ISSN 1992-6502 (Print)
2014. Т. 18, № 2 (63). С. 197–207
Вестник УГАТУ
ISSN 2225-2789 (Online)
http://journal.ugatu.ac.ru

УДК 621.317

Анализ показателей надежности двухуровневых магистральных сетей

А. И. Каяшев[1], П. А. Рахман[2], М. И. Шарипов[3]

[1] kayashev.ai@rambler.ru, [2] pavelar@yandex.ru, [3] sharipovm@mail.ru

ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный нефтяной технический университет» (УГНТУ)
Филиал в г. Стерлитамаке

Поступила в редакцию 17.06.2013

Аннотация. Рассматриваются двухуровневые магистральные сети передачи данных, модель надежности восстанавливаемых систем и методика расчета комплексных показателей надежности сетей на базе этой модели. Также приведен пример расчета показателей надежности двухуровневой магистральной сети.

Ключевые слова: магистральные сети; коэффициент готовности.

ВВЕДЕНИЕ

В последние три десятилетия наблюдается бурное развитие информационных технологий и их внедрение в самые различные сферы деятельности человека, и сети передачи данных стали неотъемлемой частью жизни людей, без которой немыслим информационный обмен.

В условиях быстро растущих требований и масштабов корпоративных сетей передачи данных современных организаций особое распространение получили магистральные сети [1–3] на базе технологий MPLS (Multiprotocol label switching), VPLS (Virtual private LAN services), а также Metro и Carrier Ethernet. Такие сети позволяют достаточно гибко и безопасно коммутировать информационные потоки множества потребителей с множеством территориально распределенных филиалов, объединяя их в многоточечные виртуальные частные сети DMVPN (Dynamic Multipoint Virtual Private Networks). Топология магистральных сетей может быть произвольной, и в них выделяются два уровня: уровень опорных (P) коммутаторов или маршрутизаторов, скрытых от сетей потребителей, и уровень граничных (PE) коммутаторов или маршрутизаторов, к которым подключаются сети потребителей.

Помимо таких технических характеристик магистральных сетей, как: производительность, латентность, масштабируемость, степень прозрачности для конечных потребителей, также крайне важными характеристиками являются комплексные показатели надежности такие как: коэффициент готовности и среднее время недоступности в год. От показателей надежности зависит доступность информационных сервисов для потребителей.

В такой ситуации анализ показателей надежности двухуровневых магистральных сетей является актуальной задачей.

В рамках данной статьи авторы рассматривают применение теоретической модели надежности восстанавливаемых систем [4–6], состоящих из нескольких групп однородных объектов, на двухуровневые магистральные сети с задаваемой топологией с целью анализа их коэффициента готовности и среднего времени недоступности в год. В основе модели лежит математический аппарат теории вероятностей и марковских цепей [7], а также алгоритмы комбинаторики и теории графов [8]. Для упрощения конечных формул для расчета коэффициента готовности автором делается допущение о независимости объектов как внутри групп, так и между группами, как по отказам, так и по восстановлениям. Кроме того, также для упрощения анализа не учитывается возможность отказов самих каналов связи в сетях передачи данных.

В первой части статьи рассматриваются модели надежности восстанавливаемых систем с конечными формулами для расчета вероятностей всех состояний систем. Во второй части рассматриваются двухуровневые магистральные сети с произвольно задаваемой топологией, и приведена предложенная авторами методика расчета коэффициента готовности. Также приведен пример расчета коэффициента готовности и среднего времени недоступности в год двухуровневой магистральной сети.

1. МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ НАДЕЖНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ СИСТЕМ

Марковская модель восстанавливаемого объекта

Пусть имеется восстанавливаемый объект с заданными интенсивностями отказов λ и восстановления μ. Тогда марковская модель надежности объекта (рис. 1):

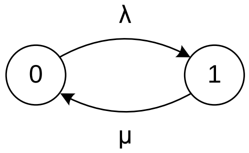

Рис. 1. Марковская модель восстанавливаемого объекта

Математическая модель (система уравнений Колмогорова–Чепмена):

$$\begin{cases} P_0(0)=1; \quad P_1(0)=0; \\ P_0(t)+P_1(t)=1; \\ \dfrac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t); \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt}=\lambda P_0(t)-\mu P_1(t); \end{cases}$$

$$\rho=\lambda/\mu; \quad \alpha=\lambda+\mu.$$

Решение система уравнений Колмогорова–Чепмена:

$$\begin{cases} P_0(t)=\dfrac{1}{1+\rho}\left(1+\rho e^{-\alpha t}\right); \\ P_1(t)=\dfrac{\rho}{1+\rho}\left(1-e^{-\alpha t}\right); \end{cases}$$

$$\rho=\lambda/\mu; \quad \alpha=\lambda+\mu.$$

Марковская модель пары независимых восстанавливаемых объектов

Пусть имеется пара восстанавливаемых объектов с одинаковыми интенсивностями отказов λ и восстановления μ. Оба объекта могут независимо отказывать и независимо восстанавливаться без каких-либо ограничений. Тогда имеем марковскую модель надежности (рис. 2).

