Уфа: УГАТУ, 2006 Вестник УГАТУ Т. 7, № 1 (14). С. 47–53

УДК 629.7.027

С. С. КОМАРОВ, Н. И. МИСКАКТИН

ГАМИЛЬТОНОВ ПОДХОД К ЧИСЛЕННОМУ ПРЕДСТАВЛЕНИЮ МОДЕЛИ ПНЕВМОУПРУГОСТИ

Излагаются теоретические основы синтеза численного представления математической модели динамического взаимодействия пневмоупругих систем, содержащих твердые тела и пневмооболочки. Численное представление движения пневмоупругой системы получается в виде канонической системы уравнений Гамильтона. Проводится дискретизация поверхности оболочки на упругие элементы с сосредоточенными массами. Для полученной пневмоупругой системы материальных тел записывается функция Гамильтона с учетом возможной диссипации и наличия источников энергии. Полученная каноническая система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений решается вычислительными методами. *Численные методы; динамика оболочки; функция Гамильтона; каноническая система дифференциальных уравнений*

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании пневмоупругих систем, содержащих твердые тела и оболочки из мягких анизотропных материалов, возникает потребность решать уравнения динамики мягкой оболочки, являющейся системой уравнений в частных производных [1]:

$$\gamma\frac{dv}{dt} = \operatorname{div} T + p + g\,\gamma, \qquad (1)$$

где γ — поверхностная плотность материала оболочки, $\frac{dv}{dt}$ — ускорение точки поверхности оболочки, $\operatorname{div} T$ — дивергенция тензора тангенциальных усилий, p — плотность поверхностных нагрузок, $g\gamma$ — плотность массовых сил.

Реальные пневмоупругие системы, как правило, имеют сложную форму поверхности твердых тел и пневмооболочек, а также сложную траекторию движения тел и деформацию оболочки, что фактически лишает возможности исследовать такие системы аналитическим методом. Задача ещё более усложняется при быстром (ударном) взаимодействии систем с большими деформациями оболочек, соизмеримыми с общими размерами исследуемой пневмоупругой системы.

Вычислительный алгоритм решения такой задачи представляет собой численное интегрирование уравнений движения твердых тел и дискретных элементов пневмооболочек.

Дискретное представление поверхности мягкой оболочки позволяет свести уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Обычно численные методы разрабатывают для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, поэтому сводят уравнения динамики второго порядка к системе уравнений первого порядка. Сложная картина деформации оболочки и её взаимодействие с окружающими телами делают систему дифференциальных уравнений существенно нелинейной.

Другим методом получения канонической системы уравнений является её Гамильтоново представление, состоящее в том, что вначале записывается функция Гамильтона, т. е. полная энергия исследуемой пневмоупругой системы описывается в функциях обобщенных координат и импульсов, а далее получают каноническую систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Полученная система уравнений решается численным методом, например, методом Рунге–Кутта четвертого порядка.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ПНЕВМОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим пневмоупругую систему, состоящую из взаимодействующих твердых тел и мягких оболочек, прикрепленных к ним. Полная энергия такой системы состоит из энергий как твердых тел, так и мягких оболочек.

Полная энергия твердых тел записывается как функция координат и импульсов этих тел.

Гамильтониан пневмоупругой системы будет выглядеть следующим образом:

$$H = \sum_{k=1}^{S} T_k + \sum_{k=1}^{S} E_k + E_A \quad (k = 1, 2, .., S), \tag{2}$$

где T_k — кинетическая энергия твердого тела, E_k — потенциальная энергия твердого тела, E_A — полная энергия мягких оболочек, S — количество твердых тел в системе.

