

УДК 51:681

В. П. ЖИТНИКОВ, Г. И. ФЕДОРОВА

КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ

Краевые условия задачи нестационарного электрохимического формообразования формулируются согласно закону Фарадея. На каждом временном шаге задача сводится к решению двух краевых задач для определения аналитических функций комплексного переменного: задачи Дирихле для определения напряженности электрического поля и задачи Римана–Гильберта определения частных производных по времени координат точек межэлектродного пространства (при фиксированных образах узловых точек на плоскости параметрического переменного). Предложен метод решения нестационарных задач общего вида с использованием аппроксимации сплайн-функциями, отличающиеся от известных своей точностью и надежностью. Представлены результаты численного решения. *Электрохимическая обработка; формообразование; задача Римана–Гильберта; комплексный потенциал; численно-аналитический метод*

При электрохимической обработке (ЭХО) в качестве обрабатываемой поверхности выступает один из электродов (анод), электрод-инструмент (ЭИ) является катодом. При заполнении межэлектродного пространства (МЭП) электролитом и подключении источника тока к электродам происходит растворение материала анода. Выбирая форму ЭИ и траекторию его движения, мы можем получить требуемую форму обрабатываемой поверхности [1].

Для решения задач нестационарной ЭХО применяются методы конечных [2] и граничных [3–5] элементов. При этом, как отмечается в [5], применение численных методов, как правило, затрудняется неустойчивостью, в особенности при исследовании длительных процессов и при обработке ЭИ, имеющими острые кромки. Это приводит к необходимости разработки новых методов, обладающих улучшенными свойствами.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Рассмотрим в качестве примера плоскую задачу ЭХО, схема МЭП которой (в сечении) изображена на рис. 1, а. Криволинейный катод $A'SB'$ движется вертикально вниз со скоростью V_t , поверхность анода ADB изменяется во времени за счет электрохимического растворения согласно закону Фарадея (1). Поверхности ЭИ и обрабатываемой детали считаются эквипотенциальными (потен-

циал анода равен нулю, потенциал катода равен $-U$).

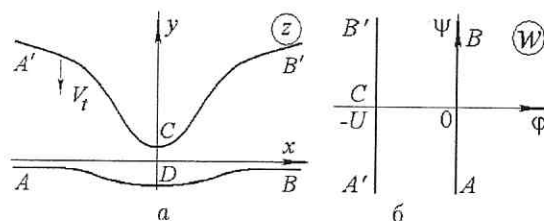


Рис. 1. Схема межэлектродного пространства: а – физическая плоскость; б – плоскость комплексного потенциала

Идеальная модель процесса предполагает постоянство электропроводности электролита во времени и в пространстве. В этом случае векторное поле электрической напряженности является потенциальным и соленоидальным. Функция, описывающая поле, в каждый момент времени ищется в виде аналитической функции комплексного переменного $W(Z)$, где $Z = X + iY$, X, Y – декартовы координаты точек МЭП, $W = \Phi(X, Y) + i\Psi(X, Y)$ – комплексный потенциал, Φ – потенциал электрического поля, Ψ – функция тока [10]. Решение нестационарной задачи сводится к поиску функции $W(Z, t)$, аналитической на области Z (форма которой зависит от времени), удовлетворяющей заданным краевым условиям.

Для задачи, рассмотренной на рис. 1, а, при эквипотенциальных электродах область, соответствующая МЭП на плоскости комплексного потенциала, имеет форму вертикальной

полосы ширины U (см. рис. 1,б). Следовательно, эта форма, в отличие от Z , не меняется во времени.

Процесс растворения в каждой точке поверхности анода определяется законом Фарадея [7]

$$h = V_{ecm} \Delta t = k \eta E_n \Delta t, \quad k = \frac{M \kappa}{n N_A \rho e}, \quad (1)$$

где h — толщина слоя металла, растворенного за малое время Δt , V_{ecm} — скорость электрохимического растворения, M , n — молярная масса и валентность материала детали, N_A — число Авогадро, e — заряд электрона, ρ — плотность обрабатываемого металла, E_n — нормальная к поверхности анода составляющая вектора напряженности электрического поля, η — выход по току, принимаемый в зависимости от постановки задачи постоянной величиной или функцией плотности тока j . (Согласно закону Ома $j = \kappa E$, где κ — электропроводность электролита, E — напряженность электрического поля).