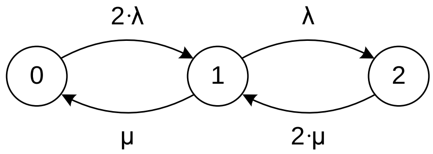

Рис. 2. Марковская модель пары независимых восстанавливаемых объектов

Математическая модель (система уравнений Колмогорова–Чепмена):

$$\begin{cases} P_0(0)=1; \quad P_1(0)=0; \quad P_2(0)=0; \\ P_0(t)+P_1(t)+P_2(t)=1; \\ \dfrac{dP_0(t)}{dt}=-2\lambda P_0(t)+\mu P_1(t); \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt}=2\lambda P_0(t)-(\lambda+\mu)P_1(t)+2\mu P_2(t); \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt}=\lambda P_1(t)-2\mu P_2(t); \end{cases}$$

$$\rho=\lambda/\mu; \quad \alpha=\lambda+\mu.$$

Решение система уравнений Колмогорова–Чепмена:

$$\begin{cases} P_0(t)=\dfrac{1}{(1+\rho)^2}\left(1+\rho e^{-\alpha t}\right)^2; \\ P_1(t)=\dfrac{2\rho}{(1+\rho)^2}\left(1-e^{-\alpha t}\right)\left(1+\rho e^{-\alpha t}\right); \\ P_2(t)=\dfrac{\rho^2}{(1+\rho)^2}\left(1-e^{-\alpha t}\right)^2; \end{cases}$$

$$\rho=\lambda/\mu; \quad \alpha=\lambda+\mu.$$

Марковская модель группы независимых восстанавливаемых объектов

Пусть имеется n восстанавливаемых объектов с одинаковыми интенсивностями отказов λ и восстановления μ. Объекты могут независимо отказывать и независимо восстанавливаться без каких-либо ограничений. Тогда получаем марковскую модель надежности (рис. 3).

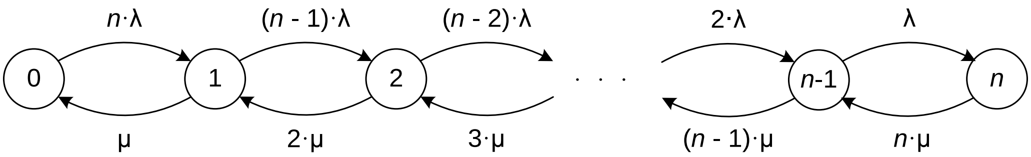

Рис. 3. Марковская модель группы независимых восстанавливаемых объектов

Математическая модель (система уравнений Колмогорова–Чепмена):

$$\begin{cases} P_0(0)=1; \quad P_1(0)=0; \quad \ldots \quad P_n(0)=0; \\ \sum_{i=0}^{n} P_i(t)=1; \\ \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -n\lambda P_0(t)+\mu P_1(t); \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = n\lambda P_0(t)-(\mu + \\ +(n-1)\lambda)P_1(t)+2\mu P_2(t); \\ \dfrac{dP_2(t)}{dt} = (n-1)\lambda P_1(t)-(2\mu + \\ +(n-2)\lambda)P_2(t)+3\mu P_3(t); \\ \vdots \\ \dfrac{dP_{n-1}(t)}{dt} = 2\lambda P_{n-2}(t)-((n-1)\mu + \\ +\lambda)P_{n-1}(t)+n\mu P_n(t); \\ \dfrac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t)-n\mu P_n(t). \end{cases}$$

Общее решение (1) системы дифференциальных уравнений в аналитическом виде (выведено путем индуктивных обобщений) выглядит следующим образом:

$$P_i(t) = \frac{C_n^i\,\rho^i\left(1-e^{-\alpha t}\right)^i\left(1+\rho\,e^{-\alpha t}\right)^{n-i}}{\left(1+\rho\right)^n}; \qquad (1)$$
$$i=0\ldots n; \quad \rho=\lambda/\mu; \quad \alpha=\lambda+\mu.$$

При $t\to\infty$ марковский процесс становится установившимся, и вероятности уже не меняются с течением времени (формула 2):

$$\lim_{t\to\infty} P_i(t) = C_n^i\,\frac{\rho^i}{\left(1+\rho\right)^n}; \qquad (2)$$
$$i=0\ldots n; \quad \rho=\lambda/\mu.$$

2. АНАЛИЗ КОЭФФИЦИЕНТА ГОТОВНОСТИ ДВУХУРОВНЕВЫХ МАГИСТРАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Двухуровневая магистральная сеть (рис. 4) содержит $n \geq 1$ коммутаторов, в том числе $r \geq 1$ опорных коммутаторов (P) и $n - r \geq 1$ граничных коммутаторов (PE).

Используется единая нумерация коммутаторов сети. Множество всех коммутаторов нумеруется числами из множества $V=\{1,\ldots,n\}$. Подмножество опорных коммутаторов нумеруется числами из подмножества $PV=\{n-r+1,\ldots,n\}$ множества *V*.

Топология связей между коммутаторами задается при помощи списка $L=\{(i,j)\}, i=1\ldots n, j=1\ldots n$ пар номеров связанных коммутаторов. Связи между коммутаторами симметричные.

Отказ любого граничного коммутатора, также как и нарушение связи любого граничного коммутатора с любым другим граничным коммутатором, считается отказом всей магистральной в целом, поскольку сети конечных потребителей подключаются к граничным коммутаторам.

Опорные коммутаторы имеют интенсивность отказов λ_{P} и восстановления μ_{P}, граничные коммутаторы имеют интенсивность отказов λ_{PE} и восстановления μ_{PE}.