Кинетическая энергия твердых тел при плоскопараллельном движении равна

$$T_k = \frac{M_k \dot{\bar{r}}_k^2}{2} + \frac{J_k \bar{\omega}_k^2}{2} = \frac{\bar{P}_k^2}{2M_k} + \frac{\bar{L}_k^2}{2J_k}, \tag{3}$$

где $\bar{r}_k$ — радиус-вектор центра масс k-го тела, компоненты которого можно принять за обобщённые координаты, $\dot{\bar{r}}_k$ — скорость и $\bar{\omega}_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial t}$ — угловая скорость движения, φ_k — угол поворота k-го твердого тела, M_k, J_k — масса и момент инерции твердых тел, $\bar{P}_k$, $\bar{L}_k$ — импульс и кинетический момент твердых тел, эти же параметры выступают обобщёнными импульсами.

Массу тела M_k можно вычислить методом интегрирования по k-му телу в виде

$$M_k = \iiint\limits_{V_k} \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \quad (k = 1, 2, .., S). \tag{4}$$

Радиус-вектор центра масс твердых тел можно вычислить методом интегрирования по объему тела следующим образом:

$$\bar{r}_k = \frac{1}{M_k} \iiint\limits_{V_k} \bar{r} \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \tag{5}$$

Момент инерции тела J_k относительно оси вращения oz вычисляется следующим образом:

$$J_k = \iiint\limits_{V_k} (x^2 + y^2) \rho(\bar{r})\, dV. \tag{6}$$

Потенциальная энергия тела в поле тяжести рассматриваемой планеты равна

$$E_k = M_k \bar{g} \bar{r}_k. \tag{7}$$

Энергия пневмооболочки E_A состоит из кинетической энергии движения оболочки, упругой энергии оболочки и потенциальной энергии этой оболочки в поле тяжести рассматриваемой планеты.

Полная энергия оболочки равна

$$E_A = \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} \dot{\bar{r}}^2 \gamma dS + \iint\limits_{\Omega} W dS + \iint\limits_{\Omega} \bar{g} \bar{r} \gamma dS, \tag{8}$$

где $\bar{r}$, $\dot{\bar{r}}$ — радиус-вектор и скорость поверхности мягкой оболочки, γ — поверхностная плотность материала, $\bar{g}$ — ускорение свободного падения у поверхности планеты, W — удельная, упругая энергия оболочки, Ω — область поверхности мягкой оболочки.

Замкнутая мягкая оболочка формируется газом, закачанным в нее под давлением P выше атмосферного и совершающим работу над оболочкой.

При взаимодействии оболочки с поверхностями твердых тел изменяется объем оболочки, что приводит к изменению давления в ней. Также давление в оболочке может меняться вследствие течения газа из одной полости оболочки в другую или во внешнюю среду через отверстия.

Уравнение изменения давления газа при политропном процессе в i-й полости оболочки записывается в виде [3]

$$\dot{P}_i = \frac{\gamma P_i}{\rho_i W_i} \left(\sum_l Q_{il} - \rho_i \dot{W}_i \right), \quad i = 1, 2, ..., K, \quad l = 1, 2, ..., K, \tag{9}$$

где P_i, ρ_i — давление и плотность газа в i-м отсеке пневмооболочки; Q_{il} — массовый расход воздуха из i-й полости пневмооболочки объема W_i в l-ю полость; γ — показатель политропы, K — количество изолированных отсеков.

Объем полости оболочки W_i вычисляется интегрированием по i-й полости в виде

$$W_i = \iiint\limits_{V} dx\, dy\, dz = \frac{1}{3} \iint\limits_{\Omega_i} \bar{r} \bar{n}\, dS \quad (i = 1, 2, ..., K). \tag{10}$$

Скорость изменения объема $\dot{W}_i$ в i-й полости оболочки можно вычислить как производную от объема W_i по времени или через интегрирование скорости изменения

$$\dot{W}_i = \frac{\partial W_i}{\partial t} = \iint\limits_{\Omega_i} \dot{\bar{r}} \bar{n} dS \quad (i = 1, 2, ..., K). \tag{11}$$