При решении задачи с помощью теории функций комплексного переменного область МЭП конформно отображается на область простой геометрической формы χ (например, полоса, круг, кольцо и т. п.). В отличие от области на физической плоскости, форма области на плоскости изменения параметрического переменного может оставаться неизменной в любой момент времени.

В дальнейшем формы обрабатываемой поверхности, получающиеся в ходе процесса растворения, представляются в параметрическом виде комплексной функцией $Z(\chi_\Gamma, t)$. Для полосы единичной ширины $\chi_\Gamma = \sigma + i0$ на границе, соответствующей одному из электродов, $\chi_\Gamma = \sigma + i -$ другому ($-\infty < \sigma < \infty$).

Пусть касательная к обрабатываемой поверхности составляет угол θ с осью X . Тогда проекции векторов смещения точки dZ и напряженности E на нормаль к поверхности можно вычислить по формулам $h = \text{Im}(e^{-i\theta} dZ)$, $E_n = \text{Im}(e^{-i\theta} E)$. Поскольку на границах выполняется условие $\frac{\partial Z}{\partial \sigma} = \pm \left| \frac{\partial Z}{\partial \sigma} \right| e^{i\theta}$, из закона Фарадея (1) следует равенство

$$\text{Im} \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma} \frac{dZ}{dt} \right) = k \eta \text{Im} \left(E \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma} \right). \quad (2)$$

Полная производная функции двух переменных

$$\frac{dZ}{dt}(\sigma, t) = \frac{\partial Z}{\partial t}(\sigma, t) + \frac{\partial Z}{\partial \sigma}(\sigma, t) \frac{d\sigma}{dt}.$$

Напряженность электрического поля на границе равна

$$E = \frac{\overline{dW}}{dZ} = \frac{\overline{\partial W}}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma} \right)^{-1},$$

(чертой сверху обозначается операция комплексного сопряжения). Тогда с учетом последних двух равенств условие (2) примет вид

$$\text{Im} \left(\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma} \frac{\partial Z}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dt} \right) = k \eta \text{Im} \frac{\overline{\partial W}}{\partial \sigma}. \quad (3)$$

Поскольку значение σ на границе действительно, то из (3) следует

$$\text{Im} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \sigma} \right) = k \eta \text{Im} \frac{\overline{\partial W}}{\partial \sigma}. \quad (4)$$

Для эквипотенциальной обрабатываемой поверхности на соответствующей ей границе $\text{Re } W = \Phi = \text{const}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0$, $\frac{\overline{\partial W}}{\partial \sigma} = -i \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}$.

В расчетах более удобно использовать безразмерные величины. Для этого выразим комплексный потенциал в виде $W = U w = U(\varphi + i\psi)$, где U — некоторая постоянная, имеющая размерность потенциала электрического поля. Иногда более удобно использовать значение тока I , протекающего в электрохимической ячейке единичной длины. При этом $U = I/\kappa$, (κ — электропроводность электролита). Введем безразмерные координаты и время следующим образом:

$$z = \frac{Z}{l}, \quad x = \frac{X}{l}, \quad y = \frac{Y}{l}, \quad \tau = \frac{k \eta U}{l^2} t, \quad (5)$$

где l — характерный размер (не зависящий от времени), η считается постоянной. В безразмерных переменных равенство (4) примет вид

$$\text{Im} \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \sigma} \right) = -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \quad (6)$$

или

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial \sigma} - \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}. \quad (7)$$

Производную $\partial z / \partial \tau$ (ζ, τ) будем искать в классе аналитических функций. Тогда равенство (7) служит краевым условием для её определения на части границы, соответствующей поверхности анода.

На участках границы, соответствующих поверхности ЭИ, растворения не происходит, поэтому в точках, расположенных на этих границах, правая часть краевого условия (7) равна нулю, если система координат связана с ЭИ.

В соответствии с (7) вычисление частной производной $\partial z/\partial \tau$ (ζ, τ) на каждом временном шаге сводится к решению краевой задачи Римана–Гильберта.

Аналогичное условие имеет место при расчете движения вязкой жидкости в пористых средах [8]. Однако специфика ЭХО требует решения задач с подвижным ЭИ, поверхность которого является одной из границ.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Для рассматриваемых в данной работе задач нестационарный процесс асимптотически переходит в стационарный.

Стационарное формообразование — стадия формообразования, при которой геометрия МЭИ не изменяется во времени (в подвижной системе координат, связанной с электродом-инструментом), несмотря на движение ЭИ. Тогда в неподвижной системе координат обрабатываемая поверхность движется вместе с электродом-инструментом со скоростью V_t .