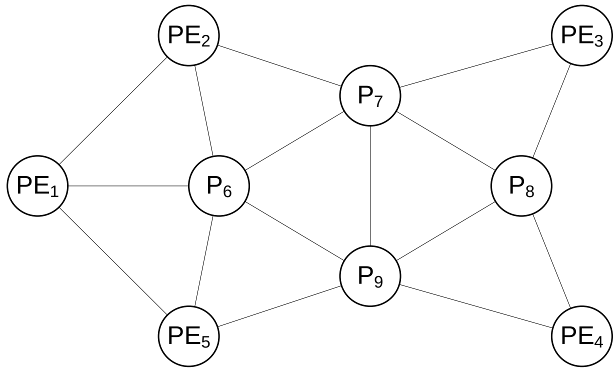

Рис. 4. Двухуровневая магистральная сеть из *n* = 9 коммутаторов, в том числе *r* = 4 опорных коммутаторов (P) и *n* – *r* = 5 граничных коммутаторов (PE)

В двухуровневой магистральной сети можно выделить две независимые с точки зрения модели надежности группы объектов – группа опорных коммутаторов (P) и группа граничных коммутаторов (PE).

Поскольку отказ любого граничного коммутатора считается отказом всей магистральной сети в целом, то очевидно, сеть считается работоспособной при первом условии, что все *n* – *r* коммутаторов в группе граничных коммутаторов работоспособны. Вероятность такого события равна вероятности нулевого состояния в марковской модели надежности группы из *n* – *r* объектов:

$$P_{\text{edge}}(t) = \frac{1}{\left(1+\rho_{\text{PE}}\right)^{n-r}}\left(1+\rho_{\text{PE}}e^{-\alpha_{\text{PE}}\,t}\right)^{n-r};$$
$$\rho_{\text{PE}} = \lambda_{\text{PE}}/\mu_{\text{PE}}; \quad \alpha_{\text{PE}} = \lambda_{\text{PE}}+\mu_{\text{PE}}.$$

Что касается отказов опорных коммутаторов, здесь следует особо учитывать то, что при определенных сочетаниях отказов опорных коммутаторов граничные коммутаторы сохраняют связность, а при других сочетаниях – нет.

Связность граничных коммутаторов полностью определяется топологией связей между коммутаторами и сочетанием отказов опорных коммутаторов. Общее число сочетаний для $q = 0\ldots r$ отказавших из r опорных коммутаторов определяется при помощи биномиального коэффициента C_r^q. Из них только при некотором числе $\psi_q \le C_r^q$ сочетаний граничные коммутаторы сохраняют связность. Как определить неизвестные коэффициенты $\psi_0,\ldots,\psi_r$ мы рассмотрим ниже, а пока продолжим анализ вероятностей отказов в группе опорных коммутаторов. Вероятность отказа ровно q коммутаторов среди r опорных коммутаторов определяется по формуле:

$$P_q(t) = \frac{C_r^q \rho_P^q}{(1+\rho_P)^r}\left(1-e^{-\alpha_P t}\right)^q \left(1+\rho_P e^{-\alpha_P t}\right)^{r-q};$$
$$q = 0\ldots r;$$
$$\rho_P = \lambda_P/\mu_P; \quad \alpha_P = \lambda_P + \mu_P.$$

Заметим, что в формуле учитываются всевозможные сочетания отказов q из r опорных коммутаторов. Чтобы учитывать только те сочетания, при которых граничные коммутаторы сохраняются связность, достаточно заменить биномиальные коэффициенты $C_r^0,\ldots,C_r^r$ на введенные нами коэффициенты $\psi_0,\ldots,\psi_r$, выполняющие роль «счетчика работоспособных сочетаний» для каждого $q = 0\ldots r$, причем $0 \le \psi_q \le C_r^q$.

Наконец, чтобы учесть различные конфигурации отказов для каждого $q = 0\ldots r$, нам необходимо просуммировать соответствующие вероятности для $q = 0\ldots r$. В итоге получаем вероятность для второго условия работоспособности сети:

$$P_{\text{core}}(t) = \frac{\sum_{q=0}^{r}\left(\psi_q \rho_P^q \left(1-e^{-\alpha_P t}\right)^q \left(1+\rho_P e^{-\alpha_P t}\right)^{r-q}\right)}{(1+\rho_P)^r};$$
$$\rho_P = \lambda_P/\mu_P; \quad \alpha_P = \lambda_P + \mu_P.$$

Объединим оба условия работоспособности сети, перемножив их вероятности, и получим окончательную формулу для вероятности работоспособности двухуровневой магистральной сети в целом:

$$P_{\text{net}}(t) = \frac{\left(1+\rho_{PE} e^{-\alpha_{PE} t}\right)^{n-r}}{(1+\rho_P)^r (1+\rho_{PE})^{n-r}} \times$$
$$\times \sum_{q=0}^{r}\left(\psi_q \rho_P^q \left(1-e^{-\alpha_P t}\right)^q \left(1+\rho_P e^{-\alpha_P t}\right)^{r-q}\right);$$
$$\rho_P = \lambda_P/\mu_P; \quad \alpha_P = \lambda_P + \mu_P;$$
$$\rho_{PE} = \lambda_{PE}/\mu_{PE}; \quad \alpha_{PE} = \lambda_{PE} + \mu_{PE}.$$

Тогда, стационарный коэффициент готовности двухуровневой магистральной сети определяется по формуле (3):

$$K_{\text{net}} = \lim_{t\to\infty} P_{\text{net}}(t) = \frac{\sum_{q=0}^{r}\left(\psi_q \rho_P^q\right)}{(1+\rho_P)^r (1+\rho_{PE})^{n-r}}; \tag{3}$$
$$\rho_P = \lambda_P/\mu_P; \quad \rho_{PE} = \lambda_{PE}/\mu_{PE}.$$

Теперь вернемся к вопросу определения неизвестных коэффициентов $\psi_0,\ldots,\psi_r$, указывающих на количество сочетаний отказов q из r опорных коммутаторов, при которых граничные коммутаторы сохраняют связность, для каждого $q = 0\ldots r$.