Работа A_0 равна работе, совершаемой давлением газа и нормального давления поверхности твердых тел над оболочкой и работе сил трения над оболочкой:

$$A_0 = \int\limits_{t_1}^{t_2} \iint\limits_{\Omega} P\, \dot{\bar{r}}\, \bar{n}\, dS\, dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} \iint\limits_{\Omega} -kP\, \dot{\bar{r}} \bar{\tau}\, dS\, dt, \tag{12}$$

где P — давление газа, находящегося в оболочке, и нормальное давление твердых тел на оболочку, Ω — поверхность оболочки, k — коэффициент трения, $\bar{n}$, $\bar{\tau}$ — нормальный и тангенциальный единичные векторы к поверхности оболочки в плоскости движения системы.

Выражение для удельной энергии деформации оболочки имеет вид [2]

$$W = \frac{1}{2}(T_1\varepsilon_1 + T_2\varepsilon_2 + S_1\omega^{(1)} + S_2\omega^{(2)} + \\ + G_1\chi^{(1)} + G_2\chi^{(2)} + H_1\tau^{(1)} + H_2\tau^{(2)}). \tag{13}$$

В зависимости от решаемой задачи удельную энергию оболочки можно выразить через чистые компоненты деформации натяжения и сдвига:

$$W = \tfrac{Eh}{1-\sigma^2}[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 - 2(1-\sigma)(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \tfrac{1}{4}\omega^2)] + \\ + \tfrac{Eh^3}{3(1-\sigma^2)}[(\chi_1+\chi_2)^2 - 2(1-\sigma)(\chi_1\chi_2 - \tau^2)], \tag{14}$$

или в компонентах усилий, которые однозначно связаны с компонентами тангенциальных деформаций

$$W = \tfrac{1}{4Eh}[(T_1+T_2)^2 - 2(1+\sigma)(T_1T_2 + S_1S_2)] + \\ + \tfrac{3}{4Eh^3}[(G_1+G_2)^2 - 2(1+\sigma)(G_1G_2 + H_1H_2)], \tag{15}$$

где T_1, T_2 — усилия в элементах оболочки по направлению координатных линий, S_1, S_2 — сдвигающие усилия в оболочке вдоль координатных линий, G_1, G_2, H_1, H_2 — изгибающие и крутящие моменты в оболочке, χ — угол между координатными линиями, τ — угол между касательными натяжениями в косых сечениях оболочки, ε_1, ε_2 — относительные растяжения оболочки в направлении координатных линий, ω — сдвиг, равный изменению угла между координатными линиями, E — модуль упругости, σ — коэффициент Пуассона.

В безмоментной теории оболочек допускается, что

$$G_1 = G_2 = H_1 = H_2 = 0, \\ S_1 = -S_2, \quad \omega^{(1)} = -\omega^{(2)} = \frac{\omega}{2}. \tag{16}$$

В этом случае компоненты тангенциальной деформации через усилия записываются так:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2Eh}(T_1 - \sigma T_2), \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2Eh}(T_2 - \sigma T_1), \\ \omega = \frac{1+\sigma}{Eh}S. \tag{17}$$

Усилия, связанные с тангенциальными деформациями, имеют вид

$$T_1 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2), \\ T_1 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1), \\ S = \frac{Eh}{1+\sigma}\omega. \tag{18}$$

Удельная упругая энергия равна

$$W = \frac{1}{2}(T_1\varepsilon_1 + T_2\varepsilon_2 + S_1\omega^{(1)} + S_2\omega^{(2)}) = \\ = \frac{1}{2}(T_1\varepsilon_1 + T_2\varepsilon_2 + S\omega), \tag{19}$$

где ε_1, ε_2 — относительные растяжения вдоль осей координатных линий, ω — изменение угла между координатными линиями.

