ISSN 1992-6502 (Print)
2017. Т. 21, № 4 (78).С. 129–135
Вестник УГАТУ
ISSN 2225-2789 (Online)
http://journal.ugatu.ac.ru

УДК 519.21

Вероятностное представление решений волновых уравнений и функция Грина

В. Д. Кадырова[1], Ф. С. Насыров[2], Д. А. Сучкова[3]

[1]566824@rambler.ru, [2]farsagit@yandex.ru, [3]dil9ara@rambler.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 04.10.2017

Аннотация. Построено вероятностное представление решений задачи Коши для уравнений колебания струны, колебания мембраны и колебательных процессов в сплошных средах (звуковые волны). Основным достижением является применение простой техники равномерно распределенных случайных величин. Решения представлены в виде математических ожиданий функций от равномерно распределенных случайных величин. С помощью найденной в явном виде функции Грина для уравнения колебания ограниченной струны получены вероятностные представления решений краевых задач.

Ключевые слова: волновое уравнение; равномерно распределенные случайные величины; функция Грина; вероятностные представления решений.

ВВЕДЕНИЕ

В стохастическом исчислении хорошо известна связь [1] между решениями стохастических дифференциальных уравнений Ито (в дальнейшем: СДУ) и параболическими и эллиптическими уравнениями: например, в «хороших случаях» решение СДУ служит моделью эволюции диффундирующей частицы, в то время как среднее в каждый момент времени по всем частицам, то есть математическое ожидание, является решением параболического уравнения, описывающего явление диффузии или распространения тепла. Следствием этого факта является, например, метод Монте-Карло [2], позволяющий находить из этих соображений приближенные решения уравнений параболического и эллиптического типов.

В статье [3] была сделана попытка распространения этой теории на случай волновых уравнений и получено вероятностные представление решений первой краевой задачи для уравнения колебания ограниченной струны. Однако построенное в этой работе вероятностное представление решений первой краевой задачи дано в терминах обобщенных случайных процессов, которые представляют собой достаточно сложную математическую конструкцию, а полученное представление не допускает никакой физической интерпретации.

В настоящей работе с применением весьма простого математического аппарата получено вероятностное представление решений волновых уравнений, как с начальными, так и с краевыми условиями. Существенно, что оказалось достаточно применения очень простой техники равномерно распределенных случайных величин вместо обобщенного случайного процесса. Кроме того, нам понадобился явный вид функции Грина для уравнения колебаний ограниченной струны, который обычно приводится в виде ряда.

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$u_{tt}(y,t) = a^2 u_{yy}(y,t), \ t > 0, \ y \in R, \quad (1)$$

$$u(y,0) = \varphi(y), u_t(y,0) = \psi(y). \quad (2)$$

В дальнейшем всюду предполагается, что все начальные и краевые условия являются достаточно гладкими функциями, поэтому решения рассмотренных ниже уравнений понимаются в классическом смысле.

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) задана случайная величина $N = N(\omega)$, равномерно распределенная на отрезке $[-a, a]$, где a – параметр волнового уравнения.

Предложение 1. Решение задачи Коши (1)–(2) представляется в виде математического ожидания

$$\begin{aligned} u(y,t) &= E[\varphi(y + sign(N)at) + \\ &+ t\psi(y + Nt)] = \\ &= t\frac{\partial}{\partial t}E[\varphi(y + Nt) + t\psi(y + Nt)], \end{aligned} \quad (3)$$

где $sign(v)$ есть знак числа v.

Доказательство. Так как

$$E[\varphi(y + sign(N)at)] = \frac{1}{2}[\varphi(y + at) + \varphi(y - at)],$$

$$t\frac{\partial}{\partial t}E[\varphi(y + Nt)] = \frac{t}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-a}^{a}\varphi(y + zt)dz = $$
$$= \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{y-at}^{y+at}\varphi(z)dz,$$

$$E[t\psi(y + Nt)] = \frac{t}{2a}\int_{-a}^{a}\psi(y + zt)dz = $$
$$= \frac{1}{2a}\int_{y-at}^{y+at}\psi(z)dz,$$

то в силу формулы Даламбера функция (3) есть решение искомой задачи Коши.

