УДК 519.2, 517.2

Ф. С. НАСЫРОВ, О. В. ЗАХАРОВА, М. В. КРЫМСКАЯ

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ АНАЛОГОВ

Показано, что решения некоторых классов стохастических дифференциальных и интегральных уравнений со стохастическим интегралом Стратоновича и их потраекторных аналогов могут быть сведены к решению некоторой конечной цепочки обыкновенных дифференциальных либо интегродифференциальных уравнений. *Симметричный интеграл; стохастический интеграл Ито; стохастический интеграл Стратоновича; стохастическое дифференциальное уравнение; стохастическое интегральное уравнение; явные формулы для решений*

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе построены явные формулы для решения некоторых классов стохастических дифференциальных и интегральных уравнений с многомерным винеровским процессом, а также для их потраекторных аналогов. Под явными формулами для решений стохастических дифференциальных уравнений (в дальнейшем — СДУ) понимаются обыкновенное дифференциальное уравнение или цепочка таких уравнений, которые позволяют найти решение исходного СДУ. До работы [4] явные формулы для решений были известны лишь применительно к достаточно узкому классу уравнений [1]. В работах [2],[4] явные формулы были построены для СДУ и систем таких уравнений с одномерным винеровским процессом. Отличительной чертой подхода, использованного в этих работах, является применение техники симметричных интегралов. Понятие симметричного интеграла введено в работе [3], где были построены симметричные интегралы по произвольной непрерывной функции, в частности, по траекториям винеровского процесса. В этом случае симметричные интегралы совпадают со стохастическими интегралами Стратоновича. Настоящую работу можно считать продолжением исследований, проведенных в работах [2–4].

В данном разделе приводятся необходимые сведения о симметричных интегралах и связанных с ними конструкциях. В дальнейшем всюду будем предполагать, что множества $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$, $[0,t]$, $t > 0$, наделены σ-алгебрами борелевских множеств, которые соответственно обозначаются B, B_t, $t > 0$, кроме того, на них задана мера Лебега $\lambda(\cdot)$. Для непрерывной функции $X(s)$, $s \in [0,1]$, положим $M(t) = \max\{X(s), s \in [0,t]\}$, $m(t) = \min\{X(s), s \in [0,t]\}$. В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения: $a \wedge b = \min(a,b)$, $a \vee b = \max(a,b)$, $\kappa(v,a,b) = \operatorname{sgn}(B - A)\mathbf{1}(A \wedge B < v < A \vee B)$.

Пусть теперь $X(s)$, $s \in [0,1]$, — произвольная непрерывная функция. Рассмотрим разбиения T_n, $n \in N$, отрезка $[0,t]$: $T_n = \{t_k^{(n)}\}$, $0 = t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_k^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_{m_n}^{(n)} = t$, $n \in N$, такие, что $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in N$, и $\lambda_n = \max\limits_k \left|t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right| \to 0$ при $n \to \infty$. Через $X^{(n)}(s)$, $s \in [0,t]$, обозначим ломаную, построенную по функции $X(s)$ и отвечающую разбиению T_n. Введем следующие обозначения: $\Delta t_k^{(n)} = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}$, $\left[\Delta t_k^{(n)}\right] = \left[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}\right]$, $\Delta X_k^{(n)} = X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})$.

Определение. *Симметричным интегралом* [3] называется

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \int_{[\Delta t_k^{(n)}]} f(s, X^{(n)}(s)) ds \Delta X_k^{(n)}, \tag{0.1}$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений $T_n, n \in N$.

Симметричный интеграл в случае винеровского процесса $X(s) = X(s,\omega)$ является [4] детерминированным аналогом стохастического интеграла Стратоновича и совпадает с вероятностью 1 с последним. В случае $f(s, X(s)) = X(s)$ интегральные суммы интеграла Стратоновича и симметричного интеграла совпадают.

