Уфа : УГАТУ, 2012 Вестник УГАТУ Т. 16, № 3 (48). С. 11–15

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 681.5

А. З. Асанов, В. С. Каримов

СИНТЕЗ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫМ ОБЪЕКТОМ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ПО СОСТОЯНИЮ И С НАБЛЮДАТЕЛЕМ ПОЛНОГО ПОРЯДКА

Рассматривается синтез системы автоматического управления многосвязным объектом с запаздываниями по состоянию на основе технологии вложения систем. Предполагается, что фазовый вектор состояния объекта недоступен для непосредственного измерения, поэтому при синтезе системы был применен наблюдатель полного порядка. На численном примере была показана эффективность предлагаемого аналитического решения задачи синтеза. *Система автоматического управления*; *многосвязный объект*; *запаздывания по состоянию*; *наблюдатель*; *технология вложения систем*

ВВЕДЕНИЕ

Явление запаздывания зачастую отрицательно влияет на поведение систем автоматического управления. Запаздывания, сосредоточенные по состоянию в объектах управления, оказывают негативное воздействие на синтез систем. Они могут привести к автоколебательности, ухудшению качества процессов управления и даже к потере устойчивости системы. Следовательно, возникает потребность управления подобными объектами с учетом отрицательного влияния запаздываний на систему управления. Необходимо учесть, что в данной работе были рассмотрены многосвязные объекты управления.

Наиболее часто при синтезе систем управления многосвязными объектами с запаздываниями применяют методы, использующие аппроксимацию звеньев запаздывания (например, аппроксимация Паде, рядом Тейлора, апериодическими звеньями), или методы оптимального или квазиоптимального управления. Однако у вышеперечисленных методов существуют недостатки. При аппроксимации звеньев запаздывания появляется погрешность, которая зачастую отрицательно сказывается на качестве управления. Помимо этого усложняется матричная передаточная функция (МПФ) объекта управления, что в дальнейшем ведет к затруднениям, связанным с вычислительной сложностью методов синтеза систем управления. В случае применения методов оптимального управления при некоторых начальных условиях движение в системе становится неоптимальным и возрастает время переходного процесса. А использование квазиоптимальных методов не позволяет полностью скомпенсировать влияние запаздывания на динамику системы.

В данной работе приведено аналитическое решение задачи синтеза системы автоматического управления многосвязным объектом с запаздываниями по состоянию на основе технологии вложения систем [1, 2]. Было предположено, что фазовый вектор состояния объекта недоступен для непосредственного наблюдения. Поэтому при синтезе системы управления был применен наблюдатель полного порядка (далее наблюдающее устройство) [3], который воспроизводит фазовый вектор состояния объекта. С помощью технологии вложения систем найдена МПФ регулятора и условия, ее определяющие, при которой поведение системы управления описывается желаемой МПФ. Синтез системы управления был проведен по вынужденной составляющей замкнутой динамической системы.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ И НАБЛЮДАТЕЛЯ

Пусть наблюдаемый и управляемый линейный стационарный объект с сосредоточенными запаздываниями по состоянию может быть представлен в виде дифференциально-разностных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^{l} A_i x(t-\tau_i) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \qquad (1)$$

Контактная информация: kvs-chelny@mail.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 08-08-00536, 11-08-00311)

где $\tau_0 = 0$, $0 < \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l$ – постоянные времена запаздываний, $i = 0, 1, \ldots, l$, $u(t) \in R^s$ – вектор входных переменных, $y(t) \in R^m$ – вектор выходных переменных, $x(t) \in R^n$ – фазовый вектор объекта управления. В нашем случае матрицы A_i имеют размер $n \times n$, B – $n \times s$, C – $m \times n$. Матрицы A_i являются постоянными матрицами при временах запаздывания τ_i.

Слагаемые $A_i x(t - \tau_i)$ описывают запаздывания сигналов на время τ_i во внутренних каналах объекта управления (ОУ).