Следствие 1. Решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения

$$u_{tt}(y,t) = a^2 u_{yy}(y,t) + f(y,t), t > 0, y \in R,$$
$$u(y,0) = \varphi(y), \ u_t(y,0) = \psi(y)$$

представляется в виде математического ожидания

$$u(y,t) = E[\varphi(y + sign(N)at) + t\psi(y + Nt)] +$$
$$+ \int_0^t (t-\tau)E[f(\tau, y + N(t-\tau))]d\tau =$$
$$= E[\varphi(y + sign(N)at) + t\psi(y + Nt)] +$$
$$+ \int_0^t sE[f(t-s, y + Ns)]ds.$$

Доказательство. Первое слагаемое из предыдущей формулы соответствует решению однородной задачи, найденному в предложении 1. Второе слагаемое найдем, учитывая, что решение неоднородной задачи может быть представлено в виде суммы двух функций, одна из которых является решением однородной задачи, а другая – неоднородной с нулевыми начальными условиями [4]. По аналогии с доказательством предложения 1:

$$\int_0^t E[(t-\tau)\cdot f(\tau, y + N(t-\tau))]d\tau =$$
$$= \int_0^t (t-\tau)E[f(\tau, y + N(t-\tau))]d\tau =$$
$$= \int_0^t (t-\tau)\left(\int_{-a}^{a} f(\tau, y + z(t-\tau))\cdot p(z)dz\right)d\tau =$$
$$= \frac{1}{2a}\int_0^t (t-\tau)\left(\int_{-a}^{a} f(\tau, y + z(t-\tau))\,dz\right)d\tau =$$
$$= \frac{1}{2a}\int_0^t \left(\int_{y-a(t-\tau)}^{y+a(t-\tau)} f(\tau, x)\,dx\right)d\tau.$$

Следовательно, выполняется формула Даламбера для неоднородного уравнения.

Следствие 2. Для полуограниченной струны решение задачи

$$u_{tt}(y,t) = a^2 u_{yy}(y,t), \ t > 0, \ y > 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $u(y,0) = \varphi(y)$, $u_t(y,0) = \psi(y), \ y > 0$ и граничному условию $u(0,t) = \mu(t), t > 0$, представляется в виде

$$u(y,t) = \tilde{\mu}\left(t - \frac{y}{a}\right) + E[\tilde{\varphi}(y + sign(N)at) +$$
$$+ t\tilde{\psi}(y + Nt)], \ y > 0,$$

где $\tilde{\varphi}(y)$ и $\tilde{\psi}(y)$ – нечетные продолжения функций $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ соответственно, а $\tilde{\mu}(t) = \mu(t), t \geq 0$ и $\tilde{\mu}(t) = 0, t < 0$.

Доказательство. Первое слагаемое из доказываемой формулы соответствует решению задачи с неоднородным граничным условием и однородными начальными условиями. Второе и третье слагаемое соответствует решению задачи с однородным граничным условием и неоднородными начальными условиями, которое находили в предложении 1, учитывая, что начальные данные продолжаются нечетно.

Следствие 3. Для ограниченной струны, закрепленной на концах решение задачи

$$u_{tt}(y,t) = a^2 u_{yy}(y,t),\ \ t > 0,\ \ 0 \le y \le l,$$

удовлетворяющее начальным условиям $u(y,0) = \varphi(y)$, $u_t(y,0) = \psi(y)$, $0 \le y \le l$ и граничному условию $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, $t \ge 0$, представляется в виде

$$u(y,t) = E[\tilde{\varphi}(y + sign(N)at) + \\ + t\tilde{\psi}(y + Nt)],\ 0 \le y \le l,$$

где $\tilde{\varphi}(y)$ и $\tilde{\psi}(y)$ – функции, построенные следующим образом: продолжим $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ на отрезок $[-l,0]$ нечетным образом, а затем полученные функции, определенные на $[-l,l]$, продолжим на всю прямую как периодические функции с периодом $2l$.