Чтобы подсчитать коэффициент ψ_q при конкретном q, необходимо проанализировать взаимную достижимость граничных узлов при каждом сочетании отказов q из r опорных коммутаторов. Для этого нам необходимо рассчитывать матрицу достижимости коммутаторов для каждого конкретного сочетания отказа с учетом топологии связей, а для этого в свою очередь нам потребуется матрица смежности магистральной сети.

Матрица смежности A вычисляется по заданному списку L пар связанных коммутаторов с номерами $i = 1\ldots n$ и $j = 1\ldots n$ следующим образом:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in L \vee (j,i) \in L; \\ 0, & (i,j) \notin L \wedge (j,i) \notin L; \end{cases}$$
$$i = 1\ldots n; \quad j = 1\ldots n.$$

Матрица смежности A является булевой и симметрична относительно главной диагонали, поскольку связи между коммутаторами симметричные (двусторонние).

Матрица достижимости R для заданной матрицы смежности A без учета отказов опорных коммутаторов вычисляется по рекуррентной схеме, основанной на алгоритме нахождения транзитивного замыкания для бинарного отношения:

$$s = 1 \ldots n: \begin{cases} R_{ij}^{(s)} = R_{ij}^{(s-1)} \bigvee \left(R_{is}^{(s-1)} \bigwedge R_{sj}^{(s-1)} \right); \\ i = 1 \ldots n; \quad j = 1 \ldots n. \end{cases}$$

Матрица, получаемая на последней итерации $s = n$, принимается в качестве результата:

$$\begin{cases} R_{ij} = R_{ij}^{(n)}; \\ i = 1 \ldots n; \quad j = 1 \ldots n. \end{cases}$$

Если не учитывать отказы, то в качестве начальной матрицы достижимости $R_{ij}^{(0)}$ принимается матрица смежности A_{ij}:

$$\begin{cases} R_{ij}^{(0)} = A_{ij}; \\ i = 1 \ldots n; \quad j = 1 \ldots n. \end{cases}$$

Теперь обозначим конкретное сочетание отказов q из r опорных коммутаторов как $FV \subseteq PV$, являющееся подмножеством множества опорных коммутаторов PV. Очевидно, что $|FV| = q$. Тогда для учета конкретного сочетания отказов FV в рекуррентной схеме вычисления матрицы достижимости R в качестве начальной матрицы достижимости $R_{ij}^{(0)}$ принимается матрица смежности A_{ij} с обнуленными строками и столбцами, имеющими номера, входящие в рассматриваемое сочетание отказов FV:

$$\begin{cases} R_{ij}^{(0)} = \begin{cases} A_{ij}, & i \notin FV \wedge j \notin FV \\ 0, & i \in FV \vee j \in FV \end{cases}; \\ i = 1 \ldots n; \quad j = 1 \ldots n. \end{cases}$$

Тогда для определения связности граничных коммутаторов при конкретном сочетании отказов FV достаточно проанализировать соответствующую матрицу достижимости R, вычисленную для рассматриваемого сочетания отказов FV, и убедиться в том, что от любого коммутатора, не являющегося опорным, достижим любой другой коммутатор, также не являющийся опорным. В математическом виде условие:

$$\forall i \notin PV \;\&\; \forall j \notin PV \;\&\; (i \neq j): R_{ij} = 1.$$

Введем индикатор связности граничных коммутаторов и обозначим его как W, который равен 1, если условие выполняется, и равен 0, если нет. Тогда, индикатор связности W граничных коммутаторов может быть вычислен по формуле:

$$W = \bigwedge_{i=1;\, i \notin PV}^{n} \; \bigwedge_{j=1;\, j \notin PV;\, j \neq i}^{n} R_{ij}.$$

Тогда, перебрав все сочетания $FV \subseteq PV$ отказов q из r опорных коммутаторов для конкретного q и вычисляя для каждого сочетания отказов FV индикатор связности W граничных коммутаторов и подсчитывая число сочетаний, при которых $W = 1$, мы найдем искомый коэффициент ψ_q.

Наконец, выполнив данную процедуру для каждого $q = 0 \ldots r$, мы найдем все коэффициенты $\psi_0, \ldots, \psi_r$. Также особо отметим, что если для какого-либо $q^* < r$ мы получаем коэффициент $\psi_{q^*} = 0$, то, очевидно, все остальные коэффициенты ψ_q при $q = q^* + 1 \ldots r$ также будут равны нулю, и можно досрочно завершить алгоритм расчета коэффициентов, приняв $\psi_{q^*+1} = \ldots = \psi_r = 0$.

Подводя итог ко всему вышесказанному, приведем схему алгоритма (рис. 6) вычисления коэффициентов $\psi_0, \ldots, \psi_r$.

Частный случай 1. Топология связей L такова, что связность граничных коммутаторов сохраняется только при работе всех опорных коммутаторов. На рис. 5 приведен пример такой топологии.

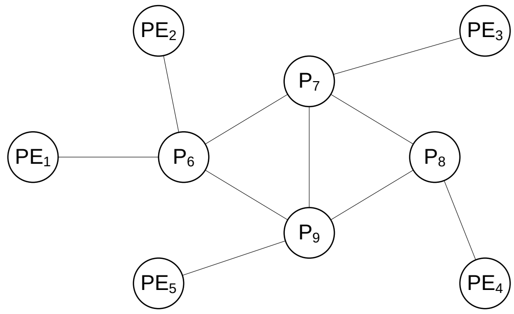

Рис. 5. Двухуровневая магистральная сеть, не содержащая прямых связей между граничными коммутаторами

Очевидно, что при такой топологии граничные коммутаторы сохраняют связность только при единственном пустом сочетании $FV = \{\}$ отказов опорных коммутаторов при $q = 0$. Во всех остальных случаях при любом сочетании отказов при любом $q = 1 \ldots r$ связность нарушается. Тогда, очевидно, что только коэффициент $\psi_0 = 1$, а остальные коэффициенты $\psi_1 = 0, \ldots, \psi_r = 0$.