Начальные условия зададим с учетом запаздывания сигналов в объекте управления – формально будем рассматривать отрицательные моменты времени $t < 0$, предполагая, что в объекте происходили динамические процессы до начального момента времени:

$$x(t) = \varphi_x(t),\ t_0 - \tau \le t \le t_0,$$

где τ – наибольшее время запаздывания.

Согласно [4], объект управления должен быть устойчивым, в противном случае можно получить неустойчивую систему автоматического управления.

Предположим, что фазовый вектор состояния объекта недоступен для непосредственного наблюдения, тогда для воспроизведения текущего фазового вектора $x(t)$ объекта по информации о сигналах $u(t)$ и $y(t)$ используем наблюдающее устройство.

Пусть наблюдающее устройство, вычисляющее текущий фазовый вектор $x(t)$ объекта может быть представлено уравнениями:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \sum_{i=0}^{l} A_i \hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t), \end{aligned} \qquad (2)$$

где $\hat{x}(t)$ – фазовый вектор состояния наблюдающего устройства, $\hat{y}(t)$ – вектор выхода наблюдающего устройства, L – матрица наблюдателя. Необходимо отметить, что в данном случае наблюдающее устройство запаздываний не содержит, так как основную роль при компенсации запаздываний, сосредоточенных по состоянию в объекте управления, будет выполнять регулятор.

СИНТЕЗ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕХНОЛОГИИ ВЛОЖЕНИЯ СИСТЕМ

Применение преобразования Лапласа к уравнениям (1) дает операторную форму описания объекта:

$$\begin{aligned} px(p) &= \sum_{i=0}^{l} A_i \,\mathrm{e}^{-\tau_i p}\, x(p) + Bu(p), \\ y(p) &= Cx(p). \end{aligned} \qquad (3)$$

Пусть закон управления в общем случае описывается матричным уравнением:

$$\nu(p) = K(p)\hat{x}(p) + u(p), \qquad (4)$$

где $K(p)$ – МПФ регулятора размера $n \times s$, $\nu(p) \in R^s$ – вектор управления на входе системы.

Допустим, что желаемое поведение САУ задается МПФ $E_y^{\nu}(p)$ от управляющих воздействий ν к выходу y.

Для ОУ (1), наблюдающего устройства (2) и закона управления (4) необходимо найти МПФ регулятора $K(p)$ или условия, ее определяющие, при которых поведение САУ (рис. 1) будет описываться желаемой МПФ $E_y^{\nu}(p)$.

Далее при синтезе системы управления будем использовать технологию вложения систем [1, 2]. С учетом уравнений (1), (2), (4) и выполнения процедур метода вложения систем проблемная матрица (проматрица) рассматриваемой задачи будет иметь вид:

$$\Omega(p) = \\ = \begin{bmatrix} (pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i \,\mathrm{e}^{-\tau_i p}) & 0 & 0 & 0 & -B & 0 \\ 0 & (pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i) - L & L & -B & 0 \\ -C & 0 & I_m & 0 & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & -K & 0 & 0 & -I_m & I_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_s \end{bmatrix}.$$

Репроматрица системы (матрица обратная проматрице) в обобщенном виде представляется следующим образом:

$$\Omega^{-1}(p) = \begin{bmatrix} E_x^{\varphi}(p) & * & * & * & * & E_x^{\nu}(p) \\ E_{\hat{x}}^{\varphi}(p) & * & * & * & * & E_{\hat{x}}^{\nu}(p) \\ E_y^{\varphi}(p) & * & * & * & * & E_y^{\nu}(p) \\ E_{\hat{y}}^{\varphi}(p) & * & * & * & * & E_{\hat{y}}^{\nu}(p) \\ E_u^{\varphi}(p) & * & * & * & * & E_u^{\nu}(p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_s \end{bmatrix}.$$

Здесь $E_j^i(p)$ – МПФ от параметра i к параметру j. Блоки, не представляющие особого интереса, отмечены звездочками.

