Уфа: УГАТУ, 2006 Вестник УГАТУ Т. 7, № 1 (14). С. 54–60

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МЕХАНИКА

УДК 539.3

А. Г. ХАКИМОВ

ДИНАМИКА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ УПРУГИХ И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Разработаны методы и алгоритмы расчета пространственных задач упругопластического деформирования твердых тел. Построены конечно-разностные уравнения типа Уилкинса для решения динамических трехмерных задач с учетом теплопроводности при различных граничных условиях и решен пример.
Большие перемещения; упругие и упругопластические тела; пространственные задачи

В разработке различных математических моделей процессов деформирования пространственных твердых тел используют различные теоретические и практические подходы. Численный алгоритм [1] разработан для решения осесимметричных и плоских динамических задач, кроме того, он позволяет решать квазистационарные задачи.

В данной работе приводится постановка и алгоритм численного решения задачи упругопластического деформирования пространственных твердых тел методом естественной аппроксимации производных.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основные уравнения. Основные уравнения, описывающие движение элемента твердого деформируемого тела, в прямоугольных декартовых координатах x^i $(i = 1, 2, 3)$ имеют вид:

• уравнения движения

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^j} = \rho \ddot{x}^i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

• уравнение неразрывности

$$\frac{\dot{V}}{V} = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^i},$$

• уравнение энергии (суммирование по повторяющимся индексам)

$$\dot{E} = -(P+q)\dot{V} + \frac{1}{2}V(S_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + S_{ii}\dot{\varepsilon}_{ii}),$$

• уравнения состояния: компоненты девиатора напряжений

$$\dot{S}_{ij} = \mu[(1+\delta_{ij})\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\dot{V}}{V}] + \nu_{ij},$$

$$(i, j = 1, 2, 3; \quad \text{не суммировать!})$$

• относительные деформации

$$\dot{\varepsilon}_{ii} = \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^i}, \quad (\text{не суммировать!})$$
$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial x^i}\right), \quad (i \neq j),$$

• гидростатическое давление (среднее напряжение)

$$P = -k(\ln V - 3\alpha T),$$
$$P = -\frac{\sigma_{\text{т}}}{3}, \quad V \geqslant \exp\left(\frac{\sigma_{\text{т}}}{3k} + 3\alpha T\right),$$

• линейная и квадратичная искусственная вязкость

$$q_L = \frac{a\, C_L\, \rho_0 \sqrt[3]{A}}{V} \cdot \left|\frac{\dot{V}}{V}\right|,$$
$$q_k = \frac{C_0^2 \rho_0 \sqrt[3]{A^2}}{V} \cdot \left|\frac{\dot{V}}{V}\right|^2,$$

• нормальные напряжения

$$T_{ij} = S_{ij} - (P+q), \quad i = j,$$

• условие пластичности Мизеса

$$S_{ij}\, S_{ij} - \frac{2}{3}\sigma_{\text{т}}^2 \leqslant 0,$$

• уравнение теплопроводности

$$\rho_0\, c\, \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_1 \nabla^2 T + \dot{E}.$$

Здесь T_{ij}, S_{ij}, ε_{ij} — компоненты тензора напряжений, девиатора напряжений, тензора деформаций в сокращенной записи ($i, j = 1, 2, 3$), δ_{ij} — символ Кронекера, ν_{ij} — поправки на поворот, P — среднее напряжение, взятое со знаком минус, $q = q_L + q_k$ — искусственная вязкость, σ_T — предел текучести материала, V — относительный объем, ρ, ρ_0 — плотность и ее начальное значение, E — внутренняя энергия на единицу начального объема, k, μ — модули объемного сжатия и сдвига, α — коэффициент линейного расширения, c — удельная теплоемкость, λ_1 — коэффициент теплопроводности, T — изменение температуры от стандартного значения, равного 288,15 K, t — время, ∇ — оператор Лапласа, C_0, C_L — постоянные, a — скорость звука, A — объем ячейки, точка над величинами означает производную по времени.