Соответственно, коэффициент готовности такой сети, учитывая что $\sum_{q=0}^{r} \psi_q \rho_{\mathrm{P}}^q = \psi_0 \rho_{\mathrm{P}}^0 = 1$, определяется по формуле

$$K_{\mathrm{net}} = \frac{1}{\left(1 + \rho_{\mathrm{P}}\right)^r \left(1 + \rho_{\mathrm{PE}}\right)^{n-r}}. \qquad (4)$$

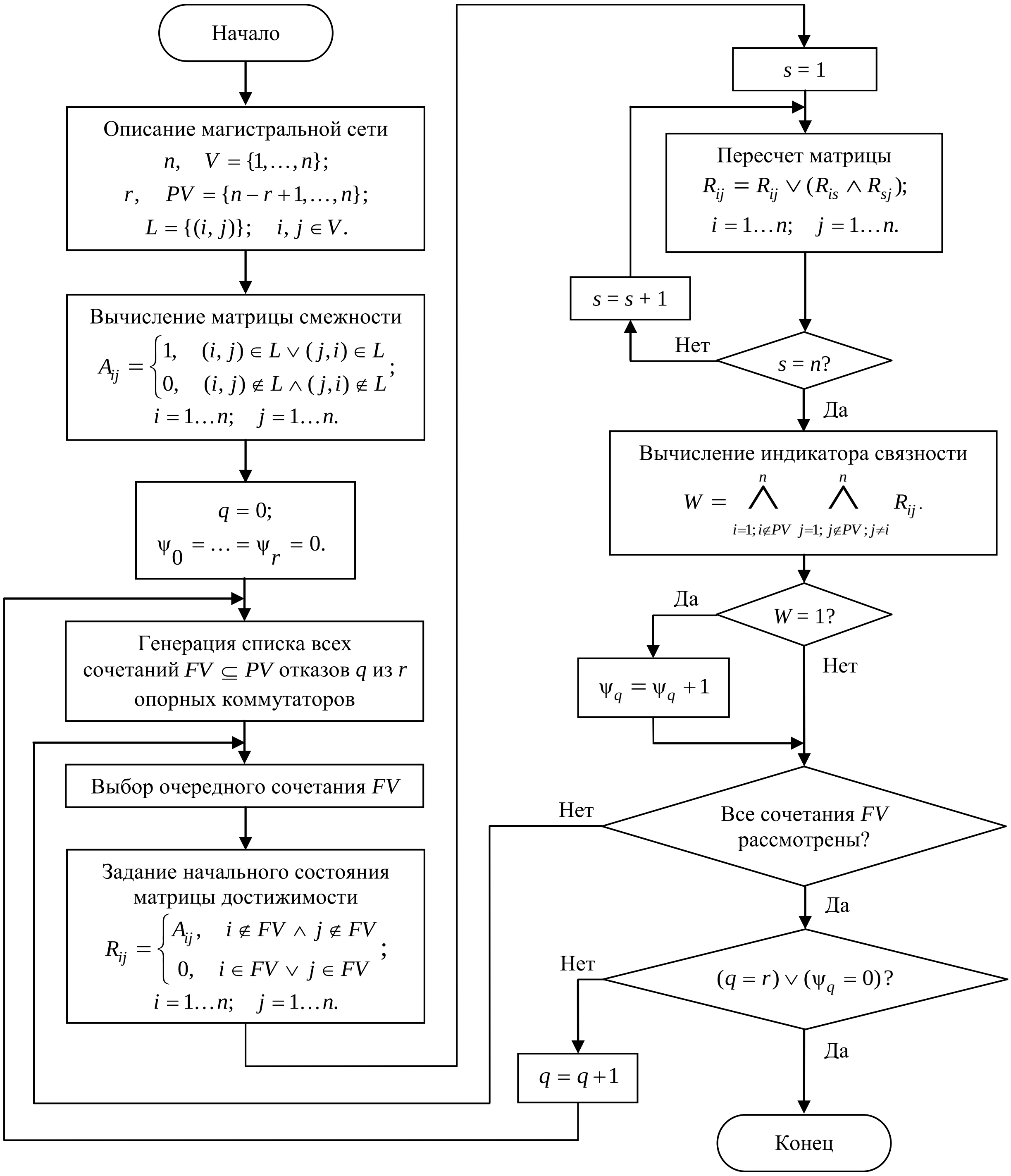

Рис. 6. Схема алгоритма вычисления коэффициентов $\psi_0, \ldots, \psi_r$

Частный случай 2. Топология связей L такова, что связность граничных коммутаторов сохраняется даже при отказе всех опорных коммутаторов. Пример такой топологии приведен на рис. 7.