При этом энергия в деформациях имеет вид

$$W = \tfrac{Eh}{1-\sigma^2}[(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 - 2(1-\sigma)(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \tfrac{1}{4}\omega^2)] = \\ = \tfrac{Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\sigma\varepsilon_1\varepsilon_2 + \omega^2 - \sigma\omega^2)]; \tag{20}$$

энергия в усилиях имеет следующий вид:

$$W = \tfrac{1}{4Eh}[(T_1+T_2)^2 - 2(1+\sigma)(T_1T_2 + S_1S_2)] = \\ = \tfrac{1}{4Eh}(T_1^2 + T_2^2 - 2\sigma T_1T_2 - 2(1+\sigma)S^2), \tag{21}$$

где верхние индексы соответствуют энергетическим компонентам деформации.

При исследовании динамики ударного взаимодействия мягких оболочек с твердыми телами можно принять коэффициент Пуассона равным нулю.

Тогда удельная упругая энергия в деформациях и усилиях такова:

$$W = Eh(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \omega^2) = \\ = \frac{1}{4Eh}(T_1^2 + T_2^2 - 2S^2), \quad (22)$$

где ω — угол сдвига.

Энергию мягкой оболочки можно выразить через координаты и импульсы дискретных элементов мягкой оболочки, состоящих из упругой энергии натяжения этих элементов и кинетической энергии масс элементов, сосредоточенных в точках.

Реальные пневмоупругие системы являются диссипативными системами и, следовательно, в уравнениях Гамильтона системы необходимо учесть работу неконсервативных сил и работу газа, находящегося в оболочке над элементами оболочки.

2. ЧИСЛЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОДЕЛИ ОБОЛОЧКИ ПНЕВМОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ

Дискретное представление поверхности мягкой оболочки состоит в нанесении на раскройную форму оболочки ортогональной сетки, состоящей из двух семейств линий α, β. Целые значения $\alpha(1, 2, .., N)$ и $\beta(1, 2, .., M)$ на пересечениях образуют центральные узлы сетки элементов, где N — количество узлов в меридиональном направлении, M — количество узлов в широтном направлении. Сетка линий разбивает поверхность оболочки на четырехугольные элементы (рис. 1).

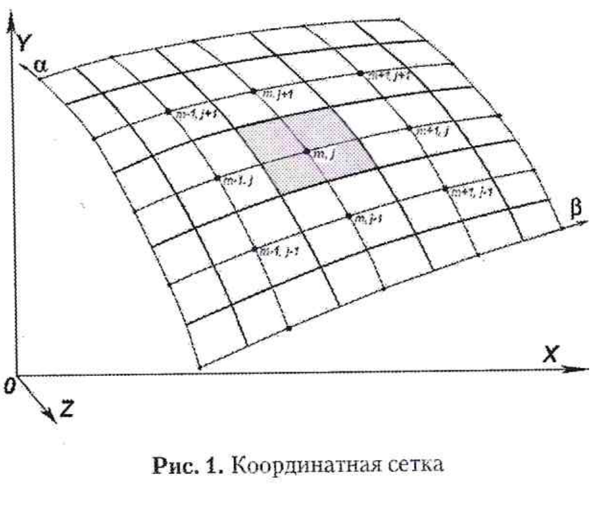

Рис. 1. Координатная сетка

Сетка разбивает поверхность оболочки на элементы, для каждой ячейки вычисляются геометрические параметры при раскройной форме оболочки. Для определения геометрических параметров оболочки вводится внешняя декартовая система координат $Oxyz$ и каждому узлу ячейки соотвстствуст радиус-вектор $\bar{r}_{m,j}$.

Газ повышенного давления растягивает оболочку вместе с сеткой, образующей лагранжеву систему координат. Масса элемента сосредоточена в его геометрическом центре, что позволяет движение оболочки моделировать как движение материальной точки под действием упругих усилий в оболочке и давления внешней среды, а также взаимодействие с поверхностями твердых тел (рис. 2).

