом падения давления показывает, что в стационарном режиме модифицированный закон Дарси (10) приводит для величины $p(r)/r^{\nu-1}$ к тому же логарифмическому закону, которому подчиняется давление в случае классического закона Дарси.

В более общем случае проницаемость может зависеть от давления: $k_\nu = k_\nu(p)$. Тогда подстановка (10) в (1) приводит к нелинейному уравнению фильтрации

$$p_t = r^{-1}\left[r\,a_\nu(p)\ {}_0D_r^\nu(p)\right]_r + q. \quad (16)$$

Исследование этого уравнения даже в стационарном случае представляет собой достаточно сложную задачу.

В многомерном анизотропном случае (10) может быть обобщена следующим образом:

$$w_i = -\frac{k_{\nu i}(p)}{\mu}\ {}_0D_{x^i}^{\nu_i} p, \quad \nu_i \in (0{,}1), \ i = 1{,}2{,}3, \quad (17)$$

где $\mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3)$ – вектор скорости жидкости, $k_{\nu i}(p)$ – обобщенная проницаемость в i-ом координатном направлении.

Подстановка (17) в (1) при тех же, что и ранее, предположениях, приводит к следующей дробно-дифференциальной модели анизотропной фильтрации:

$$p_t=\sum_{i=1}^{3}\left[a_{\nu i}(p)\,{}_0D_{x^i}^{\nu_i}(p)\right]_{x^i}+q, \qquad (18)$$

где $a_{\nu i}(p)=k_{\nu i}(p)/(\mu\phi c_{f1})$.

Наиболее сложным для моделирования является случай фильтрации в пласте со множеством скважин, на части из которых проведены технологические мероприятия по интенсификации нефтедобычи, например, выполнен гидроразрыв пласта. В этом случае проницаемость является не только функцией давления, но и координат, а разделить по отдельным координатным направлениям производные дробного порядка оказывается не всегда возможным. Для неограниченной среды возможная модификация закона Дарси в этом случае имеет вид

$$\mathbf{w}=-\frac{k_\nu}{\mu}\nabla(R^\nu p),\ \ \nu\in(0,1), \qquad (19)$$

где $R^\nu p$ – потенциал Рисса порядка $\nu\in(0,1)$ в $\Re^n$, $p=p(t,\mathbf{r})$, $k_\nu=k_\nu(p,\mathbf{r})$, $\mathbf{r}\in\Re^n$.

Подстановка (19) в (1) приводит к модели фильтрации с потенциалом Рисса:

$$p_t=\nabla[a_\nu(p,\mathbf{r})\nabla(R^\nu p)]+q,\ \ \nu\in(0,1). \qquad (20)$$

Построенные дробно-дифференциальные модели фильтрации (16), (18) и (20) являются весьма сложными нелинейными моделями и требуют разработки новых качественных методов и численных алгоритмов их исследования.

Модель неравновесной двухфазной противоточной капиллярной пропитки

Задача вытеснения нефти водой в пористой среде является одной из классических задач двухфазной фильтрации. При этом ключевую роль играет моделирование процесса противоточной капиллярной пропитки пористой среды [26]. В слабопроницаемых микронеоднородных средах данный процесс является неравновесным [27]. Если микронеоднородности образуют фрактальную структуру, то для описания пористой среды может быть использована модель однородной среды со степенной памятью.

Уравнения неразрывности при двухфазной фильтрации имеют вид [26]

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\phi\rho_1 s)}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho_1\mathbf{w}_1)=0,\\&\frac{\partial(\phi\rho_2 s)}{\partial t}-\mathrm{div}(\rho_2\mathbf{w}_2)=0,\end{aligned} \qquad (21)$$

где ρ_i и $\mathbf{w}_i$ – соответственно, плотность и скорость i-й фазы $(i=1,2)$, ϕ – пористость породы, s – насыщенность.

Классический закон Дарси для i-й фазы имеет вид

$$\mathbf{w}_i=-\frac{k\kappa_i}{\mu_i}\nabla p_i,\ \ i=1,2, \qquad (22)$$

где k – проницаемость пористой среды, κ_i – относительная фазовая проницаемость для i-й фазы, p_i – давление i-й фазы.

Разность давлений фаз обусловлена капиллярным давлением p_c: $p_2-p_1=p_c$.