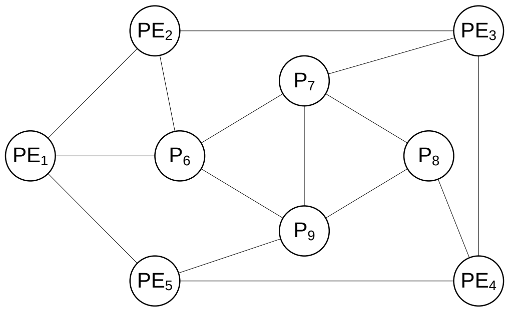

Рис. 7. Двухуровневая магистральная сеть с кольцевой связью граничных коммутаторов

Очевидно, что при такой топологии граничные коммутаторы сохраняют связность при любых сочетаниях FV отказов q из r опорных коммутаторов для всех $q = 0\ldots r$. Количество таких сочетаний для конкретного q вычисляется при помощи биномиального коэффициента. Тогда очевидно, что коэффициенты $\psi_q = C_r^q$, $q = 0\ldots r$. Тогда коэффициент готовности такой сети, учитывая, что $\sum_{q=0}^{r} C_r^q \rho_{\mathrm{P}}^q = (1+\rho_{\mathrm{P}})^r$, определяется по формуле

$$K_{\mathrm{net}} = \frac{1}{(1+\rho_{\mathrm{PE}})^{n-r}}. \qquad (5)$$

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТА ГОТОВНОСТИ ДВУХУРОВНЕВОЙ МАГИСТРАЛЬНОЙ СЕТИ

Задана двухуровневая магистральная сеть провайдера, содержащая n = 9 коммутаторов V = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}, в том числе r = 4 опорных коммутаторов PV = {6,7,8,9}.

Опорные коммутаторы имеют интенсивность отказов $\lambda_{\mathrm{P}} = 1/8760$ ч$^{-1}$ и интенсивность восстановления $\mu_{\mathrm{P}} = 1/3$ ч$^{-1}$, граничные коммутаторы имеют интенсивность отказов $\lambda_{\mathrm{PE}} = 1/8760$ ч$^{-1}$ и интенсивность восстановления $\mu_{\mathrm{PE}} = 1$ ч$^{-1}$.

Топология связей задана при помощи списка номеров пар связанных между собой коммутаторов: L = {(1,2), (1,5), (1,6), (2,6), (2,7), (3,7), (3,8), (4,8), (4,9), (5,6), (5,9), (6,7), (6,9), (7,8), (7,9), (8,9)}.

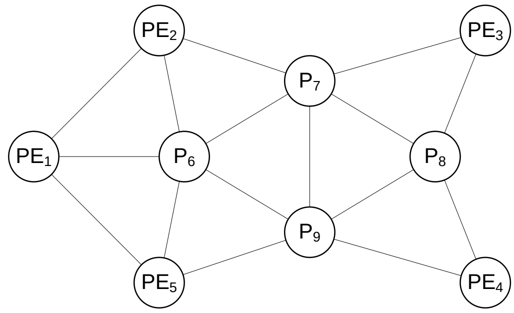

Рис. 8. Пример двухуровневой магистральной сети

Для наглядности также приведем графическую схему магистральной сети (рис. 8).

Необходимо определить коэффициент готовности магистральной сети.

Решение. Сначала выполним наиболее трудоемкую часть задачи – найдем коэффициенты $\psi_0,\ldots,\psi_4$ для определения количества сочетаний отказов q из 4 опорных коммутаторов, при которых сохраняется связность граничных коммутаторов для каждого q = 0…4.

Согласно вышеприведенному алгоритму (рис. 5) определяем матрицу смежности по заданному количеству коммутаторов n и топологии связей L, и получаем:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Теперь для каждого q = 0…4 генерируем все сочетания $FV \subseteq PV = \{6,7,8,9\}$ отказов q из 4 опорных коммутаторов, и для каждого сочетания FV строим матрицу достижимости R по матрице смежности A и по сочетанию FV, вычисляем индикатор связности W по матрице достижимости R и подмножеству опорных коммутаторов PV, и подсчитываем количество сочетаний, при которых W = 1, это количество и будет искомым коэффициентом ψ_q.

При q = 0 имеем единственное вырожденное сочетание отказов FV = {}. В этом случае в качестве начального состояния матрицы достижимости принимается матрица смежности A в неизменном виде, и далее по рекуррентной схеме вычисляется матрица достижимости:

$$R=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1&1&1\end{vmatrix}.$$

Из полученной матрицы достижимости очевидно, что все коммутаторы (в том числе и граничные) достижимы друг для друга. Соответственно, индикатор связности граничных коммутаторов, который, учитывая, что $PV=\{6{,}7{,}8{,}9\}$, определяется по угловой подматрице достижимости $R_{ij}, i=1\ldots5, j=1\ldots5$, равен: $W=\bigwedge\limits_{i=1}^{5}\bigwedge\limits_{j=1;\,j\neq i}^{5}R_{ij}=1$.

Поскольку вырожденное сочетание отказов единственное и при нем индикатор связности равен $W=1$, то очевидно, $\psi_0=1$.

При q = 1 имеем $C_4^1=4$ сочетания FV = ={6}, FV = {7}, FV = {8}, FV = {9} отказов 1 из 4 опорных коммутаторов. Для каждого сочетания вычисляем матрицу достижимости, принимая в качестве начальной матрицы достижимости матрицу смежности A с обнуленными строками и столбцами, имеющими номера, входящие в сочетание FV.

В результате вычислений получаем 4 матрицы достижимости.

Для сочетания FV = {6}:

$$R=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1\end{vmatrix}.$$

Для сочетания FV = {7}:

$$R=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1&1&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1&1&0&1&1\end{vmatrix}.$$

Для сочетания FV = {8}:

$$R=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&1&1&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1&1&0&1\end{vmatrix}.$$

Для сочетания FV = {9}:

$$R=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{vmatrix}.$$

Во всех 4 случаях граничные коммутаторы остаются связанными между собой, поскольку в угловой подматрице $R_{ij}, i=1\ldots5, j=1\ldots5$ все элементы во всех 4 случаях равны 1, и, соответственно, индикатор связности граничных коммутаторов: $W=\bigwedge\limits_{i=1}^{5}\bigwedge\limits_{j=1;\,j\neq i}^{5}R_{ij}=1$. Тогда, поскольку во всех 4-х случаях $W=1$, коэффициент $\psi_1=4$.