Граничные условия. На свободной поверхности $\sigma = \tau = 0$, σ, τ — нормальное и касательное напряжения, которые определяются выражениями

$$\sigma = \sigma_{11}, \qquad \tau = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2},$$
$$\sigma_{kl} = T_{ij} l_{ki} l_{lj}, \qquad T_{ij} = \sigma_{kl} l_{ki} l_{lj}.$$

Здесь σ_{kl} — тензор напряжений, определенный в системе прямоугольных координат $\bar{x}^k$, l_{ki} — направляющие косинусы осей новой системы координат; формулы перехода от одной системы координат к другой и обратно имеют вид

$$\bar{x}^k = l_{ki} x^i, \quad x^i = l_{ki} \bar{x}^k,$$

Неподвижная произвольная граница, заданная уравнением

$$f(x^i) = 0,$$

а) гладкая поверхность

$$\tau = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} \dot{x}^i = 0,$$

б) прилипание

$$\sigma < 0, \quad \tau < f_1 |\sigma|, \quad \dot{x}^i = 0,$$

где f_1 — коэффициент трения скольжения,

в) скольжение с трением

$$\sigma < 0, \quad \tau = f_1 |\sigma|, \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} \dot{x}^i = 0,$$

г) отрыв тела от границы

$$\sigma = 0, \quad \tau = 0.$$

Подвижная граница, параллельная плоскости $x^i = 0$: $\sigma = 0$, $\tau = 0$ — отрыв тела от границы; $\sigma < 0$, $\tau < f_1|\sigma|$, $\dot{x}^i = V_i$, — прилипание; $\sigma < 0$, $\tau = f_1|\sigma|$, $\dot{x}^i = V_i$ — скольжение с трением, где V_i — скорость перемещения границы вдоль оси x^i.

Подвижная произвольная граница, заданная уравнениями

$$x_{\text{г}}^i = x_{\text{г}}^i(\alpha^m, t),$$

где α^m $(m = 1, 2)$ — криволинейные лагранжевы координаты на подвижной границе;

а) прилипание

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_{\text{г}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{г}},$$

б) скольжение с трением

$$(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_{\text{г}}) \left(\frac{\partial r_{\text{г}}}{\partial \alpha^1} \times \frac{\partial r_{\text{г}}}{\partial \alpha^2} \right) = 0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{г}},$$

в) отрыв тела от границы

$$\sigma = 0, \quad \tau = 0,$$

где $\mathbf{r} = x^i \mathbf{i}_i$, $\mathbf{r}_{\text{г}} = x_{\text{г}}^i \mathbf{i}_i$, $\mathbf{i}_i$ — орты прямоугольной декартовой системы координат, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_{\text{г}}$ — радиусы-векторы точек на поверхности твердого деформируемого тела и на подвижной границе.

Граничные условия для температурного поля. Температура на границе задана

$$T(x_{\text{г}}^i) = T_0,$$

где T_0 — заданная температура.

Теплообмен с окружающей средой описывается выражением

$$-\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x^i} l_{ki} = \alpha_C (T - T_C),$$

где T_C — температура окружающей среды, l_{ki} — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности твердого тела, α_C — коэффициент теплообмена с окружающей средой. Для теплоизолированной поверхности $\alpha_C = 0$.

Идеальный контакт двух тел

$$T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x^i} l_{ki}^1 = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x^i} l_{ki}^2,$$

где индексы «1», «2» относятся к параметрам первого и второго тела.

Выделение тепла на границе

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x^i} l^1_{ki} + \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x^i} l^2_{ki} = Q, \quad Q = \tau V_\tau,$$
$$T_2 = T_1 + \rho_1 \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x^i} l^1_{ki} + \rho_2 \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x^i} l^2_{ki},$$
$$V_\tau = |\dot{r}_1 - \dot{r}_2|,$$

где V_τ — скорость относительного перемещения на границе первого тела относительно второго, ρ — термическое сопротивление, Q — количество тепла, выделяющегося на границе за единицу времени на единице площади.

Начальные условия. В начальный момент времени известно положение твердого тела, поле скоростей, деформаций, напряжений, температур, энергий, относительных объемов, распределение массы

$$\begin{aligned} &t = 0, \quad T_{ij} = T_{0ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{0ij}, \\ &T = T_0, \quad E = E_0, \quad V = V_0, \\ &P = P_0, \quad \dot{x}^i = (\dot{x}^i)_0, \quad x^i = x^i(\theta^j, 0), \\ &(j = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

где индекс «0» относится к параметрам твердого тела в начальный момент времени, θ^j — лагранжевы координаты твердого тела.

Если ввести безразмерные величины

$$\begin{aligned} &\bar{x}^i = x^i/L, \quad \bar{T}_{ij} = T_{ij}/\sigma_T, \quad \bar{S}_{ij} = S_{ij}/\sigma_T, \\ &\bar{P} = P/\sigma_T, \quad \bar{q} = q/\sigma_T, \quad \bar{k} = k/\sigma_T, \\ &\bar{\mu} = \mu/\sigma_T, \quad \bar{t} = ta/L, \quad \bar{\rho} = \rho a^2/\sigma_T, \\ &\bar{T} = T/T*, \quad \bar{\alpha} = \alpha T^*, \quad \bar{c} = cT^*/a^2, \\ &\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 T^*/(aL\sigma_T), \quad \bar{\alpha}_T = \alpha_c T^*/(a\sigma_T), \end{aligned}$$

то вид основных уравнений не изменяется (далее черточки над безразмерными величинами пропускаются). Здесь L — характерный размер, T^* — характерная температура, a — скорость звука.

