УДК 338.12

Модель равновесного риска для инвестиционного бизнес-цикла

О. И. Кривошеев

o-krivosheev@ya.ru

ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН»

ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет экономики, статистики, информатики (МЭСИ)»

Поступила в редакцию 22.04.2013

Аннотация. Предлагается модель, описывающая поведение инвесторов, которые более агрессивно инвестируют при увеличении рентабельности (IRR) и наоборот, сворачивают инвестиции при ее уменьшении. Предполагается, что рентабельность монотонно возрастает с ростом цены выпускаемого продукта. Цены подчиняются уравнению Эванса, в котором фигурирует нетрадиционное слагаемое, представляющее возрастающий с ростом рентабельностей (и цен) спрос на производимые этой частью экономики факторы производства долгосрочного пользования. Если на реинвестирование отправляется достаточно быстро увеличивающаяся с ростом рентабельности (IRR) относительная доля дохода за вычетом текущих издержек, тогда возникнут равновесия, интерпретируемые в модели с изменяемыми объемами капитала как рост и кризис. В дальнейшем, в зависимости от параметров системы, ее динамика сопровождается скачками-переходами из одной фазы в другую. В модели рассчитывается равновесная амплитуда колебаний и риск.

Ключевые слова: инвестиционное правило; нестабильность; бифуркация; неустойчивость; инвестиционный цикл; равновесная волатильность.

Традиционная экономическая теория полагает, что происхождение нестабильности экономических систем следует объяснять внешними факторами, такими как природные катастрофы. Вместе с тем возникает понимание, что источником нестабильности могут являться сами экономические системы. Этому пониманию способствуют появившиеся модели самоорганизованной критичности и режимов с обострением, раскрывающие различные причины внутренней нестабильности, и исследования, сопоставляющие количество событий, влияющих на биржу и ее резкие движения. В частности выяснилось, что 98 % последних не объясняются внешними причинами [1–3]. Целью выполненных автором исследований является объяснение существования ненулевого уровня риска и нестабильности в экономических системах. В этом смысле выполненная работа близка идеям самоорганизованной критичности [3], когда похожая на клеточный автомат система попадает в точку фазового перехода второго рода, но использованный математический аппарат близок реалистичным моделям циклов [1], в которые внесен методологически важный аспект – смоделированы самопроизвольный выход экономической системы на границу устойчивости и остановка вблизи нее. Ранее в работе [4] автором уже построена схожая модель на более формальной основе. При этом пришлось выполнить анализ оптимального поведения инвестора в условиях случайного блуждания логарифма доходности фондов или цен актива, описываемых Винеровским процессом. Наличие сложностей того исследования со стохастическими процессами привело к необходимости построения реализованной в данном исследовании модели промежуточного класса.

Таковы были методологические мотивации. Практические мотивации несколько другие, но связаны с первыми. Если мы рассматриваем нестабильность не как результат внешних катаклизмов, а как внутренний фактор, необходимый экономике по ее природе, подобно давлению (составу) крови в организме, но в отличие от последнего призванного подавлять инвестиционную активность, то мы имеем: а) возможность перераспределять вызванную таким внерыночным механизмом нагрузку, б) можем обсуждать целесообразность управления уровнем нестабильности.

План изложения

Вначале мы строим однопродуктовую (точнее сказать, полуторапродукторую – есть статичный внешний фактор производства) модель инвестиционного цикла при фиксированном параметре, интерпретируемом как риск. Ее мы исследуем численно на предмет выяснения амплитудной характеристики и строим упрощенную модель жесткой системы – системы типа Фитсхью-Нагума, амплитудная характеристика которой имеет простой аналитический вид $\delta(\lambda) \approx A \cdot \sqrt{\lambda_{bif} - \lambda}$, где λ_{bif} – точка бифуркации. Качественное совпадение сравниваемых результатов говорит о том, что мы можем пользоваться этой более простой моделью.

Далее мы прибегаем к феноменологической модели взаимозависимости риска и амплитуды колебаний $\lambda(\delta) = \delta \cdot \varsigma$ (в применении этой феноменологической модели состоит расплата за отказ от анализа стохастических процессов).

Приближенно решение системы $\delta(\lambda) \approx A \cdot \sqrt{\lambda_{bif} - \lambda}$ и $\lambda(\delta) = \delta \cdot \varsigma$ (при $A, \varsigma \to +\infty$, точнее $A \cdot \varsigma >> \sqrt{\lambda_{bif}}$) есть

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_{bif}, \quad \delta = \dfrac{\lambda_{bif}}{\varsigma}, \end{cases}$$

что определяет равновесные нестабильность и риск. Далее приоритетно вычисление риска как наиболее интересного фактора, искажающего общее экономическое равновесие. А оно по счастливому стечению обстоятельств не связано ни с ς ни и с А. Вычисление риска сводится к анализу условий первого порядка для расчета λ_{bif}.

В конце разбирается влияние нестабильности на периферии и ее неограниченный рост на географической границе рентабельности производства.

В численном эксперименте также проверяется еще одна неявно использованная гипотеза, что ввод медленных переменных, а именно – долга, в инвестиционное правило влияет на бифуркацию только через малое смещение долгосрочного равновесия, не вызывая изменение условий первого порядка.

Методологически важные следствия

Наконец из эндогенного характера происхождения нестабильности (волатильности) экономики в нашей интерпретации принципиально следует, что производство нестабильности по сути – процесс, аналогичный производству выбросов. Как и вредные выбросы, нестабильность на кого-то влияет сильнее, на кого-то слабее. Связанные с подобным взаимовлиянием эффекты называются экстерналии. Связаны они обычно с особенностями технологии. «Внетехнологических» экстерналий известно мало. До сих пор едва ли не единственный известный масштабный источник экстерналий такого рода связан со свойственным пространственной экономике гравитационным эффектом[1][5]. Можно говорить о том, что эффект обмена экстерналиями вследствие нелокального влияния нестабильности по распространенности (и возможно, по силе) сопоставим с гравитационным, и является вторым в этом ряду.

Условные обозначения и сокращения, использованные в модели:

i – IRR – внутренняя рентабельность [1/год], определяемая как процентная ставка, обнуляющая NPV: $\mathrm{NPV}(i) = 0$;

p – цена продукта [р/шт];

p_K – цена единицы фондов [р/шт];

p_e – фиксированная цена фактора производства, покупаемого вне рассматриваемого блока [р/шт];

λ – риск [1/год] (определенный как поправка к i);

I – номинальные инвестиции [р/год];

k_p – коэффициент производительности капитала, количество продукта, вырабатываемое единицей фондов [1/год];

d – скорость выбытия капитала [1/год];

Q_{ex}, Q_I – конечный (внешний) и внутренний инвестиционный спрос соответственно [шт/год];

Q_S – предложение, определенное видом функции затрат [шт/год];

$Q_S^{ext} = Q_S - Q_I$ – внешнее предложение [шт/год];

K – объем капитала [шт];

F – финансовый поток [р/год] – доход минус текущие издержки;

h – параметр наклона внешнего спроса;

α_I (или просто α) – физическая доля собственного продукта в инвестициях [1];

[1]Могут поправить, что он связан с особенностями транспортных технологий.

α_C – доля собственного продукта в текущих затратах [1];

β_I (или просто β) – физическая доля импортного продукта в инвестициях [1];

β_C – аналогичная доля внешнего продукта в текущих затратах.

Все коэффициенты меньше 1, причем $\alpha_I + \beta_I < 1$ и $\alpha_C + \beta_C < 1$;

Далее еще потребуются:

δ – амплитуда колебаний рентабельности, отождествляемая с нестабильностью (волатильностью);

ς – коэффициент взаимозависимости риска и амплитуды колебаний (нестабильности) [1];

A – константа приближенного аналитического описания амплитудной характеристики $\delta(\lambda)$ $[1/\sqrt{год}]$.