Будем говорить, что пара функций $X(s)$, $s \in [0,1]$, и $f(s,u)$, $s \in [0,1]$, $u \in R$, удовлетворяет *условию* (S) *на* $[0,t]$, $t \in [0,1]$, [4], если:

a) функция $X(s)$, $s \in [0,t]$, непрерывна;

b) при п. в. u функция $f(s,u)$, $s \in [0,t]$, имеет ограниченное изменение и непрерывна справа по $s \in [0,t]$;

c) при п. в. u справедливо равенство $\int_0^t \mathbf{1}(X(s) = u)|f|(ds,u) = 0$, где при каждом u функция $|f|(s,u)$ есть полное изменение функции $f(\tau,u)$ по переменной τ на отрезке $[0,s]$;

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 04-01-00286а, 05-01-97909.

d) полное изменение $|f|(t,u)$ функции $f(s,u)$ по переменной s на отрезке $[0,t]$ локально суммируемо по u.

В частности, условие (S) выполняется для броуновского движения $X(s) = X(s,\omega)$ и детерминированной функции $f(s,u)$, удовлетворяющей условию b [4].

Пусть функции $X(s)$ и $f(s,u)$ удовлетворяют условию (S) на $[0,t]$. Тогда симметричный интеграл существует и может быть вычислен по формуле

$$\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} f(t,v)\,dv - \\ - \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^t \kappa(v,X(0),X(\tau)) f(d\tau,v)\,dv. \quad (0.2)$$

Если функция $f(s,u)$ имеет непрерывные частные производные $f(s,u)'_s$ и $f(s,u)'_u$, то для функции $f(s,X(s))$ существует дифференциал

$$f(t,X(t)) - f(0,X(0)) = \\ = \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} f(s,X(s)) * dX(s) + \\ + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s,X(s))\,ds. \quad (0.3)$$

В случае, когда $X(s) = X(s,\omega)$ – стандартный винеровский процесс, а детерминированная функция $f(s,u)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial u} f(s,u)$, формулу Ито можно записать (см. [4]) в виде

$$\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) = \int_0^t f(s,X(s))dX(s) + \\ + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial u} f(s,X(s))\,ds, \quad (0.4)$$

где первое слагаемое в правой части равенства есть стохастический интеграл Ито.

1. ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ПОТРАЕКТОРНЫХ АНАЛОГОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В стохастическом исчислении Ито интеграл по многомерному винеровскому процессу определяется как линейная комбинация стохастических интегралов Ито. Оказывается, аналогичная ситуация будет справедлива и для детерминированных аналогов стохастических интегралов.

Условие (S), приведенное выше, является достаточным условием существования симметричного интеграла, однако класс интеграндов, удовлетворяющих условию (S), достаточно узок. Поэтому наша ближайшая цель — обобщить понятие симметричного интеграла на случай более широкого класса интеграндов, последнее, например, возможно с помощью построения несобственных симметричных интегралов при разумном способе аппроксимации.

Предложение 1. *Пусть $X_k(s)$, $s \in [0,1]$, $k = 1,2,...,m$, – произвольные непрерывные функции. Обозначим через $X_k^{(n)}(s)$, $k = 1,2,...,m$, $s \in [0,1]$, ломаные, построенные по последовательности сгущающихся разбиений T_n. Предположим, что функция $\varphi(s,u_1,...,u_m)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка по всем своим переменным. Тогда справедлива формула*

$$\varphi(t,X_1^{(n)}(t),...,X_m^{(n)}(t)) - \\ - \varphi(0,X_1^{(n)}(0),...,X_m^{(n)}(0)) = \\ = \sum_{k=1}^m \int_0^t \frac{\partial}{\partial u_k}\varphi(s,X_1^{(n)}(s),...,X_m^{(n)}(s)) * dX_k^{(n)}(s) + \\ + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,X_1^{(n)}(s),...,X_m^{(n)}(s))\,ds. \quad (1.1)$$

Доказательство. Формула (1.1) следует из определения дифференциала функции и того факта, что для абсолютно непрерывной функции $X(s)$ симметричный интеграл и интеграл Лебега–Стилтьеса совпадают.