2.1. Краевые условия стационарного процесса

Преобразуя переменные $z = z_1 + \tau \frac{V_t}{|V_t|}$ в (6), перейдем к движущейся системе координат:

$$\operatorname{Im} \left[\frac{V_t \overline{dz_1}}{|V_t| d\sigma} \right] = -\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}.$$

Рассматривая, приращения dz_1 и $d\psi$ при сдвиге вдоль границы, получим следующее выражение:

$$\operatorname{Im} \left[\frac{V_t \overline{dz_1}}{|V_t| d\psi} \right] = -1.$$

Если скорость V_t направлена вертикально вниз, это выражение принимает следующий вид:

$$\operatorname{Im} \left[\frac{dz_1}{dw} \right] = -1. \quad (8)$$

Данное условие означает, что образ стационарной обрабатываемой поверхности на плоскости dz_1/dw представляет собой горизонтальный разрез [7].

2.2. Аналитическое решение задачи о стационарной электрохимической обработке

В качестве тестового примера рассмотрим решение стационарной задачи (с конфигурацией границ, соответствующей рис. 1, а), которая имеет аналитическое решение. Решение задачи ищется в виде суммы $z(\zeta) = z_0(\zeta) + z_\Delta(\zeta) + ic$ (константа c выбирается из условия $z(B) = 0$). В качестве $z_0(\zeta)$ можно выбрать функцию, отображающую верхнюю полуплоскость ζ на горизонтальную полосу единичной ширины

$$z_0(\zeta) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\zeta - 1}{\zeta}. \quad (9)$$

Отсюда $\operatorname{Im} \frac{dz_0}{dw} = -1$, $\frac{dx_\Delta}{d\psi} = 0$.

Пусть $z_\Delta = \alpha(i + z_1)$. В качестве области на плоскости z_1 выберем круг единичного радиуса с разрезом по мнимой оси от $-i$ до некоторой точки $i\gamma$, $-1 \leq \gamma < 1$ (см. рис. 2, а). Здесь параметр α равен половине максимальной высоты неровности на катоде, параметр γ характеризует изменение ординаты анода ($\Delta y = \alpha(1 + \gamma)$). С помощью ряда преобразований переводим область на плоскости z_Δ на верхнюю полуплоскость ζ (рис. 2, б). В результате получим следующее выражение для $z_\Delta(\zeta)$:

$$z_\Delta(\zeta) = -2i \times \frac{(\gamma^2 + 1) \left(\zeta^2 - \frac{1}{2} \right) - \gamma - (1 - \gamma^2) \zeta \sqrt{\zeta^2 - 1}}{(\gamma^2 + 1)^2 - 4\gamma\zeta^2}. \quad (10)$$

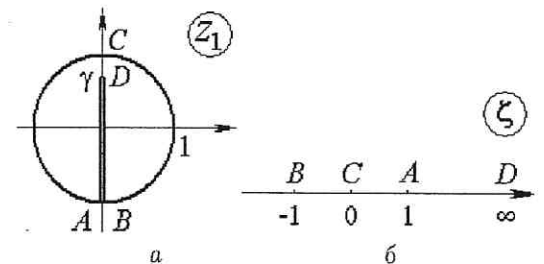


Рис. 2. Формы областей: а — на плоскости z_1 ; б — на плоскости ζ (верхняя полуплоскость)

Некоторые формы поверхности, полученные при решении задачи описанным выше методом, представлены на рис. 3.

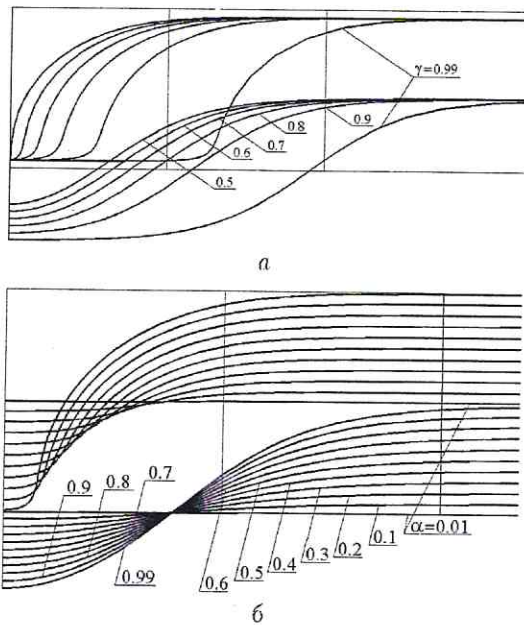


Рис. 3. Стационарные формы МЭП: а — $\alpha = 0,9, 0,5 \leq \gamma \leq 0,99$, б — $\gamma = 0,7, 0,01 \leq \alpha \leq 0,99$

3. РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

Для удобства решения области, соответствующие МЭП в физической плоскости (рис. 1, а) и плоскости комплексного потенциала (рис. 1, б), конформно отображаются на полосу $\chi = \sigma + i\nu$ (рис. 4), где нижняя граница полосы соответствует аноду (обрабатываемой поверхности), а верхняя — ЭИ.