Основные уравнения модели:

$$\begin{cases} I = F \cdot f(\frac{i}{\lambda}) \\ i = \frac{F}{Kp_K} - d \\ p_K = \alpha_I p + \beta_I p_e \\ Q_I = I / p_K \\ F = Q_S \cdot \min(0; p - (\alpha_C p + \beta_C p_e)) . \\ Q_{ex}(p) = A - h \cdot i(p) \\ \frac{d}{dt} p = \frac{1}{\varepsilon}\left(Q_{ex} + \alpha_I Q_I - Q_S \right) \\ \frac{d}{dt} K = Q_I - dK \\ Q_S = k_p K \cdot I_+(p - (\alpha_C p + \beta_C p_e)). \end{cases} \quad (1)$$

В системе (1) отсутствует уравнение, описывающее динамику ключевого параметра λ. В данном случае внимание сосредоточено на выявлении квазиравновесной величины этого параметра. При этом под I_+ понимается индикаторная функция

$$I_+(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ [0;1], & y = 0, \cdot \\ 1, & y > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Однако определение значения этой функции в точке 0 несколько модифицировано. При $p = \alpha_C p + \beta_C p_e$: обнулении аргумента индикаторной функции (соответствующем работе на уровне текущих издержек) спрос и предложение принимает любое значение от 0 до $k_p \cdot K$. Это значит, что при $p = \alpha_C \cdot p + \beta_C \cdot p_e$, $Q_S = \min\left(k_p K; Q_{ex} + \alpha_I Q_I \right)$. Можно записать $Q_S = \min\left(k_p K; Q_{ex} \right)$, так как инвестиции при работе на уровне окупаемости текущих издержек отсутствуют. Отметим, что не следует путать индикаторную функцию I_+ с переменной инвестиций I.

Пояснения к основным уравнениям системы (1)

$$\dot{p} = \frac{1}{\varepsilon}\left(Q_{ex} + \alpha_I Q_I - Q_S \right) \quad (3)$$

– релаксационное уравнение динамики цен (уравнение Эванса). В правой части разность спроса и предложения; малый положительный параметр ε, отражает, что время изменения цен коротко: уравнение быстрое;

$$F = Q_S \cdot \min(0; p - (\alpha_C p + \beta_C p_e)) \quad (4)$$

– прибыль за вычетом текущих издержек, где $p - (\alpha_C p + \beta_C p_e)$ – прибыль с единицы продукции, $\alpha_C p + \beta_C p_e$ – затраты на текущие факторы, p – цена реализации, Q_S – выпуск;

$$\frac{d}{dt} K = Q_I - dK \quad (5)$$

– уравнение обновления основных фондов: $-dK$ – выбытие основных фондов;

$$p_K = \alpha_I p + \beta_I p_e \quad (6)$$

– цена основных фондов, которые состоят из внешнего фактора ввозимого по не изменяющейся во времени цене p_e и продукта собственного производства; формально, этот как бы не играющий роли фактор полезен в модели, чтобы рентабельность претерпевала изменения;

$Q_I = I / p_K$ – объем текущих инвестиций – отношение финансовых средств I, выделенных на них к текущей цене фондов;

Выпуск равен размеру фондов K, умноженному на их производительность k_p: $Q_S = k_p K$, если финансовый поток положителен; равен нулю, если цена производства не покрывает текущих издержек: $p - (\alpha_C p + \beta_C p_e) < 0$, и любому промежуточному значению, если $p - (\alpha_C p + \beta_C p_e) = 0$:

$$Q_S = k_p K \cdot I_+(p - (\alpha_c p + \beta_c p_e)), \qquad (7)$$

Внешний спрос

$$Q_{ex}(p) = A - h \cdot i(p)\,. \qquad (8)$$

Рентабельность монотонно возрастает по цене. Разумеется, внешние покупатели не интересуются тем, какую рентабельность имеют производители – мы могли бы написать $Q_{ex}(p) = A - \tilde{h} \cdot p$, однако линейный по рентабельности i вид спроса удобнее с точки зрения записи итоговых аналитических выражений для равновесного риска и «равновесной» величины колебаний.

Приведение модели в замкнутую форму

В модели осталось несвязанным с остальными уравнение риска λ, выполняющее одну из ключевых ролей. В данной модели также оставлена без внимания переменная долг. Инвестиционное правило не может игнорировать финансовое состояние (долги), но это выходит за рамки данной статьи – учет финансового положения принципиально ничего не меняет. Для дальнейшего можно ограничиться замечанием, что избежать бесконечного роста долга или в противном случае – роста собственных средств на счетах можно вычитанием или прибавлением правильной константы к $f(\frac{i}{\lambda})$. В данной случае рассмотрена незамкнутая по финансам форма. Вариант модели, в которой производится управление долгом (а инвестиции определены его изменением) содержит так много технических деталей, что возникла необходимость разработать предлагаемую промежуточную модель. Надо отметить, что возникающее в замкнутой модели инвестиционное правило также имеет вид [4] $I = k_0 + k_1 i + k_2 \frac{i}{\lambda}$, а переменные, отражающие финансовое состояние, встроены в коэффициенты k_0, k_1, k_2.

Расчет рентабельности – IRR

По определению NPV:

$$NPV(b) = -p_K K + \int\limits_{R_+} e^{-d\tau} F e^{-b\tau} d\tau \qquad (9)$$

– инвестиция минус дисконтированный денежный поток $e^{-d\tau}F$, выбывающий со скоростью d, b – банковская ставка процента. В нашем случае имеем

$$NPV(b) = -p_K K + \frac{F}{d+b}\,. \qquad (10)$$

IRR корень уравнения $NPV(i) = 0$:

$$p_K K = \frac{F}{d+i}$$

или

$$i = \frac{F}{Kp_K} - d\,. \qquad (11)$$

Объяснение инвестиционного правила

В основе модели положено инвестиционное правило, в общем виде зависящее от «произведения» дохода за вычетом текущих издержек $F: F = p_K K(i+d)$ (следует из определения IRR) и функции $f(\frac{i}{\lambda})$ безразмерного параметра $\frac{i}{\lambda}$, где числитель имеет значение рентабельности IRR, а знаменатель может трактоваться как риск; $f(\frac{i}{\lambda})$ – (положительная) возрастающая функция.

Функция в 0 имеет значение $f(0)$ и производную $f^{/}(0)$ порядка 1. Для анализа условий первого порядка этого достаточно, однако численное моделирование вынуждает наложить некоторые дополнительные нелокальные условия. Рост рентабельности, очевидно, приводит к росту инвестиций. Конечно, если рентабельность меняется незначительно, инвестиции не могут значительно измениться. Возникает вопрос: какие изменения рентабельности можно считать достаточно значительными? Предлагается рассматривать как близкие рентабельности, отличающиеся на величину меньше риска: этому соответствует изменение аргумента $f(\ )$ - $\frac{i}{\lambda}$ на единицу.

Из выполненного расчета рентабельности $i = \frac{F}{Kp_K} - d$. Номинальные инвестиции обозначим I, а реальные Q_I. Тогда из денежных инвестиций $I = F(i) f(\frac{i}{\lambda})$ следует реальный объем $Q_I = K(i+d) f(\frac{i}{\lambda})$, идущий на восполнение фондов. Локальным условиям на $f(\cdot)$ удовлетворяет $f(\frac{i}{\lambda})=1+\frac{i}{\lambda}$.

Нелокальные условия состоят в том, что разность спроса и предложения при $p\to+\infty$ должна быть отрицательной. В предположении $\lim\limits_{p\to\infty} Q_{ex}(p)=0$ это значит, что инвестиционный спрос не должен превзойти выпуск (за вычетом текущего потребления). К сожалению, если даже мы допустим $f\equiv 1$ простое полное реинвестирование (при не слишком малых $i\geq -d$), указанная разность будет стремиться к 0 и может быть «равновесие» $p=+\infty$. $f()$ неотрицательна и имеет насыщение на бесконечности. Чтобы получить гарантии отсутствия равновесия на $+\infty$, требуется либо разрешить отрицательный внешний спрос при большом *p*, который можно интерпретировать как импорт, либо необходимо преобразовать $Q_I=K(i+d)(1+\frac{i}{\lambda})$ в $Q_I=Kd+z\left[K(i+d\frac{i}{\lambda})\right]$ (член $\frac{i}{\lambda}i$ отбросить или сохранить можно по усмотрению).

Если применить преобразование

$$z(x)=\psi\cdot\mathrm{th}\left(\psi^{-1}x\right),$$

где $\mathrm{th}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, то в предположении $\lim\limits_{p\to\infty} Q_{ex}(p)=0$ это гарантирует отсутствие формальных проблем. Несоблюдение же этого условия может вести к отсутствию верхнего ценового равновесия, когда в какой-то момент цены устремляются в бесконечность.

При практическом численном расчете к хорошим результатам может вести аналогичное преобразование:

$$f(\frac{i}{\lambda})=1+\psi\cdot\mathrm{th}\left(\frac{i}{\lambda}\psi^{-1}\right)$$

или

$$f(\frac{i}{\lambda})=1+\hat{\psi}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{i}{\lambda}\hat{\psi}^{-1}\right).$$

При этом в обоих случаях ψ не должно быть слишком малым (иначе вводимая ниже амплитудная характеристика будет иметь насыщение на нереалистично низком уровне).