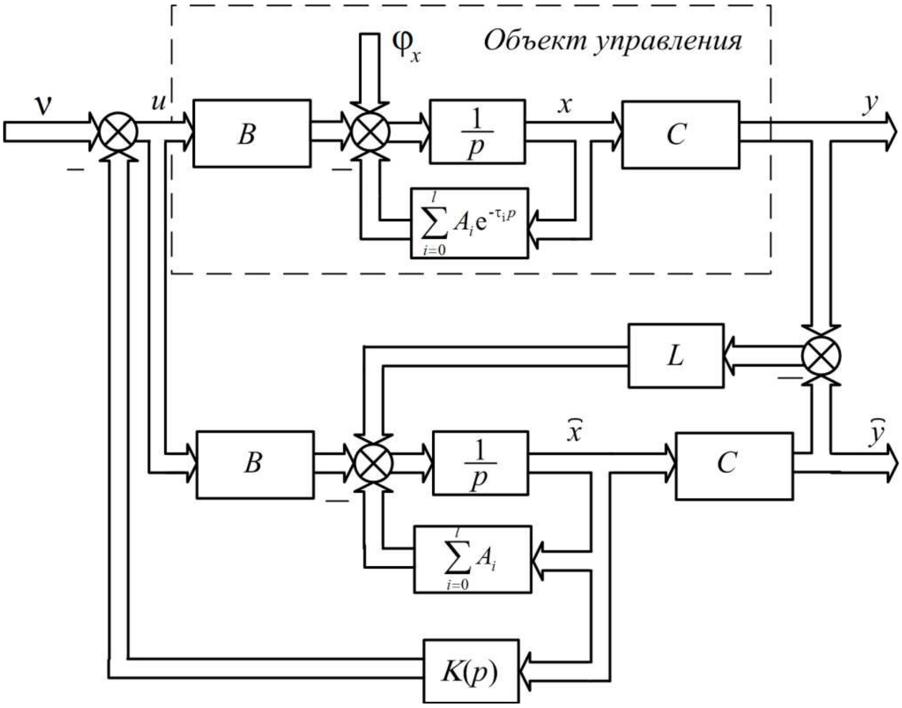

Рис. 1. Система автоматического управления с запаздываниями

Матрицы вложения α и β, используемые при вложении систем имеют вид:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_s \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_m & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ при } \omega = E_y^{\nu}(p),$$

где ω – образ синтезируемой системы – желаемая передаточная функция системы.

После выполнения процедур технологии вложения – последовательной факторизации матриц $\Omega = \Sigma\Xi$, $\alpha = \Sigma\delta$, $\beta = \pi\Xi$, $\omega = \pi\delta$ можно получить уравнения, которым должна удовлетворять МПФ регулятора $K(p)$ при синтезе по вынужденной составляющей $E_y^{\nu}(p)$ замкнутой динамической системы.

Для решения матричных уравнений, которые получаются в результате применения процедур вложения, возможно применение аппарата канонизации матриц [5].

Применение технологии вложения при синтезе по вынужденной составляющей дает следующее уравнение относительно искомой передаточной матрицы $K(p)$:

$$C(pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i \, \mathrm{e}^{-\tau_i p})^{-1} B - E_y^{\nu}(p) = \\ = E_y^{\nu}(p) K(p) (pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i)^{-1} B. \tag{5}$$

Используя результаты [1, 2], множество регуляторов в этом случае можно описать формулами:

$$\{K(p)\}_{\mu,\eta} = (E_y^{\nu}(p))^{\sim} \cdot \\ \cdot \left[C(pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i e^{-\tau_i p})^{-1} B - E_y^{\nu}(p) \right] \cdot \\ \cdot ((pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i)^{-1} B)^{\sim} + \overline{E_y^{\nu}(p)}^{R} \mu(p) + \\ + \eta(p) \overline{((pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i)^{-1} B)}^{L}, \tag{6}$$