Доказательство. Так как участвующие в решении функции определены на всей числовой прямой, то справедлива формула Даламбера, а значит, решение представляется по примеру предложения 1.

2. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) заданы две независимые случайные величины: $N_1 = N_1(\omega)$, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$ и случайная величина $N_2 = N_2(\omega)$, имеющая равномерное распределение на $[0,2\pi]$. Тогда произвольную случайную точку на единичном круге можно задать с помощью пары случайных величин $(N_1(\omega), N_2(\omega))$, где N_1 есть случайный радиус, а N_2 – угол.

Представим в виде математического ожидания решение задачи Коши для уравнения колебания колебаний мембраны

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\quad x, y \in R,\quad t > 0, \quad (4)$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \psi(x,y). \quad (5)$$

Предложение 2. Решение задачи (4)–(5) имеет вид

$$u(x,y,t) = \\ = \frac{\partial}{\partial t}\left(tE\begin{bmatrix} \varphi(x + atN_1\cos N_2, y + atN_1\sin N_2)\times \\ \times\dfrac{N_1}{\sqrt{1-N_1^2}} \end{bmatrix}\right) + \\ + t\cdot E\begin{bmatrix} \psi(x + atN_1\cos(N_2), y + atN_1\times \\ \times\sin(N_2))\dfrac{N_1}{\sqrt{1-N_1^2}} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Решение задачи (4)–(5) дается формулой

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\times \\ \times\frac{\partial}{\partial t}\left[t\iint\limits_{\{\xi^2+\eta^2\le 1\}} \frac{\varphi(x + at\xi, y + at\eta)}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}d\xi d\eta \right] + \\ + \frac{t}{2\pi}\iint\limits_{\{\xi^2+\eta^2\le 1\}} \frac{\psi(x + at\xi, y + at\eta)}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}d\xi d\eta.$$

Покажем, как из этой формулы получить необходимый вид, на примере второго слагаемого, первое слагаемое преобразуется аналогично. Ввиду независимости и равномерной распределенности случайных величин N_1 и N_2 имеем:

$$\frac{t}{2\pi}\iint\limits_{\{\xi^2+\eta^2\le 1\}} \frac{\psi(x + at\xi, y + at\eta)}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}d\xi d\eta = \\ = \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \psi(x + at\cdot r\cos\varphi, y + at\cdot r\sin\varphi)\times \\ \times\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}dr d\varphi = t\times \\ \times E\begin{bmatrix} \psi(x + atN_1\cos(N_2), y + atN_1\sin(N_2))\times \\ \times\dfrac{N_1}{\sqrt{1-N_1^2}} \end{bmatrix}.$$

3. Найдем в виде математического ожидания решение задачи Коши для трехмерного волнового уравнения

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2\Delta u,\ u = u(P,t),\ P = (x,y,z) \in R^3, \\ &\quad u(P,0) = \varphi(P),\ u_t(P,0) = \psi(P). \end{aligned} \quad (6)$$

Известно [4, 5], что решение $u(P,t)$ уравнения (6) дает формула

$$u(P,t) = \frac{\partial}{\partial t}[tM_{at}(\varphi)] + tM_{at}(\psi),$$

где

$$M_{at}(\phi) = \frac{1}{2\pi a^2 t^2}\iint_{S_{at,P}} \varphi dS,$$

$$M_{at}(\psi) = \frac{1}{2\pi a^2 t^2}\iint_{S_{at,P}} \psi dS,$$

интегрирование ведется по сфере $S_{at,P}$ радиуса at с центром в точке P.

Пусть $\tilde{N} = \tilde{N}(\omega)$ – равномерно распределенная на единичной сфере с центром в начале координат случайная величина. Тогда ее можно представить в виде «случайного направления» вектора $\tilde{N} = (N_1, N_2, N_3)$, идущего из начала координат в «случайную точку» сферы, координаты которого суть направляющие косинусы. При этом вероятность попадания в какую-то часть поверхности сферы пропорциональна площади этой части.