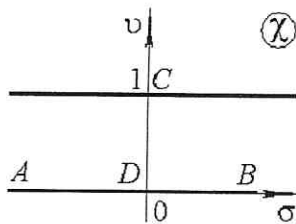


Рис. 4. Плоскость параметрического переменного χ

3.1. Метод решения нестационарной задачи

Сначала необходимо найти конформное отображение области изменения параметрического переменного χ (полосы) на МЭП — функцию $z(\chi, 0)$.

На плоскости комплексного потенциала МЭП соответствует вертикальная полоса (рис. 1, б). Тогда

$$w(\chi) = i\chi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = 1. \quad (11)$$

Функцию $z(\chi, \tau)$ будем искать в виде суммы $z(\chi, \tau) = g(\tau)z_0(\chi) + c\tau + z_{\Delta}(\chi, \tau)$ так,

чтобы при $\sigma \rightarrow \pm\pi/2$ мнимая часть функции $\text{Im} z_{\Delta}(\sigma + i\nu, \tau) \rightarrow 0$. Здесь $c\tau$ — толщина снятого слоя материала анода за время τ , c — скорость растворения. При этом функция $z_{\Delta}(\chi, \tau) = x_{\Delta} + iy_{\Delta}$ будет непрерывна на границе и может быть найдена с помощью формулы Шварца.

В качестве $z_0(\zeta)$ выбираем функцию $z_0(\chi) = \chi$.

В начальный момент времени $\text{Im} z'_B = y'_B = Y'_B/l$, $\text{Im} z_B = 0$, тогда $g(0) = y'_B$. Условия $y_{\Delta}(-0 + i, \tau) = y_{\Delta}(+0 + i, \tau) = 0$ используются для определения $g(\tau)$ и $dg/d\tau$ по заданным значениям $\text{Im} z'_B = y'_B(\tau)$, $\text{Im} z_B = y_B(\tau)$, скорости движения ЭИ $V_t = -\frac{dY'_B}{dt}$ и скорости электрохимического растворения $V_{\text{ecm}} = -\frac{dY_B}{dt} = \frac{k\eta U}{Y_B - Y'_B}$:

$$g(\tau) = y'_B(\tau) - y_B(\tau), \quad \frac{dg}{d\tau}(\tau) = \frac{1}{g} - 1, \\ \frac{g-1}{g(0)-1} e^{g-g(0)} = e^{-\tau}, \quad c = -\frac{i}{g}.$$

В безразмерных переменных краевое условие (6) можно записать в следующем виде:

$$\text{Im} \left(\frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \tau} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \sigma} \right) = \frac{\partial y_{\Delta}}{\partial \sigma} \frac{dg}{d\tau} \sigma + \frac{1}{g} \frac{\partial x_{\Delta}}{\partial \sigma}, \quad \chi = \sigma. \quad (12)$$

$$\text{Im} \left(\frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \tau} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \sigma} \right) = \frac{\partial y_{\Delta}}{\partial \sigma} \frac{dg}{d\tau} \sigma, \quad \chi = \sigma + i. \quad (13)$$

Далее задача определения $\frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \tau}$ сводится к задаче Римана–Гильберта [9]: найти аналитическую в области D и непрерывную в \bar{D} функцию $f(\zeta) = u(\zeta) + iv(\zeta)$, удовлетворяющую на границе Γ области условию

$$a(\zeta_{\Gamma})u(\zeta_{\Gamma}) - b(\zeta_{\Gamma})v(\zeta_{\Gamma}) = c(\zeta_{\Gamma}),$$

где a, b, c — заданные на Γ действительные функции.