Если проигнорировать эту проблему, то коэффициент ψ не играет никакой роли и точно не будет важен при анализе условий первого порядка, так что в первом порядке мы возвращаемся к виду $f(\frac{i}{\lambda})=1+\frac{i}{\lambda}$, тогда физический объем инвестиционных вложений

$$Q_I=K(i+d)(1+\frac{i}{\lambda})$$

или

$$Q_I\cong dK(1+\frac{i}{d})(1+\frac{i}{\lambda}), \qquad (12)$$

$$Q_I\cong dK(1+\frac{i}{d}+\frac{i}{\lambda}+\frac{i^2}{d\lambda}), \qquad (13)$$

откуда следует разложение для членов до первого порядка по i:

$$Q_I(i)\approx dK+dK(\frac{i}{d}+\frac{i}{\lambda}), \qquad (14)$$

где $Q_i^0=Kd$ – уровень простого воспроизводства фондов.

Зависимость IRR от цены

Для дальнейшего важно, что, пользуясь вытекающим из системы (1) в силу $F=Q_S(p-(\alpha_C p+\beta_C p_e))$ и $Q_S=k_p K$ при $p-(\alpha_C p+\beta_C p_e)>0$ равенством

$$F=k_p K(p-(\alpha_C p+\beta_C p_e))$$

или

$$p_K K(i+d)=k_p K(p-(\alpha_C p+\beta_C p_e))$$

теперь удается связать цены и рентабельности:

$$i=-d+\frac{p-(\alpha_C p+\beta_C p_e)}{\alpha_I p+\beta_I p_e}k_p. \qquad (15)$$

В последнем выражении цена капитала p_K представлена как $\alpha\ p+\beta_I p_e$. При $p\geq 0$ i – возрастающая функция: она представима как $-\frac{r_1}{p+r_2}+r_3$, константы r_1, r_2 положительны.

Быстро наступающее на рынке текущее ценовое равновесие описывается равенством нулю трехкомпонентного баланса, в который помимо описанных инвестиций входят леонтьевское предложение – «уголок» Q_S (рис. 1) , а также монотонно убывающий спрос, изображенный прямой. Для наглядности, а также чтобы остаться в привычной парадигме точек пересечения спроса и предложения, из леонтьевского предложения вычтен описанный выше инвестиционный спрос Q_S-Q_I, в результате получена кривая внешнего предложения. Она немонотонна, если считать аргументом ось p, и неоднозначна, если аргументом считать объем поставляемого из системы продукта Q_S^{ext}. В зависимости от бифуркационного параметра в рабочем режиме она пересекается с кривой спроса в одном или трех местах (рис. 1).

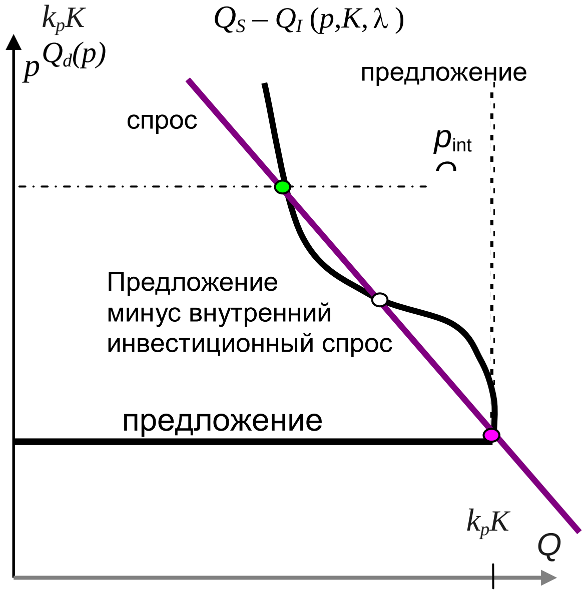

Рис. 1. Бистабильная система рыночного равновесия: изображены кривые спроса (отрицательного наклона прямая), леонтьевская функция затрат / текущего предложения Q_S и $Q_S - Q_I$ – предложение за вычетом инвестиций. При достаточно большом коэффициенте чувствительности к рентабельности $k = \lambda^{-1}$ при равновесном капитале K система всегда может иметь несколько равновесий

В силу этого модель при фиксированных в коротком времени фондах может переходить в одно из нескольких состояний. Верхнее и нижнее равновесия этой модели устойчивы и интерпретируются как кризис и рост. Среднее состояние неустойчиво и служит границей бассейнов притяжения верхнего и нижнего равновесия.

Каждый элемент разности $Q_S - Q_I$ пропорционален K, т. е. с изменением объема фондов не меняется форма кривой внешнего предложения, она просто сжимается и растягивается по горизонтали. Если для каждого K вычислять равновесия и отмечать устойчивые темными точками сплошной линии, а неустойчивые кружками – пунктиром, получится S-образная кривая – главная изоклина быстрого уравнения, изображенная на рис. 2. Нижний участок на рис. 2 частично горизонтален ввиду того, что при очень больших основных фондах цены всегда находятся на уровне ткущих издержек: $p = \alpha_C p + \beta_C p_e$. Если разделяющая область роста и спада фондов K прямая расположена также как на рис. 2, т. е. пересекает ее по неустойчивой ветви, то возникает, изображенный угловатой замкнутой кривой предельный цикл. Эта ситуация имеет место не всегда – только при малых λ.

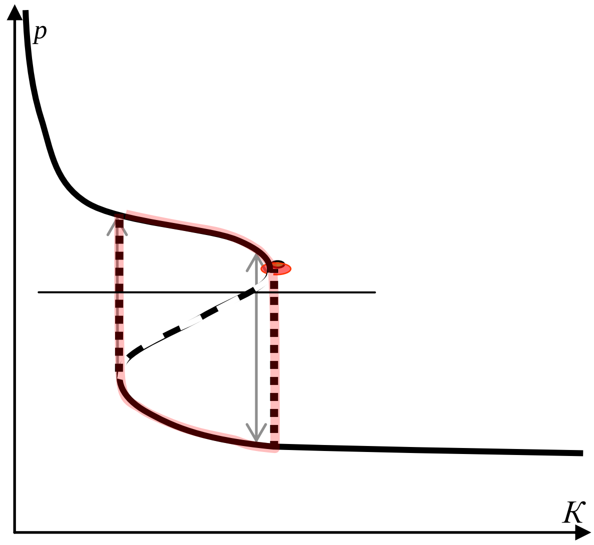

Рис. 2. Инвестиционный предельный цикл для конкретного λ в p, K-координатах

Переход по λ от моностабильности к бистабильности (рис. 2) в симметричном случае является переходом Кюри II рода (сборка). В отсутствии симметрии при переходе первого рода эффект будет сильнее – это мы считаем аргументом в пользу рассмотрения перехода II рода, так как в более жестком случае все результаты унаследуются. С другой стороны, на рынке в подавляющем большинстве случаев или весьма часто имеет место симметрия относительно изменения направления цен вниз и вверх – это является дополнительным аргументом, (только в части амплитудной характеристики) который позволяет, не ограничивая общности в указанном выше смысле, строить изложение для случая фазового перехода II рода – сборки, а не складки. При этом управляющим параметром (фазового перехода) являются обратные риски и эластичность – уровень наклона кривой внешнего спроса.