Предложение 2. *Пусть $X_k(s)$, $s \in [0,1]$, $k = 1,2,...,u_m$, – произвольные непрерывные функции. Обозначим через $X_k^{(n)}(s)$, $k = 1,2,...,m$, $s \in [0,1]$, ломаные, построенные по последовательности сгущающихся разбиений T_n. Предположим, что функция $\varphi(s,u_1,...,u_m)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка по всем своим переменным. Тогда существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^m \int_0^t \frac{\partial}{\partial u_k}\varphi(s,X_1^{(n)}(s),...,X_m^{(n)}(s)) * \\ * dX_k^{(n)}(s). \quad (1.2)$$

Доказательство. Заметим, что в левой части выражения (1.1) предел при $n \to \infty$ существует и равен

$$\lim_{n\to\infty} [\varphi(t,X_1^{(n)}(t),...,X_m^{(n)}(t)) - \\ - \varphi(0,X_1^{(n)}(0),...,X_m^{(n)}(0))] = \\ = \varphi(t,X_1(t),...,X_m(t)) - \\ - \varphi(0,X_1(0),...,X_m(0))$$

в силу непрерывности функции $\varphi(s,u_1,...,u_m)$. Точно так же, ввиду непрерывности частных производных функции $\varphi(s,u_1,...,u_m)$ существует предел последнего слагаемого в правой части равенства (1.1)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,X_1^{(n)}(s),...,X_m^{(n)}(s))\,ds =$$

$$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\varphi(s, X_1(s), ..., X_m(s))\, ds,$$

откуда следует существование предела (1.2).

Замечание 1. В дальнейшем всюду в соответствии с принятой в стохастическом анализе системой обозначений будем записывать предел (1.2) как

$$\sum_{k=1}^m \int_0^t \frac{\partial}{\partial u_k}\varphi(s, X_1(s), ..., X_m(s)) * dX_k(s). \quad (1.3)$$

Если $(X_1(s), ..., X_m(s))$, $s \in [0,1]$, – m-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами, то каждое слагаемое в выражении (1.3) имеет смысл и совпадает с веростностью 1 с соответствующим стохастическим интегралом Стратоновича.

Замечание 2. С учетом принятого обозначения (1.3) из доказательства предложения 2 следует равенство

$$\varphi(t, X_1(t), ..., X_m(s)) - \varphi(0, X_1(0), ..., X_m(0)) =$$
$$= \sum_{k=1}^m \int_0^t \frac{\partial}{\partial u_k}\varphi(s, X_1(s), ..., X_m(s)) * dX_k(s) +$$
$$+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\varphi(s, X_1(s), ..., X_m(s))\, ds. \quad (1.4)$$

Пусть $X_k(s)$, $s \in [0,1]$, $k = 1, 2, ..., u_m$, – произвольные непрерывные функции. Определим несобственные симметричные интегралы вида $\sum_{k=1}^m \int_0^t f_k(s, X_1(s), ..., X_m(s)) * dX_k(s)$, где $f(s, u_1, ..., u_m)$ - борелевская функция, следующим образом:

$$\sum_{k=1}^m \int_0^t f_k(s, X_1(s), ..., X_m(s)) * dX_k(s) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^t f(s, X_1^{(n)}(s), ..., X_m^{(n)}(s)) * X_k^{(n)}(s), \quad (1.5)$$

если предел существует и не зависит от выбора разбиений отрезка $[0, t]$.

Рассмотрим детерминированный аналог стохастического дифференциального уравнения в форме Стратоновича

$$\eta(t) - \eta(0) = \sum_{k=1}^m \int_0^t a_k(s, \eta(s)) * dX_k(s) +$$
$$+ \int_0^t c(s, \eta(s))\, ds, \quad (1.6)$$

где $X_k(s)$, $s \in [0,1]$, $k = 1, 2, ..., u_m$, — произвольные непрерывные функции, имеющие неограниченную вариацию на любом конечном отрезке.