В процессе решения этой задачи искомая функция представляется в виде произведения двух аналитических функций $\frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \tau}(\chi, \tau) = i \frac{dz}{dw}(\chi, \tau) f(\chi, \tau)$. При подстановке этого выражения в (12), (13) с учетом того, что на эквипотенциальной поверхности $w = i\psi$, получим

$$\text{Im} \left(i \frac{\partial \bar{z}}{\partial \sigma} \frac{dz}{dw} f \right) = \text{Im} \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \sigma} \frac{\partial z}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right)^{-1} f \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right)^{-1} \left| \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right|^2 \operatorname{Im} f = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \left| \frac{dw}{dz} \right|^{-2} \operatorname{Im} f. \quad (14)$$

С учетом (14) условия (12), (13) принимают вид

$$\operatorname{Im} f = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \left(\frac{\partial y_{\Delta}}{\partial \sigma} \frac{\partial g}{\partial \tau} x_0 + \frac{1}{g} \frac{\partial x_{\Delta}}{\partial \sigma} \right), \quad \chi = \sigma, \quad (15)$$

$$\operatorname{Im} f = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \frac{\partial y_{\Delta}}{\partial \sigma} \frac{\partial g}{\partial \tau} x_0, \quad \chi = \sigma + i. \quad (16)$$

Аналитическая функция $f(\chi, \tau)$ может быть восстановлена при помощи формулы Шварца.

3.2. Алгоритм решения нестационарной задачи

Решение будем искать в узловых точках σ_m . Искомыми параметрами на каждом временном шаге $\tau_j = j\Delta_{\tau}$ будут значения $y_m = \operatorname{Im} z_{\Delta}(\sigma_m, \tau_j)$ и $y'_m = \operatorname{Im} z'_{\Delta}(\sigma'_m + i, \tau_j)$. Значения $y_{\Delta}(\sigma, \tau_j) = \operatorname{Im} z_{\Delta}(\sigma, \tau_j)$ в промежуточных между узловыми точками найдем с помощью кубического сплайна, имеющего две непрерывные производные. Значения первой производной $y'_{\Delta}(\sigma)$ в узловых точках определяются при решении системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки.

Для восстановления $x_{\Delta}(\sigma)$ используем формулу Шварца (заметим, что $z_{\Delta}(\chi, \tau)$ — аналитическая функция переменного χ):

$$z_{\Delta}(\chi, \tau) = \operatorname{sh} \pi \chi \left[\int_0^{\infty} y_{\Delta}(\sigma, \tau) \frac{d\sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \chi} + \int_0^{\infty} y_{\Delta}(\sigma + i, \tau) \frac{d\sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma + \operatorname{ch} \pi \chi} \right]. \quad (17)$$

Для получения значений $\frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \chi}(\chi, \tau_j)$ про дифференцируем (17) по χ :

$$\frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \chi} = \int_0^{\infty} \frac{\partial y_{\Delta}}{\partial \sigma}(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma d\sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \chi} + \int_0^{\infty} \frac{\partial y_{\Delta}}{\partial \sigma}(\sigma + i) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma d\sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma + \operatorname{ch} \pi \chi} d\sigma. \quad (18)$$

Используя выражения (15), (16), получаем частную производную $\frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \tau}(\chi, \tau_j)$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_{\Delta}}{\partial \tau}(\chi, \tau_j) &= \left(\frac{1}{g} - 1 \right) \frac{1}{g} (\chi - i) \frac{dz_{\Delta}}{dw} + \\ &+ \left(\frac{1}{g} - 1 \right) \frac{1}{g} \operatorname{sh} \chi \frac{dz}{dw} \int_0^{\infty} \left| \frac{dz_{\Delta}}{dw} \right|^2 \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \frac{d\sigma}{\operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch} \chi} + \\ &+ \left(\frac{2}{g} - 1 \right) \operatorname{sh} \chi \frac{dz}{dw} \int_0^{\infty} \frac{\partial x_{\Delta}}{\partial \psi} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 \frac{d\sigma}{\operatorname{ch} \sigma - \operatorname{ch} \chi}. \end{aligned} \quad (19)$$

Затем производится шаг по времени по усовершенствованному методу Эйлера второго порядка точности и процесс повторяется.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

4.1. Сравнение с аналитическими решениями стационарной задачи

Результаты вычислений представлены на рис. 5. Видно установление стационарного процесса.