Предложение 3. Решение задачи Коши (6) представляется в виде

$$u(P,t) = \frac{\partial}{\partial t}[tM_{at}(\varphi)] + tM_{at}(\psi),$$

$$u(P,t) = \frac{\partial}{\partial t}[tE\varphi(P + at\tilde{N})] + tE\psi(P + at\tilde{N}).$$

Доказательство. Напомним, что при выводе предыдущей формулы берется осредненное значение решения уравнения (6).

$$\tilde{u}(P,r,t) = \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_{r,P}} u(P,t)dS.$$

Устремляя r к нулю, получим $\tilde{u}(P,0,t) = u(P,t)$, что дает способ нахождения исходного уравнения.

Далее строится функция $v(P,r,t) = = r\cdot\tilde{u}(P,r,t)$, удовлетворяющая одномерному волновому уравнению

$$v_{tt}(y,t) = a^2 v_{rr}(r,t),\ \ t > 0, r > 0$$

со следующими начальными условиями:

$$v(P,r,0) = \frac{1}{4\pi r}\iint_{S_{r,P}} \varphi(P)dS = \tilde{\varphi}(P,r)$$

$$v_t(P,r,0) = \frac{1}{4\pi r}\iint_{S_{r,P}} \psi(P)dS = \tilde{\psi}(P,r)$$

и граничным условием $v(P,0,t) = 0.$ Переменная $P(x,y,z)$ выступает в роли параметра. Значит, по вероятностному представлению решения для полуограни-ченной струны имеем:

$$v(P,r,t) = E[\hat{\varphi}(P, r + sign(\tilde{N})at) + $$
$$+ t\hat{\psi}(P, r + \tilde{N}t)],$$

где $\hat{\varphi}(P,\tilde{r}), \hat{\psi}(P,\tilde{r})$ – нечетные (по переменной r при фиксированном P) продолжения функций $\tilde{\varphi}(P,r), \tilde{\psi}(P,r)$. Так как $u(P,t) = \lim\limits_{r\to 0}\dfrac{v(P,r,t)}{r}$, то получаем вероятностное представление решения с использованием производной.

ФУНКЦИЯ ГРИНА И ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ

1. Рассмотрим уравнение колебания конечной струны

$$u_{tt}(y,t) = a^2 u_{yy}(y,t) + f(y,\tau),\quad 0 < y < l,\ t > 0, \tag{6}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(y,0) = \psi(y),\ u_t(y,0) = \psi_1(y),\ 0 \le y \le l, \tag{7}$$

и некоторым граничным условиям, соответствующим первой, второй и третьей краевым задачам.

Пусть $G(y,y',t-\tau)$ – функция Грина, т.е. функция, удовлетворяющая уравнению

$$G_{tt} = a^2 G_{yy} + \delta(y-y')\delta(t-\tau),$$

однородным краевым условиям, $G(y,y',t-\tau)$ и $G_t(y,y',t-\tau)$ при $t-\tau < 0$ равны нулю. Знание функции Грина позволяет строить решения краевых задач с помощью интегральных представлений решений, исключая применение метода

Фурье. Известно [4, 5], что функция $G(y,y',t-\tau)$ представляется в виде ряда

$$G(y,y',t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi ny}{l}\sin\frac{\pi ny'}{l}\times \times\sin\frac{\pi na(t-\tau)^{+}}{l}, \quad (8)$$

где $(t-\tau)^{+}=\max((t-\tau),0)$.

Вычислим сумму этого ряда. Для этого введем функцию

$$R(y)=sign(y)-y/l,\ \ y\in[-l,l],$$

и продолжим ее как периодическую функцию на всю вещественную прямую, причем продолжение этой функции будем обозначать по прежнему через $R(y)$.