Решением уравнения (1.6) будем называть любую функцию вида $\eta(s) = \varphi(s, X_1(s), ..., X_m(s))$, для которой определены (хотя бы в несобственном смысле) интегралы в правой части уравнения (1.6) и которая обращает это уравнение в тождество.

Рассмотрим «допредельный» вариант уравнения (1.6):

$$\eta^{(n)}(t) - \eta^{(n)}(0) =$$
$$= \sum_{k=1}^m \int_0^t a_k(s, \eta^{(n)}(s)) * dX_k^{(n)}(s) +$$
$$+ \int_0^t c(s, \eta^{(n)}(s))\, ds. \quad (1.7)$$

Пусть решение $\eta^{(n)}(s) = \varphi(s, X_1^{(n)}(s), ..., X_m^{(n)}(s))$ уравнения (1.7) с функцией $\varphi = \varphi(s, u_1, ..., u_m)$, имеющей непрерывные частные производные первого порядка, существует, тогда, записав левую часть уравнения (1.7) в виде дифференциала согласно формуле (1.4), приходим к соотношению

$$\sum_{k=1}^m \int_0^t \Big\{ \frac{\partial}{\partial u_k}\varphi(s, X_1^{(n)}(s), ..., X_m^{(n)}(s)) -$$
$$- a_k(s, \varphi(s, X_1^{(n)}(s), ..., X_m^{(n)}(s)))\Big\} * dX_1^{(n)}(s) +$$
$$+ \int_0^t \Big\{ \frac{\partial}{\partial s}\varphi(s, X_1^{(n)}(s), ..., X_m^{(n)}(s)) -$$
$$- c(s, \varphi(s, X_1^{(n)}(s), ..., X_m^{(n)}(s)))\Big\}\, ds = 0. \quad (1.8)$$

Вычислим согласно формуле (0.3) каждый из симметричных интегралов из уравнения (1.8) и, подставив их в соотношение (1.8), после алгебраических преобразований получим

$$\sum_{k=1}^m \int_{X_k^{(n)}(0)}^{X_k^{(n)}(t)} \Big[\frac{\partial}{\partial u_k}\varphi(t, X_1^{(n)}(t), ..., X_{k-1}^{(n)}(t), u_k,$$
$$X_{k+1}^{(n)}(t), .., X_m^{(n)}(t)) -$$
$$- a_k(t, \varphi(t, X_1^{(n)}(t), ..., X_{k-1}^{(n)}(t), u_k,$$
$$X_{k+1}^{(n)}(t), .., X_m^{(n)}(t)))\Big]\, du_k =$$
$$= \int_0^t \Big\{ c(s, \varphi(s, X_1^{(n)}(s), ..., X_m^{(n)}(s))) -$$
$$- \frac{\partial}{\partial s}\varphi(s, X_1^{(n)}(s), ..., X_m^{(n)}(s)) -$$
$$- \sum_{k=1}^m \int_{X_k^{(n)}(0)}^{X_k^{(n)}(s)} \frac{d}{ds}\Big[a_k(s, \varphi(s, X_1^{(n)}(s), ...,$$
$$X_{k-1}^{(n)}(s), u_k, X_{k+1}^{(n)}(s), .., X_m^{(n)}(s))) -$$
$$- \frac{\partial}{\partial u_k}\varphi(s, X_1^{(n)}(s), ..., X_{k-1}^{(n)}(s), u_k, X_{k+1}^{(n)}(s), ..,$$
$$X_m^{(n)}(s))\Big]\, du_k \Big\}\, ds. \quad (1.9)$$