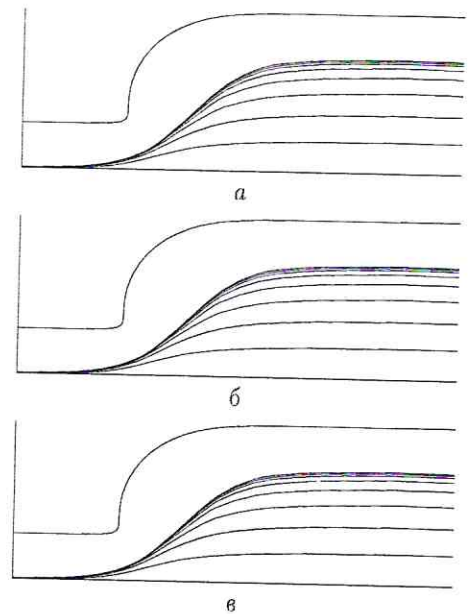


Рис. 5. Результаты проведенных тестов при $\gamma = 0,99$, $\alpha = 1,25$ (а); $\gamma = 0,5$, $\alpha = 0,9$ (б); $\gamma = 0,999$, $\alpha = -1,25$ (в)

4.2. Исследование решений с разными зазорами

На рис. 6, 7 рассмотрена обработка ЭИ, имеющим криволинейную форму, движущимся вертикально вниз с безразмерной скоростью, равной единице. На рис. 6 процесс показан в системе координат, связанной с ЭИ, на рис. 7 — в системе координат, связанной с обрабатываемой деталью.

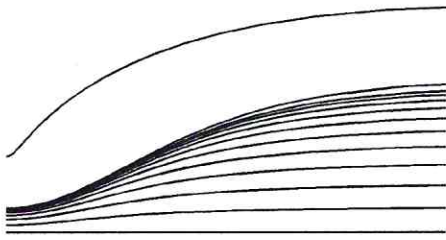


Рис. 6. Формы поверхности, полученные при обработке криволинейным ЭИ, движущимся вертикально вниз. Система координат связана с ЭИ, $\Delta\tau = 0,5$, относительная высота ЭИ $y_c = 2$

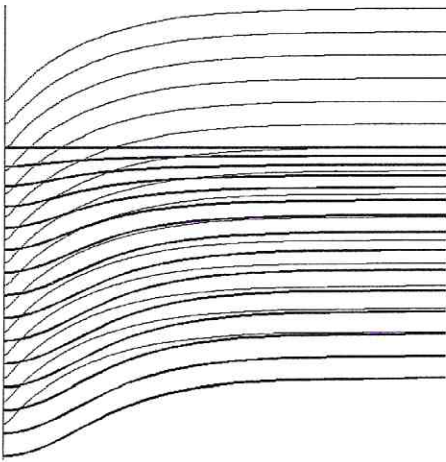


Рис. 7. Формы поверхности, полученные при обработке криволинейным ЭИ, движущимся вертикально вниз. Система координат связана с обрабатываемой деталью, $y_c = 2$, $\Delta\tau = 0,5$

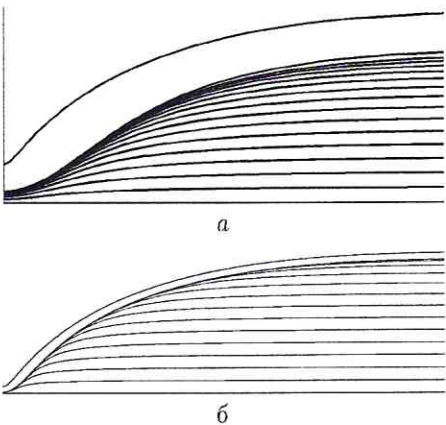
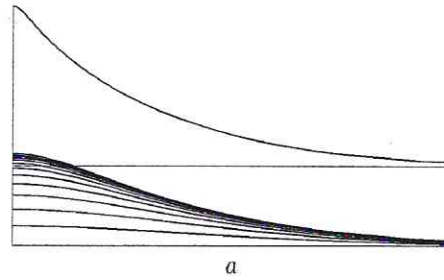


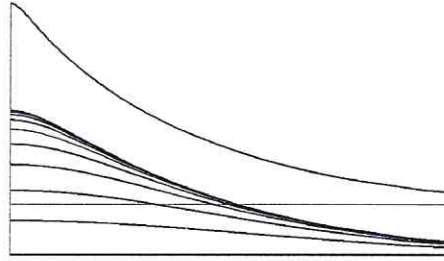
Рис. 8. Формы поверхности при обработке ЭИ с выступом. Система координат связана с ЭИ: $y_c = 4$, $\Delta\tau = 0,5$ (а), $y_c = 20$, $\Delta\tau = 2$ (б)

На рис. 8, а показана обработка ЭИ, имеющим аналогичную форму с размерами, в 2 раза, а на рис. 8, б — в 10 раз превосходящими размеры ЭИ, рассмотренного в предыдущем случае. На рис. 9, а показана обработка криволинейным ЭИ с выемкой, движущимся вертикально вниз с безразмерной скоростью, равной единице. На рис. 9, б показана обработка ЭИ, имеющим аналогичную форму

с размерами, в 2 раза превосходящими размеры ЭИ, рассмотренного в предыдущем случае.