Предложение 4. Справедливо равенство

$$G(y,y',t-\tau)=R(y+y'-a(t-\tau)^{+})+ +R(y-y'-a(t-\tau)^{+})- -R(y+y'-a(t-\tau)^{+})-R(y+y'-a(t-\tau)^{+}). \quad (9)$$

Доказательство. Пусть $t>\tau$. Преобразуем ряд (8) с помощью тригонометрических формул:

$$G(y,y',t-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi na}\sin\frac{\pi ny}{l}\sin\frac{\pi ny'}{l}\times \times\sin\frac{\pi na(t-\tau)}{l}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi na}\cos(\frac{\pi n}{l}(y-a(t-\tau)))- -\cos(\frac{\pi n}{l}(y+a(t-\tau))))\sin\frac{\pi ny'}{l}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi na}(\sin(\frac{\pi n}{l}(y'-y+a(t-\tau)))+ +\sin(\frac{\pi n}{l}(y'+y-a(t-\tau)))- -\sin(\frac{\pi n}{l}(y'-y-a(t-\tau)))- -\sin(\frac{\pi n}{l}(y'+y+a(t-\tau))).$$

Обозначим

$$R^{*}(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi na}\sin\left(\frac{\pi n}{l}y\right),\ -l<y<l,$$

и вычислим для функции $sign(y)$, $-l<y<l$, коэффициенты ряда Фурье b_n:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l\sin\frac{\pi ny}{l}dy=\frac{2}{\pi n}-\frac{2}{\pi n}(-1)^n.$$

Поэтому $sign(y)=4aR^{*}(y)-R_1(y),$ где

$$R_1(y)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi n}\sin\frac{\pi ny}{l},\ y\in[-l,l],$$

и значит

$$R^{*}(y)=\frac{1}{4a}[sign(y)+R_1(y)].$$

Заметим, что для функции $y,\ y\in[-l,l],$ разложение в ряд Фурье имеет вид $y=-lR_1(y),$ то есть $R_1(y)=-y/l.$ Следовательно

$$R(y)=\frac{1}{4a}\left[sign(y)-\frac{y}{l}\right],\ \ y\in[-l,l].$$

Продолжив функцию $R(y), y\in[-l,l],$ как периодическую функцию на всю вещественную прямую, приходим к равенству (9).

2. Покажем, как из интегральных представлений решений краевых задач, которые строятся с помощью функции Грина $G(x,x',t-\tau)$ для уравнения колебаний струны, получить вероятностные представления решений краевых задач. Пусть на вероятностном пространстве (Ω,F,P) задана случайная величина $N=N(\omega)$, равномерно распределенная на отрезке $[0,l]$.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения колебания струны

$$u_{tt}(y,t)=a^2u_{yy}(y,t)+f(y,\tau),\quad 0<y<l,\ t>0 \quad (10)$$

с начальными условиями

$$u(y,0)=\psi(y),\ u_t(y,0)=\psi_1(y),\quad 0\le y\le l \quad (11)$$

и граничными условиями вида $u(0,t)=\varphi_1(t)\ \ u(l,t)=\varphi_2(t),\ t>0.$

Предложение 5. Решение первой краевой задачи, приведенной выше, имеет вид

$$u(t,x)=a^2\int_0^{t+0}\begin{bmatrix}G_{y'}(y,y',t-\tau)\,|_{y'=0}\ \varphi_1(\tau)-\\ -G_{y'}(y,y',t-\tau)\,|_{y'=l}\ \varphi_2(\tau)\end{bmatrix}d\tau-$$
$$-l\ E\begin{bmatrix}G(x,N,t)\psi_1(N)-\\ -G_\tau(x,N,t-\tau)\,|_{\tau=0}\ \psi(N)\end{bmatrix}+$$
$$+\int_0^{t+0}E[G(x,N,t-\tau)f(N,\tau)']d\tau.$$