Одним из подходов к учету неравновесности процесса пропитки является рассмотрение κ_1, κ_2 и p_c как равновесных функций некоторой эффективной насыщенности σ. В работе [27] было предложено использовать в качестве уравнения связи истинной и эффективной насыщенностей закон Максвелла–Каттанео: $\sigma=s+\tau s_t$, где τ – время релаксации к равновесному состоянию, называемое временем замещения. Известно, что данный закон является следствием соотношения

$$s=\int_0^t K(t-t')\sigma(t')dt' \qquad (23)$$

с экспоненциальной функцией памяти $K(t)=\tau^{-1}e^{-\frac{t}{\tau}}$. Если в качестве функции памяти в (23) использовать степенную функцию $K(t)=t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$, $\alpha\in(0,1)$, то правая часть (23) превращается в дробный интеграл порядка α:

$$s={}_0I_t^{1-\alpha}\sigma. \qquad (24)$$

Следуя [27], рассмотрим простейший случай, когда пористость, вязкости и плотности фаз считаются постоянными. Для противоточной капиллярной пропитки выполнено условие $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = 0$, которое с учетом (22) дает

$$\frac{\kappa_1(\sigma)}{\mu_1}\nabla p_1 + \frac{\kappa_2(\sigma)}{\mu_2}\nabla p_2 = 0. \qquad (25)$$

При рассматриваемых ограничениях, первое и второе уравнения в (21) совпадают и в силу (22) дают

$$\phi\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{k}{\mu_1}\operatorname{div}(\kappa_1(\sigma)\nabla p_1). \qquad (26)$$

Выражая $p_2 = p_1 + p_c(\sigma)$ и подставляя в (25), находим

$$\nabla p_1 = -\frac{\mu_1\kappa_2(\sigma)}{\mu_1\kappa_2(\sigma)+\mu_2\kappa_1(\sigma)}\nabla\big(p_c(\sigma)\big). \quad (27)$$

Подстановка (24) и (27) в уравнение (26) приводит к нелинейному дробно-дифференциальному уравнению для насыщенности:

$$s_t = \Delta\Phi({}_0D_t^{1-\alpha}s),\ \alpha\in(0,1), \qquad (28)$$

где Δ – оператор Лапласа и

$$\Phi(\sigma) = -\frac{k}{\phi}\int_0^{\sigma}\frac{\kappa_1(\sigma')\kappa_2(\sigma')}{\mu_1\kappa_2(\sigma')+\mu_2\kappa_1(\sigma')}\frac{dp_c(\sigma')}{d\sigma'}d\sigma'.$$

Уравнение (28) представляет собой дробно-дифференциальную модификацию модели Баренблатта–Гильмана, предложенную в [27]. В предельном случае $\alpha = 1$ оно переходит в известное уравнение Рыжика [26].

Для эффективной насыщенности σ, с учетом соотношения (24), уравнение (28) принимает вид

$${}_0D_t^{\alpha}\sigma = \Delta\Phi(\sigma),\ \alpha\in(0,1). \qquad (29)$$

Уравнения (28), (29) являются нелинейными уравнениями субдиффузии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использованный в работе подход к выводу дробно-дифференциальных фильтрационных моделей носит феноменологический характер, поэтому возможность их применимости в каждом конкретном практическом случае должна быть обоснована с использованием экспериментальных данных, подтверждающих справедливость соответствующих дробно-дифференциальных обобщений феноменологических гипотез.

Все полученные в работе дробно-дифференциальные модели фильтрации относятся к классу уравнений аномальной диффузии. Характерной особенностью полученных уравнений, отличающей их от известных дробно-дифференциальных моделей фильтрации, является их нелинейность. При этом модели сохраняют структуру классических уравнений фильтрации целого порядка и переходят в них в предельных случаях, когда порядок дробного дифференцирования становится целым. Изучение качественных свойств полученных уравнений, а также построение их численных решений являются весьма нетривиальными задачами, требующими в каждом отдельном случае самостоятельного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Benson D. A., Tadjeran C., Meerschaert M. M., Farnham I., Pohll G.** Radial Fractional–Order Dispersion Through Fractured Rock // Water Resources Research. 2004. V. 40, No. 12. P. 1–9. **[** D. A. Benson, C. Tadjeran, M. M. Meerschaert, I. Farnham, G. Pohll, “Radial Fractional–Order Dispersion Through Fractured Rock”, in *Water Resources Research* vol. 40, no. 12, pp. 1-9, 2004. **]**

2. **Аномальная** диффузия радионуклидов в сильнонеоднородных геологических формациях / под. ред. Л. А. Большова. М.: Наука, 2010. 342 с. **[** *Anomalous Radionuclide Diffusion in Highly Heterogeneous Geological Formations*, ed. by L. A. Bolshov, (in Russian). M.: Nauka, 2010. **]**

3. **Sahimi M**. Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches. Weinheim: Wiley-VCH, 2011. 733 p. **[** M. Sahimi, *Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches*. Weinheim: Wiley-VCH, 2011. **]**