В трехмерных K, λ, p -координатах картинка должна иметь колоколообразный вид (рис. 3), что воспроизведено в численном моделировании для систем (1) (рис. 5–6) и система (16)

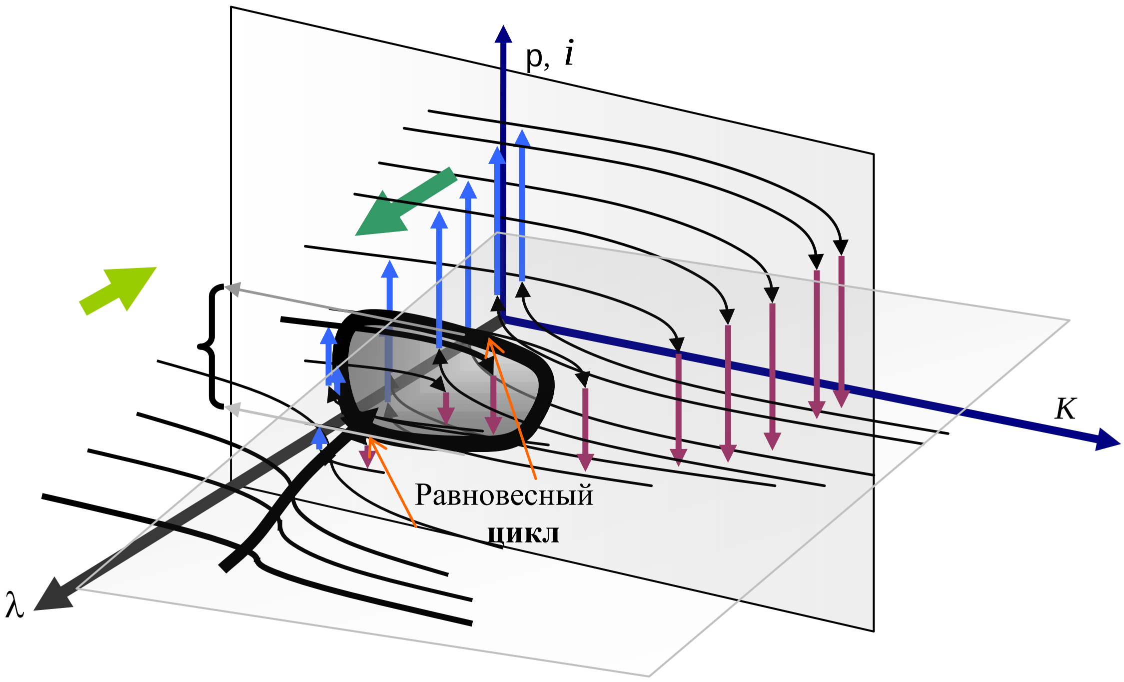

Рис. 3. Система жестких предельных циклов: при малых λ, размер которых по мере роста осторожности падает и при некотором конечном λ сжимается в точку. Жирным выделена петля «равновесного цикла» той амплитуды δ, при который порождается риск λ(δ), равный параметру цикла λ

(рис. 4, *г*) (видно хуже из-за неудачной проекции на плоскость p, K).

Численное моделирование

При численном моделировании мы не скованы размерностью пространства, поэтому произведен расчет реалистичной системы, где инвесторы негативно реагируют на долг $I = F\cdot(1+\frac{i}{\lambda}-k_D\cdot D)$, сам долг меняется по закону $dD/dt = bD + I - F$. Из соображений удобства процентную ставку b положили равной нулю, в результате получили $dD/dt = I - F$ и систему третьего порядка:

Разброс рентабельности δ

$$\begin{cases} I = F\cdot(1+\frac{i}{\lambda}-0{,}8\cdot D), \quad i = \frac{F}{Kp_K}-d, \\ \frac{d}{dt}K = Q_I - dK, \quad p_K = \alpha_I p + \beta_I p_e, \\ Q_I = I/p_K, \quad F = Q_S\cdot\min(0; p-(\alpha_c p+\beta_c p_e)), \\ Q_{ex}(p) = 10/p, \quad Q_S = k_p K\cdot I_+(p-(\alpha_c p+\beta_c p_e)), \\ \frac{d}{dt}p = \frac{1}{\varepsilon}\left(Q_{ex}+\alpha_I Q_I - Q_S\right), \quad \frac{d}{dt}D = I - F; \end{cases} \tag{16}$$

$\alpha_I = 0{,}4;\quad \beta_I = 0{,}2;\quad \alpha_c = 0;\quad \beta_c = 0{,}64;$

$d = 0{,}5;\quad p_e = 1;\quad k_D = 0{,}8;\quad k_p = 1.$

Исключение зависимости от долга сдвигает точку бифуркации на 0.07 вверх по λ к $\lambda = 0{,}7$, таким образом, отсутствует значимая зависимость бифуркации в быстрой подсистеме от медленной переменной – долга.

Аналогичные графики для системы без долга приводятся на рис. 5–6.

Бросается в глаза изменение положения серии предельных циклов. Рис. 5 интересен тем, что он напоминает рис. 3. Аналогичный рис. 4, *г* показывает качественно похожую 3D-картинку, но несколько в ином ракурсе, так что ее трудно узнать в проекции на плоскость p, K.

Объяснение результатов имитационного моделирования

При изучении бифуркаций акцентируются на основных чертах, таких как количество равновесий, и пренебрегают вторичными «особенностями» вида задающей векторное поле функции: работая с *S*-образным векторным полем принято аппроксимировать последнее кубической параболой. Уравнение системы с мягкой одномерной бифуркацией может быть записано в виде $\dot{p} = p\chi - p^3$. При $\chi < 0$ равновесие $p = 0$ устойчиво и единственно. С ростом параметра

χ, после $\chi = 0$ от него «отскакивают» два устойчивых корня $p = \pm\sqrt{\chi}$.

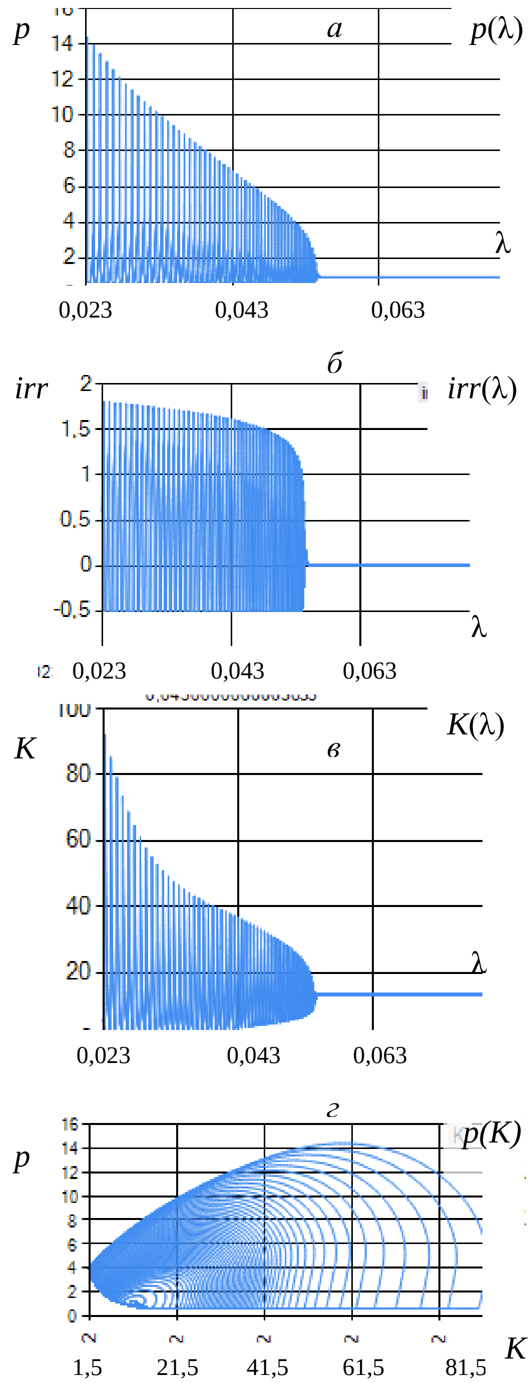

Рис. 4. На графиках: *а* – цена; *б* – рентабельность; *в* – капитал в зависимости от риска. Бифуркация при риске $\lambda = 0{,}53$. На последнем (*г*) графике эволюция предельного цикла – координаты цена-капитал – в зависимости от риска

Приблизим систему к нашей, для чего усложним ее:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{p} = p\chi - p^3 + (1-K), \\ \dot{K} = pK. \end{cases} \tag{17}$$

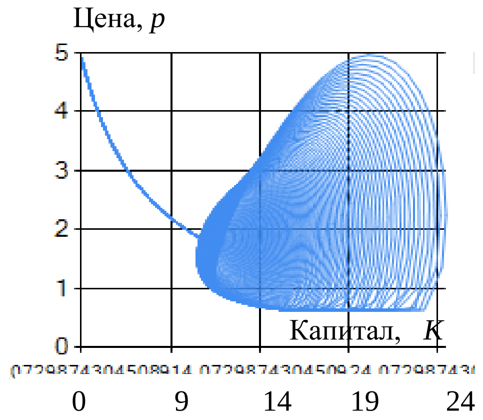

Рис. 5. Результат численного моделирования (1) – проекция на (K, p) координаты при адиабатически медленно меняющемся λ

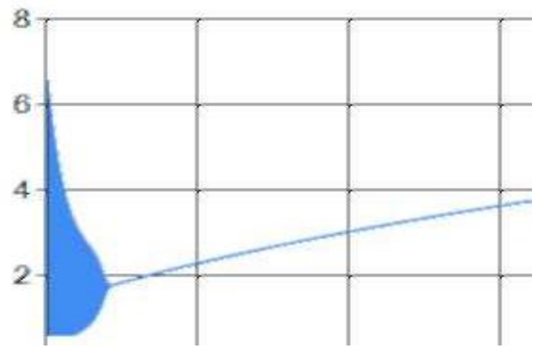

Рис. 6. Результат имитационного моделирования по системе (1), зависимость $p(\lambda)$. Амплитуда колебаний долгое время равна 0, потом резко растет с падением λ

В этой системе при $\chi > 0$ рождается цикл, заключенный между крайними значениями $p = \pm 2\sqrt{\chi/3}$. Важно, что его диаметр Δ пропорционален $\sqrt{\chi}$.