Доказательство. Воспользуемся тем фактом, что интегральные представления решений краевых задач для уравнения струны (10) с начальными условиями (11) строятся с помощью функции Грина и имеют вид

$$u(y,t)=a^2\int_0^{t+0}[G(y,y',t-\tau)\frac{\partial u(y',\tau)}{\partial y'}-$$
$$-u(y',\tau)\frac{\partial G(y,y',t-\tau)}{\partial y'}]\,|_{y'=0}^{y'=l}\ d\tau-$$
$$-\int_0^l(G(y,y',t)\psi_1(y')- \tag{12}$$
$$-\frac{\partial G(y,y',t-\tau)}{\partial\tau}\,|_{\tau=0}\ \psi(y'))dy'+$$
$$+\int_0^{t+0}d\tau\int_0^l G(y,y',t-\tau)f(y',\tau)dy',$$

где в правой части равенства два последних интеграла известны, а первый интеграл полностью определяется краевыми условиями задачи. Из формулы (12), в частности, выводится формула интегральных представлений решений в случае первой краевой задачи для уравнения колебаний струны (10) с начальными условиями (11) и граничными условиями вида

$$u(0,t)=\varphi_1(t),\ \ u(l,t)=\varphi_2(t),\ t>0,$$

которая имеет вид

$$u(y,t)=a^2\int_0^{t+0}(\frac{\partial G(y,y',t-\tau)}{\partial y'}\,|_{y'=0}\ \varphi_1(\tau)-$$
$$-\frac{\partial G(y,y',t-\tau)}{\partial y'}\,|_{y'=l}\ \varphi_2(\tau))d\tau-$$
$$-\int_0^l(G(y,y',t)\psi_1(y')-$$
$$-\frac{\partial G(y,y',t-\tau)}{\partial\tau}\,|_{\tau=0}\times\psi(y'))dy'+ \tag{13}$$
$$+\int_0^{t+0}d\tau\int_0^l G(y,y',t-\tau)f(y',\tau)dy'.$$

Так как

$$E\big[G(y,N,t)\psi_1(N)-G_\tau(y,N,t-\tau)\,|_{\tau=0}\ \psi(N)\big]=$$
$$=\frac{1}{l}\int_0^l(G(y,y',t)\psi_1(y')-\frac{\partial G(y,y',t-\tau)}{\partial\tau}\,|_{\tau=0}\times$$
$$\times\psi(y'))dy',$$
$$E[G(y,N,t-\tau)f(N,\tau)]=$$
$$=\frac{1}{l}\int_0^l G(y,y',t-\tau)f(y',\tau)dy',$$

то формула (13) есть решение первой краевой задачи.

Следствие 1. Вторая краевая задача (10)–(11) с граничные условиями

$$u_y(t,y)\,|_{y=0}=\varphi_1(t),\ \ u_y(t,y)\,|_{y=l}=\varphi_2(t).$$

допускает следующее вероятностное представление решений:

$$u(t,y)=-a^2\int_0^{t+0}[G(y,0,t-\tau)\varphi_1(\tau)+$$
$$+G(y,l,t-\tau)\varphi_2(\tau)]d\tau-$$
$$-l\ E[G(y,N,t)\psi_1(N)-G_\tau(y,N,t-\tau)\,|_{\tau=0}\times$$
$$\times\psi(N)]+l\int_0^{t+0}E[G(y,N,t-\tau)f(N,\tau)]d\tau.$$

Следствие 2. Для третьей краевой задачи (10)-(11) с граничными условиями

$$\big(u_y(t,y)-\alpha u(t,y)\big)\,|_{y=0}=\varphi_1(t),$$
$$\big(u_y(t,y)-\alpha u(t,y)\big)\,|_{y=l}=\varphi_2(t),$$

решение представляется в виде

$$u(t,y)=-a^2\int_0^{t+0}\begin{bmatrix}G(y,0,t-\tau)\varphi_1(\tau)+\\ +G(y,l,t-\tau)\varphi_2(\tau)\end{bmatrix}d\tau-$$
$$-l\ E\begin{bmatrix}G(y,N,t)\psi_1(N)-G_\tau(y,N,t-\tau)\,|_{\tau=0}\times\\ \times\psi(N)\end{bmatrix}+$$
$$+l\int_0^{t+0}E[G(y,N,t-\tau)f(N,\tau)]d\tau.$$

Доказательство следствий 1 и 2 аналогичны доказательству предложения 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ватанабе С., Икеда Н.** Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986. 448 с. [S. Watanabe, N. Ikeda, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, (in Russian). M.: Nauka, 1986.]