При q = 2 имеем $C_4^2=6$ сочетаний FV = ={6,7}, FV = {6,8}, FV = {6,9}, FV = {7,8}, FV = ={7,9}, FV = {8,9} отказов 2 из 4 опорных коммутаторов. Для каждого сочетания вычисляем матрицу достижимости, принимая в качестве начальной матрицы достижимости матрицу смежности A с обнуленными строками и столбцами, имеющими номера, входящие в сочетание FV. В результате вычислений получаем 6 матриц достижимости:

Для сочетания FV = {6,7}:

$$R=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&0&0&1&1\\1&1&1&1&1&0&0&1&1\\1&1&1&1&1&0&0&1&1\\1&1&1&1&1&0&0&1&1\\1&1&1&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&0&0&1&1\\1&1&1&1&1&0&0&1&1\end{vmatrix}.$$

Для сочетания $FV = \{6,8\}$:

$$R = \begin{vmatrix} 1&1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&0&1 \end{vmatrix}.$$

Для сочетания $FV = \{6,9\}$:

$$R = \begin{vmatrix} 1&1&1&1&1&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{vmatrix}.$$

Для сочетания $FV = \{7,8\}$:

$$R = \begin{vmatrix} 1&1&0&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&0&1&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&0&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&0&1&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1&1&0&0&1 \end{vmatrix}.$$

Для сочетания $FV = \{7,9\}$:

$$R = \begin{vmatrix} 1&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1&0 \\ 1&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{vmatrix}.$$

Для сочетания $FV = \{8,9\}$:

$$R = \begin{vmatrix} 1&1&1&0&1&1&1&0&0 \\ 1&1&1&0&1&1&1&0&0 \\ 1&1&1&0&1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&1&1&1&0&0 \\ 1&1&1&0&1&1&1&0&0 \\ 1&1&1&0&1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что в 3 случаях $FV = \{6,7\}$, $FV = \{6,8\}$, $FV = \{6,9\}$ граничные коммутаторы сохраняются связность, поскольку в угловой подматрице $R_{ij}, i = 1\ldots5, j = 1\ldots5$ матрицы достижимости все элементы во всех этих случаях равны 1, и, соответственно, индикатор связности граничных коммутаторов $W = \bigwedge_{i=1}^{5} \bigwedge_{j=1;\, j\neq i}^{5} R_{ij} = 1$.

В других же 3 случаях $FV = \{7,8\}$, $FV = \{7,9\}$, $FV = \{8,9\}$ отказ соответствующих опорных коммутаторов приводит к нарушению связности между граничными коммутаторами и, соответственно, индикатор связности граничных коммутаторов $W = \bigwedge_{i=1}^{5} \bigwedge_{j=1;\, j\neq i}^{5} R_{ij} = 0$.

Тогда, поскольку только в 3 из 6 случаев сохраняется связность граничных коммутаторов ($W = 1$), коэффициент $\psi_2 = 3$.

При q = 3 имеем $C_4^3 = 4$ сочетания $FV = \{6,7,8\}$, $FV = \{6,7,9\}$, $FV = \{6,8,9\}$, $FV = \{7,8,9\}$ отказов 3 из 4 опорных коммутаторов. Для каждого сочетания вычисляем матрицу достижимости, принимая в качестве начальной матрицы достижимости матрицу смежности A с обнуленными строками и столбцами, имеющими номера, входящие в сочетание FV.

В результате вычислений получаем 4 матрицы достижимости.

Для сочетания $FV = \{6,7,8\}$:

$$R = \begin{vmatrix} 1&1&0&1&1&0&0&0&1 \\ 1&1&0&1&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1&0&0&0&1 \\ 1&1&0&1&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&1&0&0&0&1 \end{vmatrix}.$$

Для сочетания $FV = \{6,7,9\}$:

$$R = \begin{vmatrix} 1&1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1&0 \\ 1&1&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{vmatrix}.$$

Для сочетания $FV = \{6,8,9\}$:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Для сочетания $FV = \{7,8,9\}$:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что во всех 4 случаях нарушается связность граничных коммутаторов, и, соответственно, индикатор связности граничных коммутаторов $W = \bigwedge_{i=1}^{5} \bigwedge_{j=1;\, j \neq i}^{5} R_{ij} = 0$.

Тогда, поскольку ни в одном из 4 случаев не сохраняется связность граничных коммутаторов ($W = 0$), коэффициент $\psi_3 = 0$.

Поскольку мы при q = 3 получили нулевой коэффициент, то есть ни при одном сочетании тройных отказов опорных коммутаторов не сохраняется связность граничных коммутаторов, **при q = 4** тем более не найдется ни одного сочетания, при котором сохранялась бы связность, поэтому мы завершаем вычисления, приняв коэффициент $\psi_4 = 0$.

Теперь мы имеем все коэффициенты: $\psi_0 = 1; \psi_1 = 4; \psi_2 = 3; \psi_3 = 0; \psi_4 = 0$. Остается только подставить их в формулу (3) для вычисления коэффициента готовности сети.