4. **Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. **[** S. Samko, A. Kilbas, O. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications,* (in Russian). Minsk: Nauka I technika, 1987. **]**

5. **Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.** Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p. **[** A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006. **]**

6. **Учайкин В. В.** Метод дробных производных. Ульяновск: изд-во «Артишок», 2008. 512 с. **[** V. V. Uchaikin, *Fractional derivatives method*, (in Russian). Ul'yanovsk: izd-vo “Artishok”, 2008. **]**

7. **Metzler R., Klafter J.** The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamic Approach // Physics Reports. 2000. V. 339. P. 1–77. **[** R. Metzler, J. Klafter, “The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamic Approach”, in *Physics Reports,* vol. 339, pp. 1-77, 2000. **]**

8. **Anomalous** Transport: Foundations and Applications / R. Klages, G. Radons, I. M. Sokolov (eds.). Berlin: Willey-VCH,

2008, 584 p. [*Anomalous Transport: Foundations and Applications* / R. Klages, G. Radons, I. M. Sokolov (eds.). Berlin: Willey-VCH, 2008.]

9. **Fractional** Dynamics: Recent Advances / J. Klafter, S. C. Lim, R. Metzler (eds.). Singapore: World Scientific, 2011. 532 p. [*Fractional Dynamics: Recent Advances* / J. Klafter, S. C. Lim, R. Metzler (eds.). Singapore: World Scientific, 2011.]

10. **Экономидес М., Олини Р., Валько П.** Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории к практике. М.: Ин-т компьютерных исследований. 2007. 236 с. [R. E. Oligney, M. J. Economides, P. Valko, *Unified Fracture Design. Bridging the between theory and practice,* (in Russian). M.: In-t kompyuternykh issledovaniy, 2001.]

11. **Заславский Г. М.** Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.-Ижевск: РХД, Институт компьютерных исследований. 2010. 472 с. [G. M. Zaslavsky, *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*, (in Russian). M.-Izhevsk: RKhD, Institut kompyuternykh issledovaniy, 2010.]

12. **Montroll E. W., Weiss G. H.** Random walks on lattices II // Journal of Mathematical Physics. 1965. V. 6, No. 2. P. 167–181. [E. W. Montroll and G. H. Weiss, "Random walks on lattices II", in *Journal of Mathematical Physics*, vol. 6, no. 2, pp. 167-181, 1965.]

13. **Учайкин В. В.** Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // Успехи физических наук. 2003. Т. 173, № 8. С. 847–876. [V. V. Uchaikin, "Self-Similar Anomalous Diffusion and Levy-Stable Laws", (in Russian), In *Uspekhi fizicheskikh nauk*, vol. 73, no. 8, pp. 847–876, 2003.]

14. **Учайкин В. В.** Механика. Основы механики сплошных сред. СПб.: изд-во Лань, 2017. 860 с. [V. V. Uchaikin, *Mechanics. Basics of continuum mechanics*, (in Russian). SPb.: izd-vo Lan', 2017.]

15. **Николаевский В. Н.** Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996. 448 с. [V. N. Nikolaevsky, *Geomechanics and fluidodynamics*, (in Russian). M.: Nedra, 1996.]

16. **Ba J., Du Q., Carcione J. M., Zhang H., Muller T. M.** Seismic exploration of hydrocarbons in heterogeneous reservoirs. Amsterdam: Elsevier, 2014. 370 p. [J. Ba, Q. Du, J. M. Carcione, H. Zhang, T. M. Muller, *Seismic exploration of hydrocarbons in heterogeneous reservoirs.* Amsterdam: Elsevier, 2014.]

17. **Mainardi F.** Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models. Singapore: Imperial College Press, 2010. 367 p. [F. Mainardi, *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models*. Singapore: Imperial College Press, 2010.]

18. **Applications** of fractional calculus in physics / R. Hilfer (ed.). Singapore: World Scientific, 2000, 470 p. [*Applications of fractional calculus in physics* / R. Hilfer (ed.). Singapore: World Scientific, 2000.]

19. **Нахушев А. М.** Об уравнениях состояния непрерывных одномерных систем и их приложениях. Нальчик: Логос, 1995. 50 с. [A. M. Nakhushev, *About equations of states for continuous one-dimensional systems and their applications*, (in Russian). Nal'chik: Logos, 1995.]

20. **Нахушев А. М.** Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с. [A. M. Nakhushev, *Fractional calculus and its applications*, (in Russian). M.: FIZMATLIT, 2003.]