В реальности часто имеет место жесткая бифуркация

$$\begin{cases} \varepsilon\,\dot{p} = p\chi - p^3 + (1-K), \\ \dot{K} = (p - p_0)K, \end{cases} \quad p_0 > 0. \tag{18}$$

Тогда цикл рождается скачком. Это происходит позже – при $\chi = 3p_0^2$ (рис. 7), однако далее его диаметр описывается той же зависимостью. В обоих случаях это происходит в момент, когда векторное поле быстрой переменной – цены – в одном из равновесий приобретает нулевую производную по цене (становится горизонтальным).

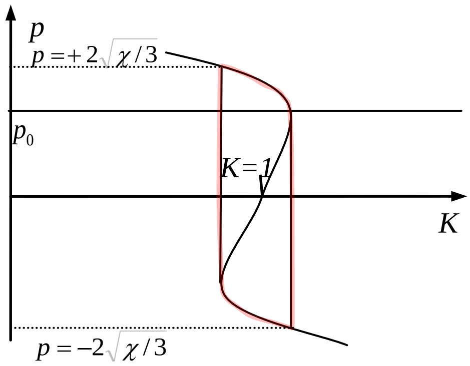

Рис. 7. Первый момент рождения предельного цикла – горизонтальная изоклина основных (производственных) фондов пересекает в точке слияния равновесий быстрой изоклины

В реальности нуль цены лежит значительно ниже: в результате замены вида $p \to p + \text{const}$ для удобства и наглядности примера цены в нем мы отсчитываем от некого произвольного уровня, но нам это не важно, так как нас интересует амплитуда колебаний. Соответствующая амплитудная характеристика имеет вид, показанный на рис. 8.

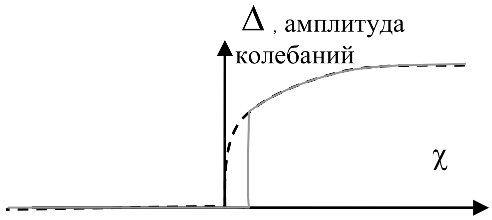

Рис. 8. Амплитудная характеристика модельной системы. Случай мягкой (черная пунктирная) и жесткой (серая непрерывная линия) бифуркаций

В нашем случае амплитудная характеристика от λ имеет обратный (инвертированный) вид: управляющий параметр бифуркации $\chi = \vartheta(\lambda)$ является убывающей гладкой функцией λ $\frac{d}{d\lambda}\vartheta(\lambda) \le 0$, а динамической быстрой переменной выступает однозначно связанная с ценой p рентабельность i

$$\begin{cases} \varepsilon \cdot \dot{i} = i\vartheta(\lambda) - i^3 + (1-K), \\ \dot{K} = iK. \end{cases} \tag{19}$$

Равенство нулю значения и производной в окрестности равновесия позволит нам найти бифуркационное значение λ.

Точку бифуркации мы ищем по условиям первого порядка, приравнивая производную в равновесии нулю.

Рис. 9. Амплитудные характеристики систем различных типов: пунктирная линия – амплитудная характеристика симметричной системы при мягкой бифуркации; непрерывная – при рождении цикла скачком

Результат, показанный на рис. 6, получен исходя из того, что долгосрочное равновесие близко к нулю IRR, условие первого порядка применено в точке $i = 0$.

Коэффициент риска λ в системе (1) никак не определен, но очевидно, что при малой нестабильности риск отсутствует и λ=0. С ростом нестабильности δ, которую определить как амплитуду колебаний рентабельности, растет риск $\lambda(\delta)$. Например в CAPM принято считать, что риск пропорционален среднеквадратичному отклонению доходности (рентабельности). Его аналогом является амплитуда δ, поэтому феноменологически запишем, что $\lambda(\delta) = \varsigma \cdot \delta$, где ς – безразмерный (числовой) коэффициент.

В результате имеем систему

$$\begin{cases} \delta = A \cdot \max(0; \lambda_{bif} - \lambda)^{\frac{1}{2}}, \\ \lambda = \varsigma \cdot \delta, \end{cases} \tag{20}$$

A – амплитудный коэффициент, $A > 0$. При $A, \varsigma \to +\infty$, точнее при $A \cdot \varsigma >> \sqrt{\lambda_{bif}}$, решением ее является единственная точка:

$$\begin{cases} \lambda = \lambda_{bif}, \\ \delta = \dfrac{\lambda_{bif}}{\varsigma}. \end{cases}$$

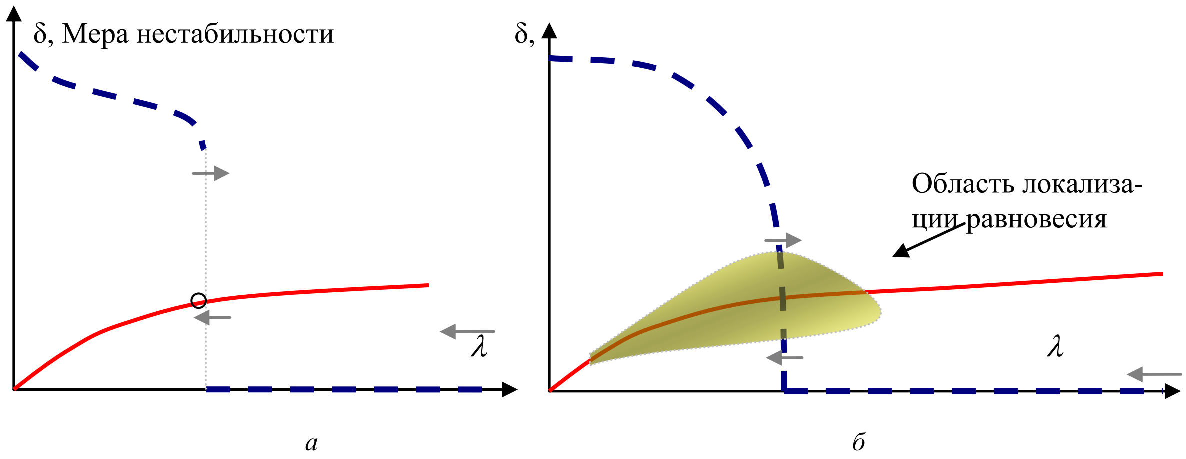

Рис. 10. Предельные циклы:
а – предельный цикл, образующийся скачком; *б* – плавно образующийся предельный цикл

Динамический вариант может быть сформулирован в виде дискретного отображения

$$\begin{cases} \delta_n = A\cdot\max(0;\lambda_{bif}-\lambda_n)^{\frac{1}{2}}, \\ \lambda_{n+1}=\varsigma\cdot\delta_n. \end{cases}$$

Оно сводится к одномерноному:

$$\lambda_{n+1}=\varsigma\cdot A\cdot\max(0;\lambda_{bif}-\lambda_n)^{\frac{1}{2}}.$$

При нулевых рисках имеем нулевую температуру «δ_n» и риск λ_n, что означает конечную (ненулевую) нестабильность цен δ_{n+1}, что порождает риск λ_{n+1}, который можно считать линейной функцией (прямой пропорциональностью от вариаций рентабельности) – кривая реакции риска на нестабильность. Предполагая, что пересечение происходит по вертикальному участку стандартной бифуркационной диаграммы сборка в координатах нестабильность Δ – риск λ, получаем нетривиальное равновесие на пересечении корнеподобной пунктирной линии бифуркационной диаграммы и возрастающей сплошной «прямой» линии риска (рис. 10, *б*).

Предваряя вывод, отметим не совсем очевидный результат, что в режиме критической динамики формируется отрицательная связь фондов и безрисковой доходности в силу того, что режимы с низким риском лежат ниже (запрещенная область – рис. 12).

$$\lambda=\frac{Q_I d\alpha_I}{dh-Q_I\alpha_I} \qquad (21)$$

– граница устойчивости, определяется сильно возрастающим с ростом удельных инвестиций минимально допустимым риском.