а



б

Рис. 9. Формы поверхности, полученные при обработке ЭИ с выемкой. Система координат связана с ЭИ: $\Delta\tau = 0,5$, относительная глубина выемки на ЭИ $d = -2$ (а), $\Delta\tau = 0,5$, $d = -4$ (б)

Погрешность полученных решений оценивалась несколькими способами [6]. Предложенный алгоритм позволяет варьировать параметры дискретизации задачи (число узлов сетки и шаг по безразмерному времени) в широких пределах, что позволило использовать правило Рунге. Кроме того, имелась дополнительная возможность, связанная с перераспределением точек сетки на поверхности ЭИ при изменении формы МЭП. Поскольку форма ЭИ неизменна во времени, то отличие этой формы от исходной может служить оценкой погрешности. В представленных результатах эта оценка не превосходила нескольких десятых процента при общем количестве точек сетки, равном 40.

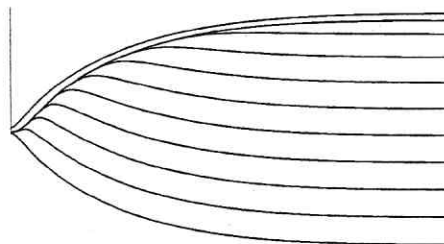


Рис. 10. Формы поверхности, полученные при обработке криволинейным ЭИ с выступом поверхности, имеющей в начальный момент выпуклую неровность, $\Delta\tau = 5$, $d = 20$

На рис. 10 показана обработка поверхности, имеющей в начальный момент выпуклую

неровность, криволинейным ЭИ с выступом. В ходе обработки ЭИ движется вертикально вниз с безразмерной скоростью, равной единице.

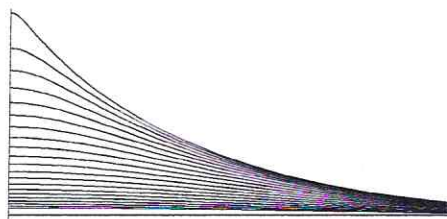


Рис. 11. Формы поверхности, полученные при обработке плоским ЭИ, движущимся вертикально вниз. Система координат связана с поверхностью анода, $\Delta\tau = 0,25$

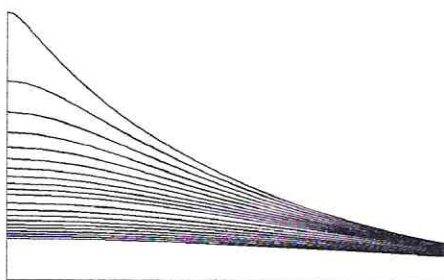


Рис. 12. Формы поверхности, полученные при обработке неподвижным плоским ЭИ. Система координат связана с поверхностью анода. Первые 10 шагов по безразмерному времени равны 0,5, следующие 10 равны 1

На рис. 11, 12 показана обработка плоским ЭИ поверхности, имевшей в начальный момент выпуклую неровность. При этом на рис. 11 ЭИ двигался вертикально вниз с безразмерной скоростью, равной единице, а на рис. 12 показана обработка неподвижным ЭИ. Для удобства наблюдения сглаживания неровности система координат на рис. 11, 12 связана с движущейся во времени со скоростью электрохимического растворения поверхностью обрабатываемой детали.

Следует отметить, что при увеличении времени обработки в обоих случаях форма обрабатываемой поверхности приближается к плоскости, однако в первом случае (при обработке движущимся ЭИ) расстояние между электродами устанавливается, т. е. реализуется стационарная обработка. Во втором случае (при обработке неподвижным ЭИ) расстояние постоянно увеличивается, т. е. возникает автоматический режим.