2. **Ермаков С. М., Некруткин В. В., Сипин А. С.** Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. М.: Наука, 1984. 208 с. [S. M. Ermakov, V. V. Nekrutkin, A. S. Sipin, *Random processes for solving classical equations of mathematical physics*, (in Russian). M.: Nauka, p. 208, 1984.]

3. **Смородина Н. В., Фаддеев М. М.** Вероятностный подход к решению уравнения колебания струны. // Записки Научных Семинаров ПОМИ, 2012. Т. 408, С. 286–302. [N. V. Smorodina, M. M. Faddeev, "Probabilistic approach to the solution of the string oscillation equation*",* (in Russian), in *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, vol. 408, pp. 286-302, 2012.]

4. **Положий Г. Н.** Уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1964. 560 с. [G. N. Polozhiy, *Equations of mathematical physics*, (in Russian). M.: Vyshaya Shkola, p. 560, 1964.]

5. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с. [A. N. Tikhonov, A. A. Samarskiy*, Equations of mathematical physics*, (in Russian). M.: Nauka, p. 735, 1977.]

ОБ АВТОРАХ

КАДЫРОВА Виктория Дамировна, бакалавр прикл. матем. и информ. (УГАТУ, 2017), маг-нт каф. матем. УГАТУ. Диплом. раб. на тему «Вероятн. представление решений краевых задач для уравн. колеб. огр. струны и функция Грина»

НАСЫРОВ Фарит Сагитович, проф. каф. матем. УГАТУ, канд. физ.-мат. наук (1985), Д-р физ.-мат. наук (2002). Иссл. вобл. локальных времен, св-в недиф. функций и случ. процессов; построение детерминир. интеграла, обобщающего стох. инт-л Стратоновича.

СУЧКОВА Дилара Айратовна, бакалавр прикл. матем. и информ. (УГАТУ, 2017), маг-нт каф. матем. УГАТУ. Диплом. раб. на тему «О вероятн. представлении решений задачи Коши для волн. уравнений»

METADATA

Title: A probabilityrepresentation of solutions of wave equations, and the function of Greene.

Authors: V. D. Kadyrova[1], F. S. Nasyrov[2], D. A. Suchkova[3]

Affiliation:

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: [1] 566824@rambler.ru, [2] farsagit@yandex.ru, [3]dil9ara@rambler.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 21, no. 4 (78), pp. 129-135, 2017. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: A probability representation of the solutions of the Cauchy problem for the equations of oscillation of a string, vibration of a membrane and oscillatory processes in continuous media (sound waves) is constructed. The main achievement is the use of a simple technique of uniformly distributed random variables. Solutions are presented in the form of mathematical expectations of functions from uniformly distributed random variables. With the help of the explicit Green function for the oscillation equation of a bounded string, probability representations of solutions of boundary value problems are obtained.

Key words: wave equation; uniformly distributed random variables; Green's function; probability representations of solutions.

About authors:

KADYROVA, Victoria Damirovna, Bachelor of Appl Math.and Computer Science (USATU, 2017), graduate student in the department of Math.of the USATU. Graduate workon the topic "Probability representation of solutions of boundary value problems for the equation of oscillations of a bounded string, and the Green's function".

NASYROV, Farit Sagitovich, Prof. in the departmentof Math., USATU, cand. of Phys. and Math. Sciences (1985), doctor of Phys. and Math.Sciences (2002).Studies in the field of local times, the prop.ofnondiff.functions and random processes; the construction of a determinate integral that generalizes the stoch.integral of Stratonovich.

SUCHKOVA, Dilara Ajratovna, Bachelor of Appl Math.and Computer Science (USATU, 2017), graduate student in the department of Math.of the USATU. Graduate workon the topic "About the probability representation of solutions of the Cauchy problem for wave equations".