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

Воспользуемся следующим интегральным определением частной производной функции F

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = \lim_{A \to 0} \frac{\oint\limits_S F(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_i)\, ds}{A}, \quad \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{s}}{ds},$$

где A — объем, ограниченный поверхностью s, $d\mathbf{s}$ — вектор-элемент поверхности (вектор площадки), $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к поверхности.

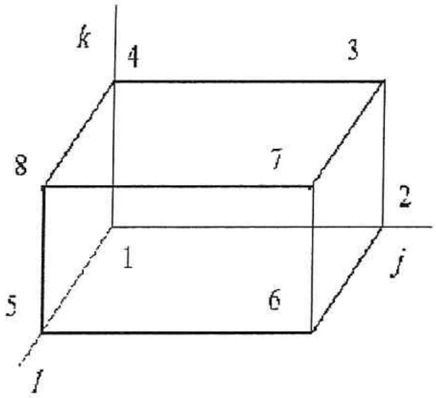

Рис. 1

Применяя эти формулы к гексаэдру, объем которого равен A (рис. 1), для функции F, определенной в вершинах $1 \div 8$, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{1}{A} \sum_{m=1}^{12} F_m s_{mi},$$

где

$$\begin{aligned} &F_1 = (F^1 + F^2 + F^4)/3, \ldots, \\ &s_{1i} = 0{,}5(\mathbf{r}_{14} \times \mathbf{r}_{12})_i, \ldots, \\ &A = \frac{1}{6}(\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{r}_{14} \cdot \mathbf{r}_{15} + \mathbf{r}_{76} \times \mathbf{r}_{78} \cdot \mathbf{r}_{73} + \\ &\quad + \mathbf{r}_{34} \times \mathbf{r}_{32} \cdot \mathbf{r}_{38} + \mathbf{r}_{58} \times \mathbf{r}_{56} \cdot \mathbf{r}_{52} + \\ &\quad + \mathbf{r}_{26} \times \mathbf{r}_{23} \cdot \mathbf{r}_{28} + \mathbf{r}_{85} \times \mathbf{r}_{84} \cdot \mathbf{r}_{82}), \\ &\mathbf{r}_{lm} = (\mathrm{x}^i_m - \mathrm{x}^i_l)\mathbf{i}_i, \\ &\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{r}_{kl} \cdot \mathbf{r}_{mn} = \\ &= \begin{vmatrix} x^1_n - x^1_m & x^2_n - x^2_m & x^3_n - x^3_m \\ x^1_j - x^1_i & x^2_j - x^2_i & x^3_j - x^3_i \\ x^1_l - x^1_k & x^2_l - x^2_k & x^3_l - x^3_k \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, эти величины дают производные в центре гексаэдра, с помощью которых можно получить выражения для производных $\frac{\partial \dot{x}^1}{\partial x^1}$, $\frac{\partial \dot{x}^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial \dot{x}^3}{\partial x^3}$ в заданной точке пространства в заданный момент времени. В используемой далее разностной схеме расчета определяются значения скоростей при приращении времени на полшага и значения пространственных координат при изменении времени на полный шаг. Значения пространственных координат и объем гексаэдра при приращении времени на полшага определяются по формулам

$$(x^i)^{n+1/2} = 0{,}5[(x^i)^{n+1} + (x^i)^n],$$
$$A^{n+1/2} = 0{,}5(A^{n+1} + A^n),$$

где $(x^i)^n$, $(x^i)^{n+1}$, A^n, A^{n+1} — координаты точек и объемы гексаэдров в моменты времени t^n и t^{n+1} соответственно. Тогда конечно-разностные соотношения приводят к точному равенству

$$\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^i} = \frac{\dot{A}}{A},$$

которое равносильно уравнению неразрывности.