На рис. 13 представлены зависимости величины припуска S (толщины слоя материала заготовки, которую необходимо снять для получения заданной точности копирования) от логарифма заданной точности копирова-

ния. В качестве точности копирования принята высота неровности относительно асимптоты — см. рис. 11. В безразмерной форме $S = \tau$. Цифрой 1 обозначена кривая, соответствующая обработке движущимся ЭИ, цифрой 2 — неподвижным ЭИ. Видно, что при обработке движущимся ЭИ требуется существенно меньший припуск. Кроме того, кривая 1 асимптотически приближается к биссектрисе первой четверти, что соответствует обработке плоским катодом анода со ступенькой [10].

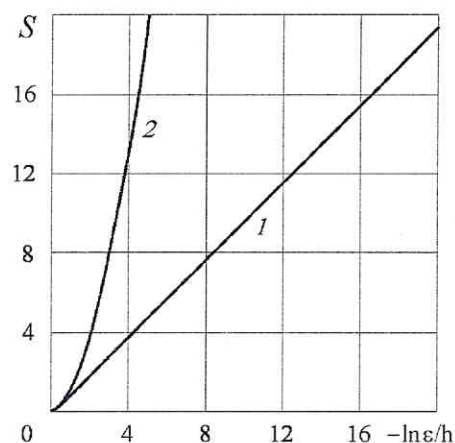


Рис. 13. Зависимости величины снимаемого припуска S от логарифма точности копирования

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе предложен численно-аналитический метод решения задач нестационарной электрохимической обработки при помощи электрода-инструмента криволинейной формы, основанный на аналитическом решении задачи определения частных производных координат по времени. Рассмотрение численных примеров подтвердило высокую эффективность предложенного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Житников, В. П.** Математическое моделирование электрохимической размерной обработки / В. П. Житников, А. П. Зайцев. Уфа: изд. УГАТУ, 1996. 221 с.
2. **Мустьянц, А. Н.** Электрохимическое формообразование в условиях локальной изоляции анодной поверхности. I. Теоретический анализ / А. Н. Мустьянц, Ф. М. Эрлихман, Г. Р. Энгельгардт, А. И. Дикусар. // Электрохимическая обработка материалов. Кишинёв: Штиинца, 1989. № 3. С. 11–15.
3. **Котляр, Л. М.** Эволюция формы анодной границы при электрохимической размерной обработке металлов / Л. М. Котляр, Н. М. Миназетдинов // Прикладная механика

- и техническая физика. Новосибирск, 2004. Т. 45, № 4. С. 7–12.
4. **Volgin, V. M.** Modeling of multistage electrochemical shaping / V. M. Volgin, A. D. Davydov // J. of Materials Processing Technol. Elsevier, 2004. 149/1-3. P. 466–471.
 5. **Purcar, M.** 3D electrochemical machining computer simulations / M. Purcar, L. Bortels et al // J. of Materials Processing Technol. Elsevier, 2004. 149/1-3. P. 472–478.
 6. **Zhitnikov, V. P.** Simulation of non-stationary processes of electrochemical machining / V. P. Zhitnikov, G. I. Fedorova, O. R. Zinnatullina // J. of Materials Processing Technol. 2004. V. 149/1-3. Spec. Issuc: Proc. of 14th Int. Symp. on Electromachining (ISEM XIV). P. 394–399.
 7. **Клоков, В. В.** Электрохимическое формообразование / В. В. Клоков. Казань: КазГУ, 1984. 80 с.
 8. **Polubarinova-Kochina, P. Ya.** Theory of groundwater movement / P. Ya. Polubarinova-Kochina // Princeton Univ. Press, 1962.
 9. **Лаврентьев, М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973. 736 с.
 10. **Idrisov, T. R.** Estimation of the process localization at the electrochemical machining by microsecond pulses of bipolar current /

T. R. Idrisov, A. N. Zaitsev, V. P. Zhitnikov // J. of Materials Processing Technol. 2004. V. 149/1-3. Spec. Issue: Proc. of 14th Int Symp on Electromachining (ISEM XIV). P. 475–481.

ОБ АВТОРАХ



Житников Владимир Павлович, проф., зав. каф. компьют. математики. Дипл. инж.-физ. (МФТИ, 1973). Д-р физ.-мат. наук по механ. жидкости, газа и плазмы (Казанск. гос. ун-т, 1993). Иссл. в обл. волновых течений жидкости, электрохим. формообразования, числ.-аналит. методов.



Федорова Галина Ильясовна, доц. той же каф. Дипл. инж.-мат. по прикл. мат. и информатике (УГАТУ, 2000). Канд. физ.-мат. наук по мат. моделир., числ. методам и комплексам программ (УГАТУ, 2004). Иссл. в обл. нестационар. электрохим. формообразования.