Заметим, что при переходе к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (1.9) получим в правой части функцию ограниченной вариации, в то время как в левой, вообще говоря, нет, поскольку мы не накладываем на непрерывные функции $X_k(s)$, $k = 1, 2, ..., m$, никаких ограничений. Поэтому будем искать решение уравнения (1.7) из условия равенства нулю всех интеграндов в формуле (1.9), откуда сразу следует равенство нулю всех выражений в квадратных скобках. Учитывая этот факт, получим набор обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial}{\partial u_k}\varphi(s, X_1^{(n)}(s), ...,\\
&\quad X_{k-1}^{(n)}(s), u_k, X_{k+1}^{(n)}(s), .., X_m^{(n)}(s)) =\\
&= a_k(s, \varphi(s, X_1^{(n)}(s), ..., X_{k-1}^{(n)}(s), u_k,\\
&X_{k+1}^{(n)}(s), .., X_m^{(n)}(s))), \quad k = 1, ..., m,\\
&\tfrac{\partial}{\partial s}\varphi(s, X_1^{(n)}(s), ..., X_m^{(n)}(s)) =\\
&\quad = c(s, \varphi(s, X_1^{(n)}(s), ..., X_m^{(n)}(s))),\\
&\varphi(0, X_1^{(n)}(0), ..., X_m^{(n)}(0)) = \eta(0),
\end{aligned} \tag{1.10}$$

где последнее соотношение представляет собой начальное условие.

Заметим, что решение уравнений (1.10) будет найдено, если мы найдем решение цепочки уравнений

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial}{\partial u_k}\varphi(s, u_1, ..., u_m) =\\
&= a_k(s, \varphi(s, u_1, ..., u_m)), \quad k = 1, ..., m,\\
&\tfrac{\partial}{\partial s}\varphi(s, X_1^{(n)}(s), ..., X_m^{(n)}(s)) =\\
&\quad = c(s, \varphi(s, X_1^{(n)}(s), ..., X_m^{(n)}(s))),\\
&\varphi(0, X_1^{(n)}(0), ..., X_m^{(n)}(0)) = \eta(0),
\end{aligned} \tag{1.11}$$

где от n зависит только последнее уравнение.

Пример. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\begin{aligned}
\eta(t) - \eta(0) = \int_0^t A\eta^2(s) * dX_1(s) &+\\
+ \int_0^t B\eta^2(s) * dX_2(s) &+\\
+ \int_0^t C\eta^2(s)\, ds, &\quad \eta(0) = \eta_0,
\end{aligned}$$

где $X_k(s)$, $k = 1, 2,$ – непрерывные функции, имеющие неограниченную вариацию на любом отрезке $[t_1, t_2]$, A, B, C – константы. Данное уравнение является аналогом соответствующего стохастического дифференциального уравнения. Составив цепочку обыкновенных дифференциальных уравнений, получим, что решение уравнения имеет вид

$$\begin{aligned}
\eta(s) = \varphi(s, X_1(s), X_2(s)) &=\\
&= -\frac{1}{AX_1(s) + BX_2(s) + Cs - \eta_0^{-1}}.
\end{aligned}$$

2. О РЕШЕНИИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ АНАЛОГОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\begin{aligned}
\eta(t) - \eta(0) = \int_0^t a(t, s, \eta(s)) * dX(s) &+\\
+ \int_0^t b(t, s, \eta(s))\, ds,&
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $X(s)$ – произвольная непрерывная функция, имеющая неограниченную вариацию на любом отрезке. Решением этого уравнения будем называть любую функцию вида $\eta(s) = \phi(s, X(s))$, для которой имеют смысл интегралы в правой части уравнения (2.1) и которое обращает это уравнение в тождество.

Покажем, что при определенных условиях гладкости коэффициентов возможно сведение решения уравнения (2.1) к решению двух уравнений, второе из которых является интегро-дифференциальным уравнением.