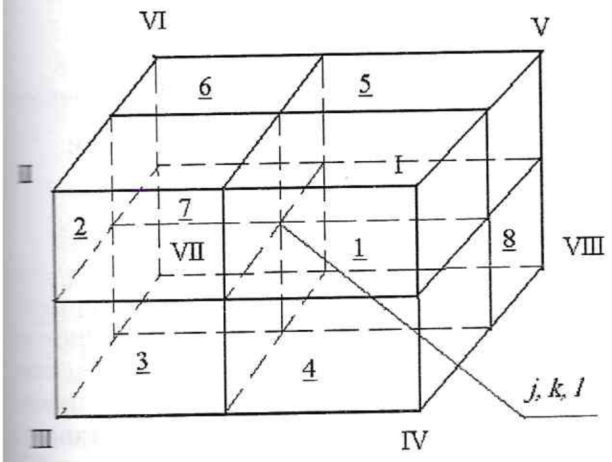

Рис. 2

Для вычисления производных в узловой точке j,k,l используются значения функции в окружающих эту точку гексаэдрах $\underline{1}$, $\underline{2}$, ..., $\underline{8}$ (рис. 2), причем

$$\begin{aligned} &\underline{1} \equiv j+1/2, k+1/2, l+1/2;\dots \\ &1 \equiv j,k,l;\dots \\ &I \equiv j+1,k+1,l+1;\dots, \end{aligned}$$

поэтому

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\right)_{j,k,l} = \frac{1}{B}\sum_{n=1}^{8} F_n S_{n,i}, \quad B = \sum_{n=1}^{8} A_n,$$
$$S_I = S_{34} + S_{78} + S_{1112}, \dots,$$
$$S_{12} = S_1 + S_2, \dots.$$

Конечно-разностные уравнения. Область, занятая телом, делится на гексаэдры сеткой j-k-l, которая движется вместе с телом (рис. 2). Масса, соответствующая каждому гексаэдру в начальный момент времени, определяется умножением начальной плотности на объем гексаэдра. Например, масса в начальный момент времени для гексаэдра $\underline{1}$ вычисляется по формуле

$$M_1 = \left(\frac{\rho_0}{V_0}\right)_1.$$

Массы M_2, M_3, ..., M_8 вычисляются аналогично.

Сохранение массы

$$V_1^n = \left(\frac{\rho^0}{M}\right)_1 A_1^n, \quad V_1^n = \left(\frac{\rho^0}{\rho^n}\right)_1.$$

Уравнения движения

$$(\dot{x}^i)^{n+1/2}_{j,k,l} = (\dot{x}^i)^{n-1/2}_{j,k,l} + \frac{\Delta t^n}{\rho_{j,k,l}}\left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^j}\right)^n_{j,k,l},$$
$$\rho_{j,k,l} = \frac{1}{8B}\sum_{m=1}^{8} \rho_m A_m,$$
$$(\mathrm{x}^i)^{n+1}_{j,k,l} = (\mathrm{x}^i)^n_{j,k,l} + (\dot{x}^i)^{n+1/2}_{j,k,l}\,\Delta t^{n+1/2}.$$

Деформации

$$(\dot{\varepsilon}_{ii})_1^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^i}\right)_1^{n+\frac{1}{2}} \text{ (не суммировать!)},$$
$$(\dot{\varepsilon}_{ij})_1^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{x}^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial x^i}\right)_1^{n+\frac{1}{2}}, \quad (i \neq j),$$
$$A_1^{n+1/2} = 0{,}5(A_1^{n+1} + A_1^n),$$
$$(\Delta\varepsilon_{ii})_1^{n+\frac{1}{2}} = (\dot{\varepsilon}_{ii})_1^{n+\frac{1}{2}}\,\Delta t^{n+1/2} \text{(не суммировать!)},$$
$$(\Delta\varepsilon_{ij})_1^{n+1/2} = (\dot{\varepsilon}_{ij})_1^{n+1/2}\Delta t^{n+1/2}, (i \neq j),$$
$$\left(\frac{\dot{V}}{V}\right)_1^{n+1/2} = (\dot{\varepsilon}_{ii})_1^{n+1/2},$$
$$\left(\frac{\Delta V}{V}\right)_1^{n+1/2} = \left(\frac{\dot{V}}{V}\right)_1^{n+1/2}\Delta t^{n+1/2} = \frac{V_1^{n+1} - V_1^n}{V_1^{n+1/2}},$$
$$V_1^{n+1/2} = 0{,}5(V_1^{n+1} + V_1^n).$$