где $\eta(p)$, $\mu(p)$ – произвольные дробно-полиномиальные матрицы соответствующих размеров, $(M)^{\sim}$ – сводный канонизатор матрицы M, $\overline{M}^{R}$ – правый делитель нуля матрицы M, $\overline{M}^{L}$ – левый делитель нуля матрицы M. Условия разрешимости уравнения (5), а значит, и существования множества решений (6) имеют вид:

$$\overline{E_y^{\nu}(p)}^{L} [C(pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i \, \mathrm{e}^{-\tau_i p})^{-1} B - \\ - E_y^{\nu}(p)] = 0, \\ [C(pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i \, \mathrm{e}^{-\tau_i p})^{-1} B - E_y^{\nu}(p)] \cdot \\ \cdot \overline{((pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i)^{-1} B)}^{R} = 0, \tag{7}$$

или

$$C(pI_n-\sum_{i=0}^{l}A_i\,\mathrm{e}^{-\tau_i p})^{-1}B-E_y^{\nu}(p)=$$
$$=E_y^{\nu}(p)(E_y^{\nu}(p))^{\sim R}\chi(p)$$
$$C(pI_n-\sum_{i=0}^{l}A_i\,\mathrm{e}^{-\tau_i p})^{-1}B-E_y^{\nu}(p)= \qquad (8)$$
$$=\xi(p)((pI_n-\sum_{i=0}^{l}A_i)^{-1}B)^{\sim L}\cdot$$
$$\cdot((pI_n-\sum_{i=0}^{l}A_i)^{-1}B),$$

где $\xi(p)$, $\chi(p)$ – произвольные дробно-полиномиальные матрицы соответствующего размера, $M^{\sim L}$ – левый канонизатор матрицы M, $M^{\sim R}$ – правый канонизатор матрицы M.

Таким образом, получено решение задачи синтеза (6) с условиями существования этого решения (7) или (8), которые позволяют найти множество регуляторов, удовлетворяющих закону управления (4).

Рассмотрим работу наблюдателя полного порядка, предварительно найдя ошибку регулирования $\varepsilon(t)$. Вычитая из уравнения (1) уравнение (2) получим выражение для ошибки регулирования:

$$\dot{\varepsilon}(t)=(\sum_{i=0}^{l}A_i\,\mathrm{e}^{-\tau_i p}-\sum_{i=0}^{l}A_i-LC)\varepsilon(t)\,,$$

где $\varepsilon(t)=x(t)-\hat{x}(t)$. Динамика переходного процесса ошибки $\varepsilon(t)$ в данном случае будет определяться собственными числами матрицы $A_н=\sum_{i=0}^{l}A_i\,\mathrm{e}^{-\tau_i p}-\sum_{i=0}^{l}A_i-LC$. При отрицательных вещественных частях собственных чисел матрицы $A_н$ процесс оценивания будет асимптотически устойчив и ошибка $\varepsilon(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Согласно [6] выбор матрицы L, отвечающей за быстродействие процесса оценивания, определяется проектировщиком.

ПРИМЕР

Пусть объект управления с запаздываниями, сосредоточенными по состоянию, может быть описан следующими матрицами в пространстве состояний:

$$A_0=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&-2&1\\0&0&-1\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-0{,}5\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&1\\0{,}5&2\\0&0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

Время запаздываний при матрицах A_i: $\tau_1 = 1$ с, $\tau_2 = 2$ с. Закон управления определяется уравнением (4).

Допустим, что желаемая система автоматического управления с запаздываниями по состоянию может быть определена следующими матрицами в пространстве состояний: $A_ж = A_0$, $B_ж = B$, $C_ж = C$, причем все запаздывания, сосредоточенные в объекте управления должны быть скомпенсированы. Тогда желаемая матричная передаточная функция от входа ν к выходу y может иметь вид:

$$E_y^{\nu}(p)=\begin{bmatrix}\dfrac{2(p^2+3p+2)}{p^3+4p^2+5p+2}&\dfrac{(p^2+3p+2)}{p^3+4p^2+5p+2}\\ \dfrac{0{,}5(p^2+2p+1)}{p^3+4p^2+5p+2}&\dfrac{2(p^2+2p+1)}{p^3+4p^2+5p+2}\end{bmatrix}.$$