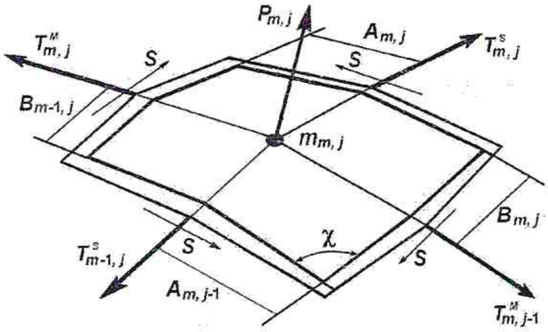

Рис. 2. Элемент поверхности оболочки

Подобная дискретная модель оболочки позволяет решать задачи динамики оболочки и, как частный случай, задачи пневмостатики методом установления.

Полная энергия всей оболочки запишется так:

$$E_0 = \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{p_{m,j}^2}{2m_{m,j}} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} W_{m,j} dS_{m,j} + \\ + \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} m_{m,j}\bar{g}\bar{r}_{m,j}. \quad (23)$$

Работа сил давления газа и сил трения при контакте мягкой оболочки с поверхностью твердых тел равна

$$A_0 = \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\int_{t_1}^{t_2} P dS_{m,j}\dot{\bar{r}}_{m,j}\bar{n}_{m,j}\, dt + \\ + \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\int_{t_1}^{t_2} -kP dS_{m,j}\dot{\bar{r}}_{m,j}\bar{\tau}_{m,j}\, dt, \quad (24)$$

где $m_{m,j} = \gamma \; dS_{m,j}$ — масса элемента оболочки, k — коэффициент трения, $\bar{n}_{m,j}$, $\bar{\tau}_{m,j}$ — нормальный и тангенциальный единичные векторы к поверхности оболочки в плоскости движения системы.

Площадь элемента мягкой оболочки равна

$$dS_{m,j} = \frac{1}{4}(A_{m,j-1} + A_{m,j})(B_{m-1,j} + B_{m,j}) \sin \chi, \tag{25}$$

где геометрические параметры элемента вычисляются так:

$$\begin{aligned} A_{m,j} &= \tfrac{|\bar{r}_{m,j+1} - \bar{r}_{m,j}|}{2}; \quad A_{m,j-1} = \tfrac{|\bar{r}_{m,j} - \bar{r}_{m,j-1}|}{2}; \\ B_{m,j} &= \tfrac{|\bar{r}_{m+1,j} - \bar{r}_{m,j}|}{2}; \quad B_{m-1,j} = \tfrac{|\bar{r}_{m,j} - \bar{r}_{m-1,j}|}{2}. \end{aligned} \tag{26}$$

Упругая удельная энергия элемента мягкой оболочки при растяжении равна:

$$\begin{aligned} W_{m,j-1} &= E\varepsilon^2_{m,j-1} = \\ &= E\left(\left(\frac{\bar{r}_{m,j-1}}{2} - \frac{\bar{r}_{m,j}}{2} - A_{m,j-1}\right)/A_{m,j-1}\right)^2; \\ W_{m,j+1} &= E\varepsilon^2_{m,j+1} = \\ &= E\left(\left(\frac{\bar{r}_{m,j}}{2} - \frac{\bar{r}_{m,j+1}}{2} - A_{m,j}\right)/A_{m,j}\right)^2; \\ W_{m-1,j} &= E\varepsilon^2_{m-1,j} = \\ &= E\left(\left(\frac{\bar{r}_{m-1,j}}{2} - \frac{\bar{r}_{m,j}}{2} - B_{m-1,j}\right)/B_{m-1,j}\right)^2; \\ W_{m+1,j} &= E\varepsilon^2_{m+1,j} = \\ &= E\left(\left(\frac{\bar{r}_{m,j}}{2} - \frac{\bar{r}_{m+1,j}}{2} - B_{m,j}\right)/B_{m,j}\right)^2. \end{aligned} \tag{27}$$