Здесь d – выбытие, Q_I – инвестиции и h – коэффициент разложения внешнего спроса $Q_D^E=Q_E^0-ih+o(i\ )$ по рентабельности, являющейся взаимнооднозначной функцией внутренней цены, α_I – та «физическая» доля инвестиций, которая закупается внутри экономики.

Условие срыва с верхнего равновесия – динамической бифуркации – есть касание кривых спроса и предложения – помимо пересечения это требует равенства производных или, в более общем случае, равенства нулю производной разности спроса и предложения.

$$\frac{d}{dy}(Q_D^E-Q_S+\alpha_I Q_I)=0,$$

где под y в зависимости от ситуации будем понимать цену или рентабельность.

Рассмотрим это условие подробнее, считая, что условие пересечения выполнено, причем это все имеет место в точке, близкой к нулю рентабельности[2]. В случае предельно жесткой функции (вертикальной) предложения ее производная исчезает, и условием тождественного равенства, точнее касания, спроса и предложения становится равенство производных внешнего спроса и внешнего предложения, в котором при дифференцировании остается производная инвестиционного предложения

$$-ih=-d\alpha_I K(\frac{i}{d}+\frac{i}{\lambda}).$$

---

[2] А также, что уровень наклона всех кривых достаточно слабо меняется при отклонении от нуля рентабельности.

Условие устойчивости есть неравенство $-ih \geq -\alpha_I dK(\frac{i}{d}+\frac{i}{\lambda})$ ($i > 0$) или $-h \leq -dK\alpha_I(\frac{1}{d}+\frac{1}{\lambda})$.

Преобразуя это неравенство, получаем

$$h \geq K \cdot \alpha_I \cdot (1+\frac{d}{\lambda}),\ \lambda \geq \frac{K\alpha_I}{h-K\alpha_I} \cdot d \cdot \qquad (22)$$

Формулу $\lambda \geq \frac{K\alpha_I}{h-K\alpha_I} \cdot d$ легко модифицировать, если исходное предложение имеет вид $Q = Kg(i)$, где $g(i)$ – произвольная возрастающая функция (которая в силу закона убывающей отдачи выпукла вниз). Тогда условие устойчивости чуть-чуть преобразуется:

$$ih + Kg'i \leq dK(\frac{i}{d}+\frac{i}{\lambda}),$$

где $g' = \frac{d}{di}g(i)$.

Окончательно

$$\lambda \geq \frac{K\alpha_I}{h-K\alpha_I(1-g')} \cdot d \cdot \qquad (23)$$

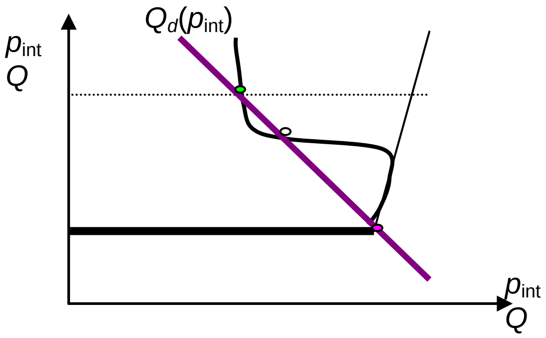

Рис. 11. Картина компонент спроса и предложения для эластичной кривой затрат: при благоприятных условиях $g' > 1$ знаменатель – всегда возрастающая положительная функция: $\lim_{K\to\infty} \lambda = \frac{d}{g'-1}$. В этом случае риск конечен

Параметр g' отвечает за долю рыночных инвестиций в ВВП и качество стабилизационной политики. Параметр g' велик, если доля инвестиций мала. Функция предложения при этом близка к константе, а ее обратная производная пропорциональна g'.

На рис. 12 над кривой $\frac{1}{\lambda} = \frac{h}{Kd\alpha_I} - \frac{1}{d}$ находится область допустимых состояний;

$$\lambda \geq \frac{1}{\frac{h}{dK\alpha_I} - \frac{1}{d}}$$

– зона устойчивости верхней медленной поверхности для модели инвестиционного кризиса. Светлым пунктиром показана граница производительности экономики.

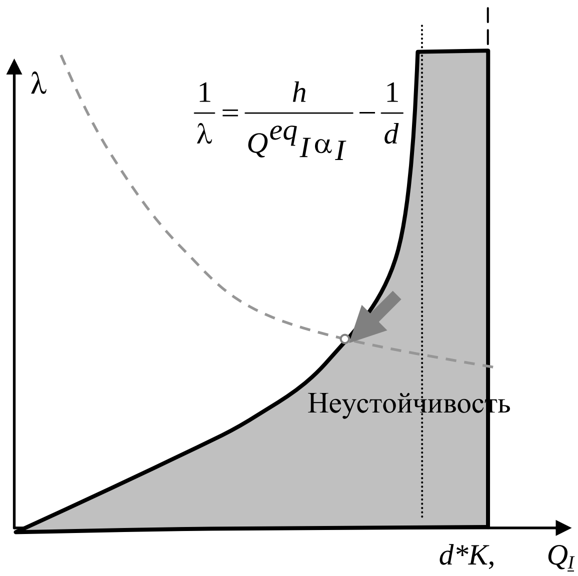

Рис. 12. Область допустимых состояний экономики

Экономика движется по описывающей зависимость рентабельности от капитала пунктирной линии вправо-вниз и стремится пребывать на нижней правой границе допустимой области; останавливается она только на границе срыва. Нахождение в верхнем равновесии у края его устойчивости по параметру при крайне мелком бассейне притяжения на практике порождает элементы динамики, похожие на некоррелированные винеровские блуждания.

При изображенной на рис. 10, *а* скачкообразной характеристике λ(δ) картину придется модифицировать. Формально можно говорить, что система с какой-то вероятностью пребывает справа от точки разрыва, с какой-то – слева. Величина вероятности пребывания слева определяется высотой графика зависимости риска от амплитуды δ: λ(δ) (сплошная линия, рис. 10, *а*).

Мультирегиональная модель

В предыдущих разделах использована гипотеза одинакового положения всех игроков. Отказ от нее помимо дополнительных трудностей позволяет получить самостоятельные принципиально важные следствия.

Ранее использованы представления:

$$\delta = \mu \cdot \Delta p,\ \lambda = \varsigma\delta,$$

откуда

$$\lambda = \mu\varsigma \cdot \Delta p. \quad (24)$$

Коэффициенты μ и ς ранее не рассматривались, ибо они не входили в ответ. Предположим, что существует мировой рынок единого товара, представляющего агрегат части товаров, являющихся предметом трансграничной торговли. На мировом рынке присутствует единая цена p. Если ее изменения одинаковы и синхронны в каждой части мирового рынка, то это приводит к одинаковому уровню ценовой нестабильности Δp для всех игроков.

Коэффициент ζ связан с финансовой устойчивостью. Он, безусловно, меньше[3] у транснациональных корпораций.

Коэффициент μ может зависеть от разности мировых цен и текущих (полных) издержек (на самом деле он зависит от технологии и, при наличии данных, может быть непосредственно рассчитан).

Расчет μ

С точностью до константы

$$\mu = \frac{1}{p - p_C},$$

где p – уровень цен, а p_C – уровень текущих издержек с учетом транспортировки до «экономического центра»[4]. Обоснуем эту формулу.

В феноменологических моделях часто предполагается, что риск пропорционален изменению стоимости актива, точнее, изменению логарифма стоимости. Изучим колебание финансового состояния предприятия – разность активов и долгов:

$$S = A - D.$$

Для актива со скоростью выбытия d оценка NPV:

$$A = \frac{F}{b+d},$$

где F – денежный поток, b – процент, в случае актива бесконечного пользования верна $A = \frac{F}{b}$ – отношение денежного потока к процентной ставке. Можно было использовать другие формулы безрисковой оценки активов, если итоговая оценка пропорциональна F, приведенный нами вывод не меняется:

$$A(t) = A_0 \frac{F(t)}{F_0},$$

где F_0 – средняя величина денежного потока, A_0 – средняя величина оценки физических активов (в ответе мы опустим индекс 0).

С точностью до коэффициента риск собственного капитала описывает логарифмическая производная S:

$$\lambda \sim \frac{d}{dp} \ln S,$$

предполагая $dp = k \cdot dF$, k – коэффициент пропорциональности,

$$\lambda \sim \frac{d}{dF} \ln S = \frac{d}{dF} \ln\left\{A\frac{F}{F_0} - D\right\} = \frac{\frac{A}{F_0}}{A\frac{F}{F_0} - D} = \frac{A}{S} \cdot \frac{1}{F_0} = \frac{1}{F_0} l,$$[5]

и $\lambda \sim \frac{1}{F_0} l$, где $l = \frac{A}{S}$ – кредитный рычаг.