Напряжения

$$(S'_{ii})_1^{n+1} = (S_{ii})_1^n + 2\mu\left[(\Delta\varepsilon_{ii}) - \frac{1}{3}\cdot\frac{\Delta V}{V}\right]_1^{n+1/2} + $$
$$+ (\nu'_{ii})_1^n, \text{ (не суммировать!)},$$
$$(S'_{ij})_1^{n+1} = (S_{ij})_1^n + \mu(\Delta\varepsilon_{ij})_1^{n+1/2}\psi'_{ij} + (\nu'_{ij})_1^n,$$
$$\psi'_{12} = 1, \quad \psi'_{13} = \psi'_{23} = 0,$$
$$(\nu'_{11})_1^n = \frac{(S_{11})_1^n - (S_{22})_1^n}{2}\left[(l_{11}'^2 - l_{12}'^2) - 1\right] +$$
$$+ 2(S_{12})_1^n l'_{11} l'_{12},$$
$$(\nu'_{22})_1^n = -(\nu'_{11})_1^n, \quad (\nu'_{33})_1^n = 0,$$
$$(\nu'_{12})_1^n = (S_{12})_1^n[(l_{11}'^2 - l_{12}'^2) - 1] -$$
$$- [(S_{11})_1^n - (S_{22})_1^n] l'_{11} l'_{12},$$
$$(\nu'_{23})_1^n = (S_{23})_1^n(l_{11}'^2 - 1) - (S_{13})_1^n l'_{12},$$
$$(\nu'_{13})_1^n = (S_{13})_1^n(l_{11}'^2 - 1) + (S_{23})_1^n l'_{12},$$
$$l'_{11} = \cos\omega_3, \quad l'_{12} = \sin\omega_3, \quad \omega_3 = -\omega_{3y},$$

$$\sin\omega_{3y} = \frac{\Delta t^{n+1/2}}{2}\left(\frac{\partial \dot{x}^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \dot{x}^1}{\partial x^2}\right)_1^{n+1/2},$$
$$(S''_{ii})_1^{n+1} = (S'_{ii})_1^{n+1} + (\nu''_{ii})_1^{n+1} \text{ (не суммировать!)},$$
$$(S''_{ij})_1^{n+1} = (S'_{ij})_1^{n+1} + \mu(\Delta\varepsilon_{ij})_1^{n+1/2}\psi''_{ij} + (\nu''_{ij})_1,$$
$$\psi''_{23} = 1, \quad \psi''_{12} = \psi''_{13} = 0,$$
$$(\nu''_{ij})_1^{n+1} = (S'_{kl})_1^{n+1}(l''_{ki}l''_{lj} - 1),$$
$$l''_{ki} = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & l''_{22} & l''_{23} \\ 0 & l''_{32} & l''_{33} \end{matrix}\right\},$$
$$l''_{22} = \cos\omega_1, \quad l''_{23} = \sin\omega_1, \quad l''_{32} = -l''_{23},$$
$$l''_{33} = l''_{22}, \quad \omega_1 = -\omega_{1y},$$
$$\sin\omega_{1y} = \frac{\Delta t^{n+1/2}}{2}\left(\frac{\partial \dot{x}^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \dot{x}^2}{\partial x^3}\right)_1^{n+1/2},$$
$$(S_{ii})_1^{n+1} = (S''_{ii})_1^{n+1} + (\nu'''_{ii})_1^{n+1},$$
$$\text{(не суммировать!)},$$
$$(S_{ij})_1^{n+1} = (S''_{ij})_1^{n+1} + \mu(\Delta\varepsilon_{ij})^{n+1/2}\psi'''_{ij} + (\nu'''_{ij})_1,$$
$$\psi'''_{13} = 1, \quad \psi'''_{12} = \psi'''_{23} = 0,$$
$$(\nu'''_{ij})_1^{n+1} = (S''_{kl})_1^{n+1}(l'''_{ki}l'''_{lj} - 1),$$
$$l'''_{ki} = \left\{\begin{matrix} l'''_{11} & 0 & l'''_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ l'''_{31} & 0 & l'''_{33} \end{matrix}\right\},$$
$$l'''_{11} = \cos\omega_2 = l'''_{33}, \quad l'''_{13} = \sin\omega_2,$$
$$l'''_{31} = -l'''_{13}, \omega_2 = -\omega_{2y},$$
$$\sin\omega_{2y} = \frac{\Delta t^{n+1/2}}{2}\left(\frac{\partial \dot{x}^1}{\partial x^3} - \frac{\partial \dot{x}^3}{\partial x^1}\right)_1^{n+1/2},$$
$$P_1^{n+1} = -k\ln V_1^{n+1},$$
$$q_1^{n+1/2} = \left[C_L + C_0^2\left(A_1^{n+1/2}\right)^{2/3}\left|\frac{\dot{V}}{V}\right|_1^{n+1/2}\right] \times$$
$$\times\left(\rho^0\sqrt[3]{A}\left|\frac{\dot{V}}{V}\right|\right)_1^{n+1/2},$$
$$(T_{ii})_1^{n+1} = (S_{ii})_1^{n+1} - (P^{n+1} + q^{n+1/2})_1.$$

Условие пластичности Мизеса

$$K_1^{n+1} = (S_{ij})_1^{n+1}(S_{ij})_1^{n+1} - 2\sigma_T/3.$$

Если $K_1^{n+1} > 0$, то каждое из напряжений S_{ij} умножается на $(2S_{ij}S_{ij}/3)^{1/2}\sigma_T$. Если же $K_1^{n+1} < 0$, то напряжения не изменяются.