Предположим, что решение $\eta(s) = \phi(s, X(s))$ существует, и при этом предположении вычислим симметричный интеграл в правой части уравнения (2.1):

$$\begin{aligned}
&\int_0^t a(t, s, \phi(s, X(s))) * dX(s) =\\
&\quad = \int_{X(0)}^{X(t)} a(t, t, \phi(t, u))\, du -\\
&\quad - \int_0^t \int_{X(0)}^{X(s)} [a(t, s, \phi(s, u))]'_s\, du\, ds.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Левую часть уравнения (2.1), воспользовавшись формулой (0.4), можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\phi(t, X(t)) - \phi(0, X(0)) =\\
&\quad = \int_0^t \phi'_u(s, X(s)) * dX(s) + \int_0^t \phi'_s(s, X(s))\, ds
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
\phi(t, X(t)) - \phi(0, X(0)) = \int_{X(0)}^{X(t)} \phi'_u(t, u)\, du &-\\
- \int_0^t \int_{X(0)}^{X(s)} \phi''_{us}(s, u)\, du\, ds &+\\
+ \int_0^t \phi'_s(s, X(s))\, ds.&
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Значит, уравнение (2.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\int_{X(0)}^{X(t)} \phi'_u(t, u)\, du - \int_0^t \int_{X(0)}^{X(s)} \phi''_{us}(s, u)\, du\, ds &+\\
+ \int_0^t \phi'_s(s, X(s))\, ds &=\\
= \int_{X(0)}^{X(t)} a(t, t, \phi(t, u))\, du &-
\end{aligned}$$

$$-\int_0^t \int_{X(0)}^{X(s)} [a(t,s,\phi(s,u))]'_s du\, ds +$$
$$+\int_0^t b(t,s,\phi(s,X(s)))\, ds.$$

Сгруппируем слагаемые

$$\int_{X(0)}^{X(t)} [\phi'_u(t,u) - a(t,t,\phi(t,u))]\, du =$$
$$= \int_0^t \int_{X(0)}^{X(s)} \phi''_{us}(s,u)\, du\, ds - \int_0^t \phi'_s(s,X(s))\, ds -$$
$$-\int_0^t \int_{X(0)}^{X(s)} [a(t,s,\phi(s,u))]'_s\, du\, ds +$$
$$+\int_0^t b(t,s,\phi(s,X(s)))\, ds.$$

Далее, воспользовавшись формулой Ньютона–Лейбница, приходим к уравнению

$$\int_{X(0)}^{X(t)} [\phi'_u(t,u) - a(t,t,\phi(t,u))]\, du =$$
$$= -\phi(t,X(0)) + \phi(0,X(0)) -$$
$$-\int_0^t \int_{X(0)}^{X(s)} [a(t,s,\phi(s,u))]'_s\, du\, ds +$$
$$+\int_0^t b(t,s,\phi(s,X(s)))\, ds,$$

откуда, повторяя рассуждения из предыдущего раздела, приходим к совокупности уравнений

$$\begin{cases} \phi'_u(t,u) = a(t,t,\phi(t,u)), \\ \phi(t,X(0)) - \phi(0,X(0)) = \\ \quad = \int_0^t b(t,s,\phi(s,X(s)))\, ds - \\ - \int_0^t \int_{X(0)}^{X(s)} \frac{d}{ds} a(t,s,\phi(s,u))\, du\, ds, \\ \phi(0,X(0)) = \eta_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Решая первое уравнение, получим, что равенство $\int \frac{d\phi}{a(t,t,\phi)} = u + C(t)$, где $C(t)$ – неизвестная функция, определяет неявную функцию $\phi = \varphi^*(t, u + C(t))$, поэтому второе уравнение из (2.5) есть уравнение на неизвестную функцию $C(t)$.

Аналогичным образом может быть найдено явное решение для более сложных уравнений. Рассмотрим детерминированный аналог стохастического интегрального уравнения в форме Стратоновича

$$\eta(t) - \eta(0) = \sum_{k=1}^m \int_0^t a_k(t,s,\eta(s)) * dX_k(s) +$$
$$+\int_0^t b(t,s,\eta(s))\, ds, \tag{2.6}$$

где несобственные симметричные интегралы, определенные выше, рассматриваются по произвольным непрерывным функциям $X_1(s), ..., X_m(s)$.

Решением уравнения (2.6) будем называть любую функцию

$$\eta(s) = \phi(s, X_1(s), ..., X_m(s)),$$

для которой интегралы в правой части уравнения (2.6) определены (хотя бы в несобственном смысле) и которое обращает это уравнение в тождество.