Далее проверим существование множества решений регулятора (6) по условиям (7). Для этого найдем левый делитель нуля матрицы $E_y^{\nu}(p)$ и правый делитель нуля матрицы $(pI_n-\sum_{i=0}^{l}A_i)^{-1}B$ с помощью метода канонизации матриц [5]:

$$\overline{E_y^{\nu}(p)}^{L}=0,\ \overline{((pI_n-A)^{-1}B}^{R}=0\,.$$

Следовательно, условия существования множества решений регулятора (6) выполняются.

По формуле (6) вычислим МПФ регулятора $K(p)$ при $\mu(p) = 0$ и $\eta(p) = 0$:

$$K(p)=\begin{bmatrix}0&\dfrac{2e^{-p}(p+3)}{7p+14+7e^{-p}}&0\\ 0&\dfrac{-4e^{-p}(p+3)}{7p+14+7e^{-p}}&0\end{bmatrix}.$$

Далее перейдем к выбору матрицы L. Для этого проанализируем вид матрицы $A_н$, отвечающей за динамику переходного процесса ошибки $\varepsilon(t)$:

$$A_н=\begin{bmatrix}-l_{11}&-l_{12}&0\\-l_{21}&-\mathrm{e}^{-p}+1-l_{22}&0\\-l_{31}&-l_{32}&-0.5\mathrm{e}^{-2p}+0.5\end{bmatrix},$$

где

$$L=\begin{bmatrix}l_{11}&l_{12}\\l_{21}&l_{22}\\l_{31}&l_{32}\end{bmatrix}.$$

Для того, чтобы вещественные части собственных чисел матрицы $A_н$ были отрицательными, достаточно задать компоненты матрицы L следующими:

$$l_{11} = 2\,,\ l_{22} = 2 + e^{-p}\,,\ l_{12} = l_{21} = l_{31} = l_{32} = 0\,.$$

Из анализа переходных характеристик следует, что МПФ полученной системы управления полностью соответствует желаемым МПФ.

Результаты имитационного моделирования подтверждают компенсацию запаздываний по состоянию и достижение желаемых процессов в системе управления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была решена задача синтеза системы автоматического управления многосвязным объектом с запаздываниями по состоянию. Для воспроизведения недоступного для наблюдения фазового вектора состояния объекта был применен наблюдатель полного порядка.

Найдено множество решений задачи синтеза и условия разрешимости задачи с помощью применения технологии вложения систем. Приведен численный пример, подтверждающий справедливость предложенного метода синтеза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Буков В. Н.** Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во науч. лит-ры Н. Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.

2. **Асанов А. З.** Технология вложения систем и ее приложения: учеб. пособие. Уфа: УГАТУ, 2007. 227 с.

3. **Кузовков Н. Т.** Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976. 184 с.

4. **Кирьянен А. И.** Устойчивость систем с последействием и их применения. СПб.: СПбГУ, 1994. 236 с.

5. Решение линейных матричных уравнений методом канонизации / В. Н. Буков [и др.] // Вестник Киевского университета. Серия: Физико-математические науки. Вып. 1. 2002. С. 19–28.

6. **Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.** Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке Matlab. СПб.: Наука, 2000. 475 с.

ОБ АВТОРАХ

Асанов Асхат Замилович, проф. каф. прикл. математики и информатики Казанск. федеральн. ун-та, КГУ. Дипл. инженер по радиофизике и электронике (КГУ, 1972). Д-р техн наук по системн. анализу, управлению и обработке информации (УГАТУ, 2004). Иссл. в обл. системн. анализа, теории управления сложн. динамическ., многосвязными и адаптивными системами.

Каримов Валерий Сергеевич, ст. преп. той же каф. Дипл. инженер по автоматизации технологическ. процессов и прогрессивных производств (КамПИ, 2004). Иссл. в обл. теории автоматического управления, многосвязных систем с запаздываниями.