Полная энергия элемента мягкой оболочки с учетом деформации сдвига равна

$$\begin{aligned} W_{m,j} = W_{m,j-1} + W_{m,j+1} + \\ + W_{m-1,j} + W_{m+1,j} + E\,\omega^2, \end{aligned} \tag{28}$$

где ω вычисляются по формуле

$$\chi = \arcsin\frac{|(\bar{r}_{m,j-1} - \bar{r}_{m,j}) \times (\bar{r}_{m+1,j-1} - \bar{r}_{m,j})|}{|\bar{r}_{m,j-1} - \bar{r}_{m,j}|\;|\bar{r}_{m,j-1} - \bar{r}_{m,j}|}, \tag{29}$$

где χ — угол между координатными линиями.

В инженерных расчетах для быстрого подбора параметров системы возможно использование приближенных методов, основанных на аппроксимации упругой характеристики пневмооболочки.

3. КАНОНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Обобщенные координаты пневмоупругой системы состоят из координат центра масс твердых тел и углов поворота x_k, y_k, φ_k, $k = (1..S)$, координат узловых точек дискретных элементов оболочки $x_{m,j}$, $y_{m,j}$, $z_{m,j}$, $m = (1..M)$, $j = (1..N)$.

В качестве обобщенных импульсов пневмоупругой системы примем импульсы и кинетические моменты твердых тел $\bar{P}_k$, $\bar{L}_k$, $k = (1..S)$, вместе с импульсами элементов оболочки $\bar{P}_{m,j}$, $m = (1..M)$, $j = (1..N)$.

Вектор обобщенных координат примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{q} = (&x_1, x_2, .., x_S, y_1, y_2, .., y_S, \varphi_{1z}, \varphi_{2z}, .., \\ &\varphi_{Sz}, x_{11}, x_{12}, .., x_{21}, x_{22}, ..x_{MN}, y_{11}, y_{12}, .., \\ &y_{21}, y_{22}, .., y_{MN}, z_{11}, z_{12}, .., z_{21}, z_{22}, .., z_{MN}) \end{aligned} \tag{30}$$

или в векторной форме:

$$\begin{aligned} \bar{q} = (&\bar{r}_1, \bar{r}_2, ..., \bar{r}_S, \bar{\varphi}_{1z}, \bar{\varphi}_{2z}, ..., \bar{\varphi}_{Sz}, \bar{r}_{11}, \bar{r}_{12}, ..., \\ &\bar{r}_{1N}, \bar{r}_{21}, ..., \bar{r}_{2N}, ..., \bar{r}_{MN}). \end{aligned} \tag{31}$$

Вектор обобщенных импульсов системы твердых тел с прикрепленными оболочками примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{p} = (&P_{1x}, P_{2x}, ..., P_{Sx}, P_{1y}, P_{2y}, ..., \\ &P_{Sy}, L_{1z}, L_{2z}, ..., L_{Sz}, p_{11x}, p_{12x}, ..., p_{21x}, p_{22x}, ..., \\ &p_{MNx}, p_{11y}, p_{12y}, ..., p_{21y}, p_{22y}, ..., p_{MNy}, \\ &p_{11z}, p_{12z}, ..., p_{21z}, p_{22z}, ..., p_{MNz}) \end{aligned} \tag{32}$$

или в векторной форме:

$$\begin{aligned} \bar{p} = (&\bar{P}_1, \bar{P}_2, ..., \bar{P}_S, \bar{L}_1, \bar{L}_2, ..., \\ &\bar{L}_S, \bar{p}_{11}, \bar{p}_{12}, ..., \bar{p}_{21}, \bar{p}_{22}, ..., \bar{p}_{MN}). \end{aligned} \tag{33}$$

Количество обобщенных координат (число степеней свободы пневмоупругой системы) равно $I = 3S + 3MN$.