Если, как и ранее, с точностью до константы $F \sim p - p_C$, то $\lambda_C \sim \frac{1}{p - p_C} l$, что означает стремление риска к бесконечности при $p_c \to p$.

При отклонении зависимости от $F \sim p - p_c$ формулы будут отличаться и это изменит соответствующим образом последующие формулы, в т. ч. если мы столкнемся с функцией Коба–Дугласа, то $F \sim (p - p_C)^{\vartheta}$, где p_c – издержки транспортировки конечного продукта (см. ниже). Мы, имея целью проиллюстрировать качественные закономерности, будем далее придерживаться самого простого варианта

$$F \sim p - p_C.$$

Для того чтобы вычислить риск в расчете на физический капитал, надо поделить λ_C – риск собственного капитала – на рычаг l. Имеем $\lambda \sim \frac{1}{p - p_c}$ и, для удобства отправив нормировочную константу в ς, впредь будем просто писать $\mu = \frac{1}{p - p_C}$ (вид $\mu = \frac{\eta}{p - p_C}$ все же принципиально полезен, т. к. исходно μ обязан иметь размерность [рентабельность/цена]).

Также приближенно можно считать что при изменении цены от околоравновесного p до p_C

---

[3] Что предпочтительно для этих отдельных фирм.

[4] Транспорт играет решающую роль в издержках.

[5] Можно было использовать другие формулы безрисковой оценки активов, где итоговая оценка пропорциональна F, например $A = \frac{F}{b+d}$ (вместо $A = \frac{F}{b}$) – приведенный нами вывод не меняется.

рентабельность меняется от 0 (точнее рентабельность должна компенсировать риск λ) до $-d$, т. е. оценочно

$$\frac{di}{dp} \approx \frac{d}{p-p_C} \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{d \cdot \varsigma \cdot (\Delta p)}{p-p_C}.$$

Неточный характер вычисления $\frac{di}{dp}$ можно учесть поправкой ϑ близкой к 1: $\frac{di}{dp} = \frac{\vartheta d}{p-p_C}$ и $\lambda = \vartheta \frac{d \cdot \varsigma \cdot (\Delta p)}{p-p_C}$.

Расчет риска для неоднородной экономической системы

Напишем условие $\frac{d}{dy}(Q_D^E - Q_S + \alpha_I Q_I) = 0$, где Q_D^E – внешний спрос, Q_S и Q_I – сумма вклада разных производителей в соответствующие компоненты:

$$Q_S = \sum K_m \tilde{g}_m(p),$$

$$Q_I \cong \sum_m \alpha_{I_m} K_m \cdot (1 + \frac{d}{\lambda_m}) \cdot i_m.$$

Разные производители имеют различные издержки и разные рентабельности, поэтому нам необходимо вернуться к универсальной для всех цене p:

$$\frac{d}{dp}(Q_D^E - Q_S + \alpha_I Q_I) = 0.$$

Имеет смысл ввести показатель $\tilde{h} = \frac{d}{dp} Q$.

Для разнородной экономики имеем

$$\tilde{h} + \sum K_m \tilde{g}'_m = \sum \alpha_{I_m} K_m (1 + \frac{d}{\lambda_m}) \frac{di_m}{dp},$$

где $\tilde{g}' = \frac{d}{dp}\tilde{g}(p)$, а производная рентабельности по цене $\frac{di_m}{dp} \approx \frac{\vartheta d}{p-p_C}$,

$$\tilde{h} + \sum K_m \tilde{g}'_m = \sum \alpha_{I_m} K_m (1 + \frac{d}{\lambda_m}) \frac{\vartheta \cdot d}{p-p_{Cm}}.$$

Подставим сюда $\lambda = \vartheta \cdot d \frac{\varsigma \cdot \Delta p}{p-p_C}$.

$$\tilde{h} + \sum K_m \tilde{g}'_m = \sum \alpha_{I_m} K_m (1 + (p-p_{Cm}) \frac{d}{\vartheta \varsigma_m \cdot d \cdot \Delta p}) \vartheta \frac{d}{p-p_{Cm}}$$

или

$$\tilde{h} + \sum K_m \tilde{g}'_m - \sum \alpha_{I_m} K_m \cdot d \cdot \vartheta \cdot \frac{1}{p-p_{C_m}} =$$

$$= \frac{1}{\Delta p} \sum \alpha_{I_m} K_m \cdot d \cdot \vartheta \cdot \frac{1}{\varsigma_m}$$

и нестабильность мировых цен – она имеет смысл нормирования:

$$\Delta p = \frac{\sum_m \alpha_{I_m} K_m \cdot d \cdot \vartheta \cdot \frac{1}{\varsigma_m}}{\tilde{h} + \sum_m K_m \tilde{g}'_m - \sum_m \alpha_{I_m} K_m \cdot d \cdot \vartheta \cdot \frac{1}{p-p_{C_m}}}.$$

Теперь, зная нормировку Δp, найдем риск в r-м регионе. Одновременно мы избавимся от плохо наблюдаемой амплитуды или волатильности Δp:

$$\lambda_r = \vartheta \frac{d \cdot \varsigma_r}{p-p_{Cr}} \frac{\sum_m \alpha_{I_m} K_m \cdot d \cdot \vartheta \cdot \frac{1}{\varsigma_m}}{\tilde{h} + \sum_m K_m \tilde{g}'_m - \sum_m \alpha_{I_m} K_m \cdot d \cdot \vartheta \cdot \frac{1}{p-p_{C_m}}}.$$

Внося конкретные предположения относительно множества технологий и внешнего спроса, можно рассчитать $p, \tilde{h}, K_m, \tilde{g}_m(p)$ и $\tilde{g}_m{}'$ и оценить искажения общего равновесия под действием риска.

Все фирмы и государства вносят вклад в общую нестабильность на мировом рынке Δp. Однако в силу разных географических, климатических технологических особенностей запас окупаемости $p - p_c$ и определяемая им чувствительность к изменению цен μ для всех разная[6], разным будет эффект в виде учтенного в рентабельности и в процентной ставке риска λ_r.

Для России (рис. 13) $\mu \, и \, \lambda \to \infty$ в мере стремления к 0 запаса окупаемости $(p - p_c) \to 0$.

Можно следовать следующему представлению, имеющему яркое подтверждение в истории и хорошо описывающему реальность. Пусть у нас имеется центральная область массового спроса и широкая периферия практически нулевых зарплат, поставляющая товар в первую об-

[6] Финансовый сектор экономики может действовать в интересах отдельных фирм, уменьшая их посредством ς_r, что служит основой для объективной оценки стоимости его услуг. Также может быть оценена его ценность для экономики конкретной открытой страны, меняется ситуация только для замкнутой системы – если все коэффициенты уменьшатся или увеличатся в одинаковое число раз, это никак не повлияет на реальные параметры экономики и встречаемые предприятиями в ней риски.

ласть равномерно с каждой единицы площади. В эпоху городов-государств центральная область сводилась в точку. В таком случае – более удобном для исследования – затраты на транспортировку p_c пропорциональны расстоянию x: $p_c = u \cdot x$, а цена предложения взаимосвязана с ценой транспортировки до последнего, самого удаленного рентабельного участка: $p = u \cdot x_{Max}$. Так как в плоской ситуации объем производства Q пропорционален квадрату расстояния: $Q \sim x^2$, то описывается квадратным корнем от площади рентабельного производства или от суммарного выпуска: $x \sim \sqrt{Q}$. $p = \kappa\sqrt{Q}$ (рис. 13).

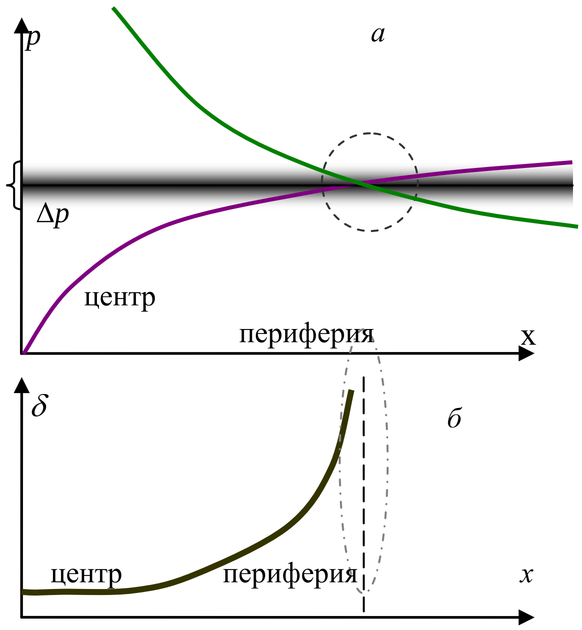

Рис. 13. Распределение параметров в пространстве: *а* – функция издержек; *б* – разброс рентабельности (бесконечный рост величины разброса и/или ее чувствительности к мировым колебаниям цен)

В более сложном случае могла быть другая монотонная (возрастающая) функция объема p_S(Q). Для современности центральная зона массового спроса теперь не стянута в точку, а напротив, представляет распределенную область, это может быть сигмой с точкой перегиба на границе области массового спроса, переходящий на большом удалении от центра в квадратный корень.