Уравнение энергии элемента твердого деформируемого тела

$$(E)_1^{n+1} = (E)_1^n - [-0,5k(\ln V^{n+1} + \ln V^n)_1 +$$
$$+ 3k\alpha T_1^n - q_1^{n+1/2}] \cdot (V^{n+1} - V^n)_1 +$$
$$+ 0{,}5V_1^{n+1/2} \times (S_{ij}\Delta\varepsilon_{ij} + S_{ii}\Delta\varepsilon_{ii})_1^{n+1/2},$$
$$S_{ii}\Delta\varepsilon_{ii} = S_{11}\Delta\varepsilon_{11} + S_{22}\Delta\varepsilon_{22} + S_{33}\Delta\varepsilon_{33}.$$

Уравнение теплопроводности

$$T_1^{n=1} = T_1^n + \psi_1(E^{n+1} - E^n)_1 +$$
$$+ \frac{\chi_1}{AB}\sum_{m=1}^{12}\left(\sum_{j=1}^{8} T_j S_{j,i}\right)^m S_m,$$

где $\psi_1 = \frac{1}{\rho_{10}^c}$, $\chi_1 = \psi_1(\lambda_1)_1\Delta t^{n+1/2}$.

Устойчивость алгоритма численного расчета

$$\Delta t^{n+3/2} = \frac{1}{3}\cdot\left.\frac{d_{\min}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|_{(\min \text{ по } j,k,l)}.$$

Если $\Delta t^{n+3/2} > 1{,}1\Delta t^{n+1/2}$, то полагаем

$$\Delta t^{n+3/2} = 1{,}1\Delta t^{n+1/2},$$
$$\Delta t^{n+1} = \frac{1}{2}(\Delta t^{n+3/2} + \Delta t^{n+1/2}).$$

Здесь a — скорость звука, $d_{\min}^{n+1}$ — длина меньшей диагонали гексаэдра, $b = 8C_0 d_{\min}^{n+1}(\dot{V}/V)_1^{n+1/2}$, $b = 0$, $\dot{V}/V \geqslant 0$.

Граничные условия в конечных разностях. Свободная поверхность. Для узловой точки j,k,l свободной поверхности на грани 1234 суперэлемента (рис. 3) все величины, относящиеся к воображаемым ячейкам 5, 6, 7, 8, принимаются равными нулю. Далее используются уравнения движения для обычной точки. Аналогично проводятся вычисления для точек свободной поверхности, находящихся на ребре 12 или вершине 1 суперэлемента.

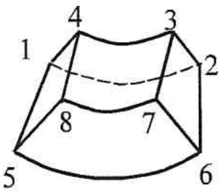

Рис. 3

Прилипание к подвижной поверхности. В этом случае скорость узловой точки j,k,l на грани, ребре или вершине суперэлемента определяется по формулам

$$(\dot{x}^i)_{j,k,l}^{n+1/2/} = \dot{x}_{\text{г}}^{ii}(\alpha^m, t^{n+1/2}),$$
$$(\dot{x}^i)_{j,k,l}^{n+1/2} = \text{x}_{\text{г}}^i(\alpha^m, t^{n+1/2}).$$

Скольжение относительно подвижной границы. Орт внешней нормали к поверхности

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\partial\mathbf{r}_{\text{г}}}{\partial\alpha^1}\times\frac{\partial\mathbf{r}_{\text{г}}}{\partial\alpha^2}\Big/\left|\frac{\partial\mathbf{r}_{\text{г}}}{\partial\alpha^1}\times\frac{\partial\mathbf{r}_{\text{г}}}{\partial\alpha^2}\right|.$$