Функция Гамильтона является функцией обобщенных координат и обобщенных импульсов системы:

$$H = H(\bar{q}, \bar{p}). \tag{34}$$

Реальные пневмоупругие системы чаще всего являются неконсервативными, и, следовательно, необходимо учитывать диссипацию энергии, которая в общем случае является функцией обобщенной скорости, в простейшем случае представляет из себя положительно определенную квадратичную форму от обобщенных скоростей (функция Релея) и имеет вид [4]:

$$D = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I} b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \tag{35}$$

где $b_{i,j}$ — коэффициенты диссипации, в линейном приближении описывают рассеивание энергии на твердых телах и на движущейся оболочке с учетом поглощения энергии внутри материала оболочки при относительном движении элементов оболочки и составляют следующую матрицу:

$$B = \begin{vmatrix} c_1\, 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0\, c_2 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0\, 0 \ldots c_S & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0\, 0 \ldots 0 & c_a+2c_r & -c_r & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0\, 0 \ldots 0 & -c_r & c_a+2c_r & -c_r \ldots 0 & 0 & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0\, 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \ldots -c_r & c_a+2c_r & -c_r \\ 0\, 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & -c_r & c_a+2c_r \end{vmatrix}, \tag{36}$$

где c_k — коэффициент диссипации твердого тела по $\dot{q}_k$ обобщенной скорости, $k = 1, 2, \ldots 3S$, c_a — коэффициент диссипации по абсолютной скорости движения элемента, c_r — коэффициент диссипации по относительным скоростям соседних элементов.

Уравнения движения пневмоупругой системы, входящие в состав канонической системы, являются уравнениями Гамильтона и могут быть получены простыми вычислениями частных производных функции Гамильтона по обобщенным импульсам и координатам.

Система уравнений Гамильтона в общем случае имеет вид

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial A}{\partial q_i}\right), \end{cases} \tag{37}$$

где q_i, p_i — обобщенные координаты и импульсы системы.

Рассмотрим динамику ударного взаимодействия пневмоупругой системы с экраном. Поверхность оболочки, входящей в систему, разбиваем ортогональной сеткой размера $(N \times M)$.

Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{\bar{P}^2}{2M} + \frac{L^2}{2J} + m\bar{g}\bar{R} + \\ + \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{p_{m,j}^2}{2m_{m,j}} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} W_{m,j}dS_{m,j} + \\ + \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} m_{m,j}\bar{g}\bar{r}_{m,j}, \tag{38}$$

Функция диссипации системы запишется следующим образом:

$$D = \frac{1}{2}c_v\dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=4}^{I}\sum_{j=4}^{I} b_{ij}\dot{\bar{r}}_i\dot{\bar{r}}_j. \tag{39}$$

Работа внешней среды и газа в полостях оболочки над системой равна

$$A_A = \int_{t_1}^{t_2} PdS_{m,j}\dot{\bar{r}}_M\bar{n}_M\,dt + \\ + \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\int_{t_1}^{t_2} PdS_{m,j}\dot{\bar{r}}_{m,j}\bar{n}_{m,j}\,dt + \\ + \sum_{j=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\int_{t_1}^{t_2} -kPdS_{m,j}\dot{\bar{r}}_{m,j}\bar{\tau}_{m,j}\,dt. \tag{40}$$

Математическая модель динамического взаимодействия пневмоупругой системы с нелинейным источником энергии вблизи экрана включает уравнения движения твердых тел и пневмооболочки

$$\begin{aligned} &\dot{\bar{q}}_k = \frac{\bar{p}_k}{M_k}, \quad k = 1, .., S, \\ &\dot{\bar{p}}_k = \bar{F}_P + \bar{F}_C - \bar{F}_E - \bar{F}_B + M_k\bar{g}; \\ &\dot{\bar{q}}_{ij} = \frac{\bar{p}_{ij}}{m_{ij}}; \\ &\dot{\bar{p}}_{ij} = \bar{T}_{ij}(u,v) + \bar{P}_{ij}(u,v) + \\ &\quad + \bar{F}_{ij}(u,v) - C_a(\dot{\bar{q}}_{ij} + \dot{\bar{r}}) - \\ &\quad - C_r(2\dot{\bar{q}}_{ij} - \dot{\bar{q}}_{i-1j} - \dot{\bar{q}}_{i+1j}); \\ &\dot{P}_i = \frac{\gamma P_i}{\rho_i W_i}\left(\sum_k Q_{ik} - \rho_i\dot{W}_i\right), \end{aligned} \tag{41}$$