21. **Prieur F., Holm S.** Nonlinear acoustic wave equations with fractional loss operators // Journal of the Acoustic Society of America. 2011. V. 130, No. 3. P. 1125–1132. [F. Prieur, S. Holm, "Nonlinear acoustic wave equations with fractional loss operators", in *Journal of the Acoustic Society of America*, vol. 130, no. 3, pp. 1125-1132, 2011.]

22. **Caffarelli L., Vazquez J. L.** Nonlinear porous medium flow with fractional potential pressure // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2011. V. 202. No. 2. P. 537–565. [L. Caffarelli, J. L. Vazquez, "Nonlinear porous medium flow with fractional potential pressure", in *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 202, no. 2, pp. 537-565, 2011.]

23. **Raghavan R.** Fractional diffusion: performance of fractured wells // Journal Petroleum Science and Engineering. 2012. V. 92–93. P. 167–173. [R. Raghavan, "Fractional diffusion: performance of fractured wells", in *Journal Petroleum Science and Engineering*, vol. 92-93, pp. 167-173, 2012.]

24. **Abiola O. D., Enamul H. M., Kassem M., Sidqi A. A.** A modified memory-based mathematical model describing fluid flow in porous media // Computers and Mathematics with Applications. 2017. V. 73. No. 6. P. 1385–1402. [O. D. Abiola, H. M. Enamul, M. Kassem, A. A. Sidqi, "A modified memory-based mathematical model describing fluid flow in porous media", in *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 73, no. 6, pp. 1385-1402, 2017.]

25. **Чарный И. А.** Подземная гидрогазодинамика. М.–Ижевск: РХД, 2006. 416 с. [I. A. Charnyi, Underground hydro-gas dynamics, (in Russian). M.-Izhevsk: RChD, 2006.]

26. **Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.** Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с. [G. I. Barenblatt, V. M. Entov, V. M. Ryzhik, *Theory of fluid flows through natural rocks*. Springer, 1990.]

27. **Баренблатт Г.И., Гильман А.А.** Математическая модель неравновесной капиллярной пропитки // Инженерно-физический журнал. 1987. Т. 52, № 3. С. 456–461. [G. I. Barenblatt, A. A. Gilman, "A mathematical model of nonequilibrium counterflow capillary imbibition", in *Journal of Engineering Physics*, vol. 52, no. 3, pp. 335-339, 1987.]

ОБ АВТОРАХ

ГАЗИЗОВ Рафаил Кавыевич, проф., зав. каф. высокопроизводительных вычислительных технологий и систем. Дипл. математик (БГУ, 1983). Д-р физ.-мат. наук по дифференциальным уравнениям (ИММ Уральск. отд. РАН 1999). Иссл. в обл. группового анализа дифференциальных уравнений и математического моделирования.

ЛУКАЩУК Станислав Юрьевич, доц. каф. высокопроизводительных вычислительных технологий и систем. Дипл. инж.-теплофизик (УГАТУ, 1997). Канд. физ.-мат. наук по теплофизике и молекулярной физике (БашГУ, 1999). Иссл. в обл. математического и компьютерного моделирования.

METADATA

Title: Fractional differentiation approach to modeling of fluid filtration processes in complex heterogeneous porous media.

Authors: R. K. Gazizov[1], S. Yu. Lukashchuk[2]

Affiliation:

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: [1]gazizovrk@gmail.com, [2]lsu@ugatu.su

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 21, no. 4 (78), pp. 104-112, 2017. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: Fractional differential mathematical models of diffusion type for description of filtration processes in complex fractured porous media are proposed. A nonlinear pressure equation with the Riemann–Liouville time-fractional derivatives is derived for a single phase filtration of non-Newtonian fluid with a fractional equation of state in naturally fractured porous media. A space-fractional generalization of the Darcy's law is proposed for a single phase filtration modeling in porous media with fracture network, and corresponding fractional differential equation of anisotropic filtration is obtained. Also, a fractional modification of the Barenblatt-Gilman model of nonequilibrium two-phase capillary counter-current imbibition is derived. The model takes into account a power-law memory effects which can accompany the process of system relaxation to local equilibrium state.

Key words: filtration; mathematical model; fractional derivative; fractional differential equation; generalized Darcy's law.

About authors:

GAZIZOV, Rafail Kavyevich, prof., head of Dept. of High Performance Computing Technologies and Systems. Mathematician (BSU, 1983). Dr. in Phys. and Math. Sciences (IMM Uralsk Department of the RAS, 1999). Research in the area of group analysis of differential equations and mathematical modeling.

LUKASHCHUK, Stanislav Yur'evich, associate prof., Dept. of High Performance Computing Technologies and Systems. Cand. in Phys. and Math. Sciences (BashGU, 1999). Research in the area of mathematical modeling and simulation.