Далее вводится новая система координат $\bar{x}^i$, причем ось $\bar{x}^1$ направлена по внешней нормали к границе твердого тела, ось $\bar{x}^2$ находится в плоскости $\bar{x}^1Ox^3$. Напряжения в системе координат $\bar{x}^i$ определяются по формулам

$$\sigma_{kl} = T_{ij}l_{ki}l_{lj},$$

где $l_{1i} = n_i,\ \ l_{21} = l_{13}l_{11}/(1-l_{13}^2)^{1/2},$

$$l_{22} = l_{13}\sqrt{1-\frac{l_{11}^2}{1-l_{13}^2}},\ \ l_{23} = -(1-l_{13}^2)^{1/2},$$
$$l_{31} = l_{12}l_{23} - l_{22}l_{13},\ \ l_{32} = l_{13}l_{21} - l_{22}l_{11},$$
$$l_{33} = l_{11}l_{22} - l_{21}l_{12}.$$

Максимальное касательное напряжение на подвижной границе находится как

$$\tau = \sqrt{\sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2}.$$

Если $\tau > f_1|\sigma_{11}|$, то напряжения σ_{12}^2 и σ_{13}^2 умножаются на множитель $f_1|\sigma_{11}|/\tau$. Если $\tau \leqslant f_1|\sigma_{11}|$, то напряжения остаются без изменения. При изменении напряжений производится вычисление напряжений в системе координат x^i по формулам $T_{ij} = \sigma_{kl}l_{ki}l_{lj}$. Далее проводится определение скоростей узловых точек на подвижной границе в соответствии с кинематическим граничным условием.

Граничные условия для температурного поля в конечно-разностном виде. Если температура на границе задана, то температура граничных узловых точек равна T_0. Температура граничных ячеек находится с помощью уравнения теплопроводности для соответствующих теплофизических параметров границы.

Начальные условия. Начальные условия в конечно-разностном виде записываются в виде

$$t = 0, \qquad (T_{ij})_{0(1)} = T_{ij0},$$
$$(x^i)_{0jkl} = \mathrm{x}^i(\theta^j, 0), \quad (\dot{x}^i)_{0jkl} = \dot{x}^i(\theta^j, 0), \ldots$$

Конечный элемент — гексаэдр. Рассматривается определение координат узловых точек конечного элемента в более общем виде (рис. 3). Пусть известны координаты вершин x_m^i $(m = 1, 2, \ldots, 8)$ конечного элемента — суперэлемента, радиусы кривизн ребер 12, 34, 56, 78; остальные ребра прямолинейные. Координаты узловых точек ребра 12 определяются

$$x_{12j}^i = x_1^i + l_{ki}^{12}\xi_{12j}^k, \quad j_1 \leqslant j \leqslant j_2,$$

где l_{kl}^{12} — направляющие косинусы осей ξ^k относительно осей x^i, ξ^k — прямоугольная система координат с началом в вершине 1 суперэлемента, причем ось ξ^1 проходит через вершину 2, ось ξ^3 направлена по внешней нормали к грани 1234, а ось ξ^2 направлена так, что система координат ξ^k является правой, ξ_{12j}^k — координаты узловых точек ребра 12 в системе координат ξ^k, j_1, j_2 — значения j на гранях 1584 и 2376 соответственно. Координаты узловых точек на ребрах 34, 56, 78 определяются аналогично:

$$x_{43j}^i = x_4^i + l_{ki}^{43}\xi_{43j}^k, \quad x_{56j}^i = x_5^i + l_{ki}^{56}\xi_{56j}^k,$$
$$x_{87j}^i = x_8^i + l_{ki}^{87}\xi_{87j}^k, \qquad j_1 \leqslant j \leqslant j_2.$$

Причем

$$\xi_{12_j}^1 = \xi_O^1 + R_{12}N_{P12}\sin\beta_j,$$
$$\xi_{12j}^2 = \xi_O^2 + R_{12}N_{P12}\sin\beta_j,$$
$$\xi_{12_j}^3 = 0, \qquad \beta_j = -\frac{\alpha}{2} + \Delta\alpha(j - j_1),$$
$$a = \xi_2^1/2, \quad \xi_2^1 = \sqrt{(x_2^i - x_1^i)\cdot(x_2^i - x_1^i)},$$
$$\alpha = 2\arcsin\left(\frac{a}{R_{12}}\right)N_{P12},$$
$$\Delta\alpha = \alpha/(j_2 - j_1),$$
$$b = \sqrt{R_{12}^2 - a^2}, \quad \xi_O^1 = a, \quad \xi_O^2 = bN_{P12}.$$

Здесь ξ_O^k — координаты центра окружности, a, b — линейные размеры (рис. 4), α, β_j — углы, R_{12} — радиус кривизны ребра 12, N_{P12} — функция знака кривизны, причем $N_{P12} = -1, 0, +1$. Если $N_{P12} = 0$, то ребро 12 является прямолинейным.