где M_k — масса твердого тела; $\bar{F}_E$ — сила, развиваемая нелинейным источником энергии; $\bar{F}_B$ — сила взаимодействия с пневмооболочкой; P_i, ρ_i — давление и плотность газа в i-м отсеке пневмооболочки; $Q_{i,k}$ — массовый расход воздуха из i-й полости пневмооболочки объема W_i в k-ю полость; γ — показатель адиабаты; F_C — силы реакции пневмооболочки; T — тензор мембранных усилий;

p — плотность поверхностной нагрузки от сил давления, F_G — силы воздействия окружающих тел; F_P — поверхностные силы и момент силы давления газа на твердое тело; W_i — объем i-й полости пневмооболочки; g — ускорение свободного падения.

Если мягкая, безмоментная секционированная оболочка не замкнута и имеет свободные края, то к уравнениям движения (41) должны быть добавлены граничные условия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе [1] подробно описаны вопросы задания граничных условий при наделении пневмоконструкции некоторыми идеализированными условиями, а также граничные условия в местах соединения мягких оболочек с каркасирующими лентами.

В предлагаемой математической модели приняты допущения о безмоментности оболочки на изгиб, отсюда в случае жесткого закрепления оболочки на твердом теле (опорах) элементы оболочек, прикрепленные к твердым телам, движутся вместе с точками закрепления на твердом теле и имеют одинаковые координаты и скорости, а усилия, приложенные к граничным элементам, уравновешены реакцией опоры. На свободном краю оболочки усилия на граничных элементах со стороны свободного края будут равны нулю.

Алгоритм численного расчета упругой деформации пневмооболочек, представленный в работе, позволяет упростить процесс конструирования уравнений динамики в задачах пневмоупругости, при этом математическая модель позволяет решать задачи пневмоупругости с учетом анизотропии материала оболочки или учитывать нелинейную зависимость усилий в материале от деформации, а также разный характер взаимодействия мягких оболочек как с твердыми телами, так и с другими оболочками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ридель, В. В.** Динамика мягких оболочек / В. В. Ридель, Б. В. Гулин. М.: Наука, 1990. 205 с.
2. **Гольденвейзер, А.Л.** Теория упругих тонких оболочек / А. Л. Гольденвейзер. М.: Гос. изд-во техн.-теоретич. лит-ры, 1953. 544 с.
3. **Комаров, С.С.** Численное моделирование посадки спускаемых объектов с пневмоамортизатором / С. С. Комаров, Н. И. Цвиленева, Н. И. Мискактин, Э. Э. Валиуллина // Актуальные проблемы авиадвигателестроения. Уфа: УГАТУ, 1998. С. 415–435.
4. **Бухгольц, Н.Н.** Основной курс теоретической механики / Н. Н. Бухгольц. М.: Наука, 1956. Ч. 2. 460 с.

ОБ АВТОРАХ

Комаров Сергей Сергеевич, ст. науч. сотр., рук. СКБ авиац. устройств. Дипл. инж.-мех. по авиац. двигателям (УАИ, 1967). Д-р техн. наук по динамике, прочности машин, приборов и аппаратуры (УГАТУ, 1999). Иссл. в обл. пневмоупругости транспортных систем.

Мискактин Николай Иванович, ст. науч. сотр. того же СКБ. Дипл. физик-теоретик (БГУ, 1976). Канд. техн. наук по проектированию и конструкциям судов (Ленингр. кораблестр. ин-т, 1987). Иссл. в обл. теории оболочек и газовой динамики.