Учитывая, что $\rho_{\text{P}} = \lambda_{\text{P}} / \mu_{\text{P}} = 1/2920$, $\rho_{\text{PE}} = \lambda_{\text{PE}} / \mu_{\text{PE}} = 1/8760$ в итоге получаем:

$$K_{\text{net}} = \frac{\sum_{q=0}^{4} \psi_q \rho_{\text{P}}^q}{(1+\rho_{\text{P}})^4 (1+\rho_{\text{PE}})^5} =$$

$$= \frac{1 + 4\rho_{\text{P}} + 3\rho_{\text{P}}^2}{(1+\rho_{\text{P}})^4 (1+\rho_{\text{PE}})^5} \approx 0{,}999429.$$

Если оценить среднее количество часов недоступности магистральной сети в год (8760 ч) по формуле $8760 \cdot (1 - K_{\text{net}})$, то получаем около **5 ч** недоступности в год.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в рамках данной статьи рассмотрена модель надежности восстанавливаемых систем и предложенная авторами методика расчета коэффициента готовности двухуровневых магистральных сетей с произвольной топологией на базе этой модели. Также приведен пример расчета коэффициента готовности двухуровневой магистральной сети и среднего времени недоступности в год.

Полученные теоретические результаты использовались в многолетней практике эксплуатации, развития и проектирования сетей среднего масштаба НИУ МЭИ (ТУ), Балаковской АЭС, ОАО «Красный Пролетарий» и ряда других предприятий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Олифер В. Г.**, **Олифер Н. А.** Компьютерные сети. 4-е изд. СПб.: Питер, 2010. [V. G. Olifer and N. A. Olifer, *Computer Networks*, (in Russian). Saint-Petersburg: Piter, 2010.]

2. **Iftekhar Hussain**. Fault-Tolerant IP and MPLS Networks. Cisco Press, 2004. [Iftekhar Hussain, *Fault-Tolerant IP and MPLS Networks*, Cisco Press, 2004.]

3. **Sam Halabi**. Metro Ethernet. Cisco Press, 2003. [Sam Halabi, *Metro Ethernet*, Cisco Press, 2003.]

4. **Черкесов Г. Н.** Надежность аппаратно-программных комплексов. СПб.: Питер, 2005. [G. N. Cherkesov, *Reliability of Hardware and Software Systems*, (in Russian). Saint-Petersburg: Piter, 2005.]

5. **Половко А. М.**, **Гуров С. В.** Основы теории надежности. 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. [A. M. Polovko and S. V. Gurov, *Basis of Reliability Theory*, (in Russian). Saint-Petersburg: BHV-Petersburg, 2006.]

6. **Гвоздев В. Е., Танзалы Г. И., Хасанов А. Ю., Абдрафиков М. А.** Анализ надежности технических систем на основе математико-статистического моделирования // Вестник УГАТУ. 2011. Т. 15, № 2 (42). С. 22–28. [V. E. Gvozdev, G. I. Tanazly, A. Yu. Khasanov, and M. A. Abdrafikov, “Reliability analysis of technical systems on the basis of mathematical-statistical modelling,” (in Russian), *Vestnik UGATU*, vol. 15, no. 2 (42), pp. 22-28, 2011.]

7. **Гнеденко Б. В.** Курс теории вероятностей. М.: Едиториал УРСС, 2005. [B. V. Gnedenko, *Course of Probability Theory*, (in Russian). Moscow: Editorial URSS, 2005.]

8. **Новиков Ф. А**. Дискретная математика для программистов. 3-е изд. СПб.: Питер, 2009. [F. A. Novikov, *Discrete mathematics for programmers*, (in Russian). Saint-Petersburg: Piter, 2009.]

ОБ АВТОРАХ

КАЯШЕВ Александр Игнатьевич, проф., зав. каф. автоматизир. технол. и информ. систем. Дипл. инж. (Рязанск. радиотехн. ин-т, 1967). Д-р техн. наук (МГТУ «Станкин», 1996). Иссл. в обл. управления технол. объектами с распр. параметрами.

РАХМАН Павел Азизурович, доц. каф. автоматизир. технол. и информ. систем. М-р техн. и технол. по информатике и выч. технике (МЭИ, 2000). Канд. техн. наук по телеком. системам и комп. сетям (МЭИ, 2005). Иссл. в обл. телекоммуникационных систем и компьютерных сетей.

ШАРИПОВ Марсель Ильгизович, доц. каф. автоматизир. технол. и информ. систем. Дипл. инженер (УГНТУ, 2006). Канд. техн. наук (УГНТУ, 2010). Иссл. в обл. машин, агрегатов и процессов в нефтегазовой отрасли.

METADATA

Title: Reliability analysis of two-level backbone networks.

Authors: A. I. Kayashev[1], P. A. Rahman[2], M. I. Sharipov[3].

Affiliation: Sterlitamak branch of Ufa State Petroleum Technological University, Russia.

E-mail: kayashev.ai@rambler.ru[1], pavelar@yandex.ru[2], sharipovm@mail.ru[3]

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 18, no. 2 (63), pp. 197-207, 2014. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: Two-level backbone computer networks with core-level and edge-level switches, reliability model of repairable systems and algorithm for network availability assessment are discussed. Network availability calculation example for backbone network is also provided.

Key words: backbone networks; availability factor.

About authors:

KAYASHEV, Alexander Ignatievich, Head of Automated Technological and Informational Systems Department, Sterlitamak branch of Ufa State Petroleum Technological University. Dr. of Tech. Sci. (Moscow State University of Technology «Stankin», 1996).

RAHMAN, Pavel Azizurovich, Associate professor (docent) of Automated Technological and Informational Systems Department, Sterlitamak branch of Ufa State Petroleum Technological University. M.Sc. in Computer Science (Moscow Power Engineering Institute, 2000), Ph.D. in Technical Sciences (Moscow Power Engineering Institute, 2005).

SHARIPOV, Marsel Ilgizovich, Associate professor (docent) of Automated Technological and Informational Systems Department, Sterlitamak branch of Ufa State Petroleum Technological University. Ph.D. in Technical Sciences (Ufa State Petroleum Technological University, 2010).