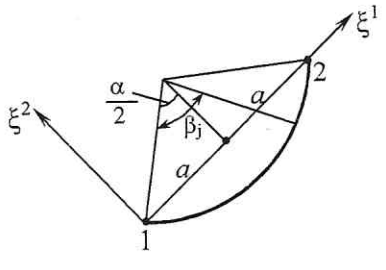

Рис. 4

Направляющие косинусы l_{ki}^{12} определяются

$$l_{1i} = (x_2^i - x_1^i)/|\mathbf{r}_{12}|,$$
$$l_{3i} = (\mathbf{r}_{12} - \mathbf{r}_{14})_i/|\mathbf{r}_{12}\times\mathbf{r}_{14}|,$$
$$l_{21} = l_{32}l_{13} - l_{33}l_{12},$$
$$l_{22} = l_{33}l_{11} - l_{31}l_{13},$$
$$l_{23} = l_{31}l_{12} - l_{32}l_{11},$$

где $\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{14}$ — радиусы-векторы, направленные от вершины 1 к вершинам 2 и 4 суперэлемента.

Координаты узловых точек на гранях 1234 и 5678 находятся по формулам

$$x^i_{1234jk} = x^i_{12j} + \frac{x^i_{43j} - x^i_{12j}}{k_2 - k_1}(k - k_1),$$
$$k_1 \leqslant k \leqslant k_2,$$

где k_1, k_2 — значения k на гранях 1256, 3478 соответственно.

Координаты узловых точек суперэлемента определяются выражением

$$x^i_{jkl} = x^i_{1234jk} + \frac{x^i_{5678jk} - x^i_{1234jk}}{l_2 - l_1}(l - l_1),$$
$$l_1 \leqslant l \leqslant l_2,$$

где l_1, l_2 — значения l для узловых точек на гранях 1234 и 5678 соответственно.

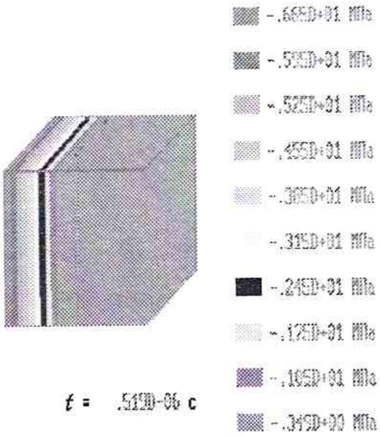

Рис. 5

Проведение расчетов даже с рассмотренным выше суперэлементом, включающим задание координат его восьми вершин и радиусов кривизны ребер, является трудоемкой работой, поэтому в последующих задачах целесообразно рассматривать типовые суперэлементы с минимальным количеством исходных данных. В данном случае в качестве суперэлемента для решения тестового примера принят куб.

Тестовый пример. Здесь приводятся результаты численного решения тестового примера. Кубик со стороной 10 мм выполнен из стали 4Х5МФС с плотностью 7850 кг/м^3, модулем упругости $0{,}215\cdot 10^{12}$ Па, коэффициентом Пуассона 0,3, пределом текучести 1,7 ГПа. Кубик находится в абсолютно гладких жестких направляющих и подвергается воздействию абсолютно жесткого штампа со скоростью 100 мм/с.

Анализ процесса динамического нагружения рассматриваемого образца показал, что бегущая волна давления монотонно движется вдоль выделенного элемента. Типичная картина распределения напряжений σ_{11} для момента времени 0,52 мкс приведена на рис. 5. Достоверность предложенной математической модели упругопластического деформирования твердого тела подтверждается сопоставлением полученных результатов с известным аналитическим решением [2]. За указанный интервал времени 0,52 мкс фронт волны прошел расстояние 2,7 мм. Напряжения за фронтом волны идентичны и равны $\sigma_{11} \approx 6$ МПа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Уилкинс, М. Л.** Расчет упругопластических течений / М. Л. Уилкинс // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
2. **Соболев, С. Л.** Уравнения математической физики / С. Л. Соболев. М.: Наука, 1992. 432 с.

ОБ АВТОРЕ

Хакимов Аким Гайфуллинович, вед. науч. сотр. Ин-та механики УНЦ РАН, доц. каф. математики. Дипл. инж.-мех. (УАИ, 1970). Канд. физ.-мат. наук по мех. жидкости и газа (Казанск. гос. ун-т, 1977). Иссл. в обл. динамики взаимод. упругих и упругопластич. тел со средой.