Для запаса рентабельности имеет место формула

$$p - p_{c_x} = u \cdot (x_{Max} - x).$$

Чувствительность $\mu \sim \frac{1}{x_{Max} - x}$ и риск в регионе, расположенном на удалении x

$$\lambda\ (x) = \vartheta \frac{d \cdot \varsigma_r}{u \cdot (x_{Max} - x)} \times$$

$$\times \frac{\sum_m \alpha_{I\,m} K_m \cdot d \cdot \vartheta \cdot \frac{1}{\varsigma_m}}{\tilde{h} + \sum_m K_m \tilde{g}'_m - \sum_m \alpha_{I\,m} K_m \cdot d \cdot \vartheta \cdot \frac{1}{u \cdot (x_{Max} - x_m)}}.$$

С точки зрения теории в рамках управления рисками экономические агенты периферии вынуждены либо понижать рычаг, снижая доходность собственного капитала, либо (ограничивая инвестиции и вывозя за границу излишки капитала) обеспечивать более высокую норму доходности на единицу физического капитала. В условиях выравнивания доходности собственного капитала (участвующего в трансграничных перетоках) должно происходить второе: доходность на физический капитал должна повышаться, т. к. произведение кредитного рычага и рентабельности остается константой. Это повышение возможно за счет доходов менее мобильных участников экономического процесса – в первую очередь рабочих.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория рыночной экономики в либеральном издании, начиная с А. Смита, явно и неявно исходила из некоторых предпосылок. Это стремление рентабельности к нулю, отсутствие (эндогенной) нестабильности, а также, как это ни странно звучит, отсутствие инвестиций. Попытка ввести инвестиции в такой наиболее простой (однопродуктовой) модели уже ведет к проблемам. Равновесие в экономике в терминах значений объемов, цен и производственных капиталов заменяется равновесием параметров волатильности и риска. Они влияют на объемы, цены и капитал. С ростом рыночного[7] капитала в экономике растут нестабильность и риски. Соответствующая зависимость, предсказанная моделью, описывается формулой

$$\lambda = \frac{K}{h - K(\alpha_I - g')} \cdot d.$$

Параметр h отвечает эластичности внешнего спроса. Чтобы повысить ее, может использоваться антициклическая политика – роль государства должна быть такова, чтобы скомпенси-

[7] Разумеется, важна форма не собственности, но поведения: государственный капитал может быть весьма рыночным по форме поведения.

ровать влияние потери инвестиционного напряжения при изменении рентабельности. Вытекающие из этого следствия лежат в русле обычных рекомендаций антикризисного управления. Параметр g' отвечает удельной эластичности на единицу фондов. Она негативно зависит – для класса положительно выпуклых функций затрат – от капиталоемкости экономики[8]. Вытекающие отсюда рекомендации касаются нежелательности перевода (простых в управлении) объемных инфраструктурных инвестиций в рыночный сектор.

В многорегиональной модели зависимость усложняется: при общих ценах и при разных относительных издержках нестабильность рентабельности в экономиках с общими рынками обусловит радикально разные уровни риска. Все экономики, такие как российская, получат б*о*льший риск, чем при закрытом рынке и, в идеале, должны сопоставлять выгоды от внешнеторгового обмена и потери из-за более высокой импортной нестабильности и увеличивающегося благодаря ей риска[9]. Такой анализ должен становиться основой для оценки и вычисления оптимального таможенного тарифа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Занг В.-Б.** Синергетическая экономика. Время и перемены в современной экономической теории. М.: Мир, 1999. 335 с.
2. **Сорнетт Д.** Как предсказывать крахи финансовых рынков: критические события в сложных финансовых системах. Б-ка Принстонского ун-та. 2-е изд. М.: SmartBook; И-трейд, 2008. 400 с
3. **Владимиров В. А., Малинецкий Г. Г., Подлазов А. В.** Управление риском. Риск и устойчивое развитие [Электронный ресурс]. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2003/source/book/).
4. **Кривошеев О. И., Хоютанов Д. Ф.** Модель равновесия экономики на границе возникновения нестабильности // Управление большими системами: матер. X Всерос. шк.-конф. молодых ученых. Уфа: УГАТУ, 2013. Т. 2. С. 134–138.
5. **Кругман П. Р., Обстфельд М.** Международная экономика: теория и политика / Пер. с англ. 5-го межд. изд. СПб.: Питер, 2004. 832 с.
6. **Кривошеев О. И.** Построение моделей влияния инвестиций на скорость экономического роста и предрасположенность к кризису // Вестник УГАТУ. 2009. Т. 13, № 2 (35). С. 148–159.
7. **Krivosheev O. I.** Unavoidable instability of decentralized economic systems // Dubna, VICMM, 2002.

[8] Если считать, что тезисы и регрессии А. Илларионова заслуживают доверия, то этот данный теоретический вывод с ними вполне согласуется (только в части негативного влияния инвестиции на ВВП в рыночной экономике).

[9] А они особенно велики из-за потери эластичности спроса и предложения в сложной капиталоемкой экономике, описываемой моделью леонтьевского типа.

ОБ АВТОРЕ

КРИВОШЕЕВ Олег Игоревич, сотр. лаб. № 43 ИПУ, преп. каф. прикладной математики МЭСИ. Магистр прикл. физ. и мат. (МФТИ, 2002). Иссл. в обл. нелин. динамики, мат. методов в экономике и упр. в соц. и экон. системах.

METADATA

Title: Equilibrium risk level for investment cycle.

Authors: O. I. Krivosheev.

Affiliation: Institute of Control Problems Russian Academy of Sciences (IPU RAS), Russia, Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics (MESI).

Email: o-krivosheev@ya.ru.

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 17, no. 4 (57), pp. 221-235, 2013. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: One considers a model with higher investment at higher IRR levels and vice versa. One assumes IRR increase monotonously with increase of price of the let-out product. The prices submit to the equation of Evans, in which a nonconventional term appears, that represents the increasing with price demand for long-term production factors. If the ratio of the revenue minus current expenses one re-invests grows enough rapidly with growth of IRR then there appear 2 stable short-term equilibriums (divided with 1 instable), understood as growth and crisis. In long-term the dynamics of the system passes through jump transitions from one phase to another. We derive amplitude of the oscillations and equilibrium risk.

Key words: Investment; bifurcation; investment cycle; instability; investment rule; volatility; equilibrium volatility.

References (English Transliteration):

1. Wei-Bin Zhang, *Synergetic Economics. Time and Change in Nonlinear Economics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.
2. D. Sornette, *How to predict Stock-market crashes: critical phenomena in complex systems*, -2nd ad. Moscow: SmartBook, 2008.
3. V. Vladimirov, G. G. Malinetski, and A. V. Podlazov, *Control of risks. Sustainable development and risks* [Online]. Available: http://www.keldysh.ru/papers/2003/source/book
4. O. I. Krivosheev and D. Hoyutanov, "Model of economics equilibrium at the boarder of appearance of instability," *Upravlenie Bolshimi Sistemami*: proc. 10th Russian workshop on Control in Big Systems (UBS ’2013), vol. 2, pp.134-138, 2013.
5. P. R. Krugman and M. Obstfeld, *International Economics: Theory and Policy*. Prentice Hall, 2008.
6. O. I. Krivosheev, "Building up models of investment influence on economic growth and economic crisis possibility," (in Russian), *Vestnik UGATU*, vol. 13, no. 2 (35), pp. 148-159, 2009.
7. O. I. Krivosheev, "Unavoidable instability of decentralized economic systems" in *Proc. VI Congr. Mathematical Modelling VICMM*, Dubna, 2002.

About author:

KRIVOSHEEV, Oleg Igorevich, researcher of lab. 43 IPU RAS & MESI Dept. of Applied Mathematics. Master of applied physics and mathematics (Moscow Institute of Physics and Technology (State University), 2002).