Предполагается, если не оговорено противное, что все рассматриваемые ниже функции имеют столько, сколько необходимо, непрерывных частных производных. Покажем, что техника симметричных интегралов при определенных условиях гладкости коэффициентов уравнения (2.6) позволяет свести решение уравнения (2.6) к решению цепочки интегродифференциальных уравнений.

Рассмотрим «допредельный» вариант уравнения (2.6):

$$\eta^{(n)}(t) - \eta^{(n)}(0) =$$
$$= \sum_{k=1}^m \int_0^t a_k(t,s,\eta^{(n)}(s)) * dX_k^{(n)}(s) +$$
$$+\int_0^t b(t,s,\eta^{(n)}(s))\, ds, \tag{2.7}$$

здесь уже все симметричные интегралы имеют смысл, так как условие (S) выполнено. Будем искать решение этого уравнения в виде $\eta^{(n)}(s) = \phi(s, X_1^{(n)}(s), .., X_m^{(n)}(s))$. Так же, как и раньше, воспользовавшись формулой (0.4) для дифференциала, уравнение (2.7) запишем в виде

$$\sum_{k=1}^m \int_0^t \Big[\frac{\partial}{\partial u_k}\phi(s, X_1^{(n)}(s), ..., X_m^{(n)}(s)) -$$
$$- a_k(t,s,\phi(s,X_1^{(n)}(s), ..., X_m^{(n)}(s)))\Big] * dX_k^{(n)}(s) =$$
$$= \int_0^t \Big[b(t,s,\phi(s,X_1^{(n)}(s), .., X_m^{(n)}(s))) -$$
$$- \frac{\partial}{\partial s}\phi(s, X_1^{(n)}(s), .., X_m^{(n)}(s))\Big]\, ds. \tag{2.7'}$$

Вычислим согласно формуле (0.3) симметричные интегралы в левой части последнего равенства

$$\int_0^t \Big[\frac{\partial}{\partial u_k}\phi(s, X_1^{(n)}(s), .., X_m^{(n)}(s)) -$$
$$- a_k(t,s,\phi(s,X_1^{(n)}(s), .., X_m^{(n)}(s)))\Big] * dX_k^{(n)}(s) =$$
$$= \int_{X_k^{(n)}(0)}^{X_k^{(n)}(t)} \Big[\frac{\partial}{\partial u_k}\phi(t, X_1^{(n)}(t), ...$$
$$..., X_{k-1}^{(n)}(t), u_k, X_{k+1}^{(n)}(t), ..., X_m^{(n)}(t)) -$$
$$- a_k(t,t,\phi(t,X_1^{(n)}(t), ...$$
$$..., X_{k-1}^{(n)}(t), u_k, X_{k+1}^{(n)}(t), ..., X_m^{(n)}(t)))\Big]\, du_k -$$

$$-\int_0^t \int_{X_k^{(n)}(0)}^{X_k^{(n)}(s)} \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial}{\partial u_k}\phi(s, X_1^{(n)}(s), \dots \right.$$
$$\dots X_{k-1}^{(n)}(s), u_k, X_{k+1}^{(n)}(s), \dots, X_m^{(n)}(s)) -$$
$$- a_k(t, s, \phi(s, X_1^{(n)}(s), \dots$$
$$\left. \dots X_{k-1}^{(n)}(s), u_k, X_{k+1}^{(n)}(s), \dots, X_m^{(n)}(s)))\right] du_k ds. \quad (2.8)$$

Подставив полученные выражения для симметричных интегралов в уравнение (2.8), получим

$$\sum_{k=1}^{m}\left\{\int_{X_k^{(n)}(0)}^{X_k^{(n)}(t)}\left[\frac{\partial}{\partial u_k}\phi(t, X_1^{(n)}(t), \dots \right.\right.$$
$$\dots, X_{k-1}^{(n)}(t), u_k, X_{k+1}^{(n)}(t), \dots, X_m^{(n)}(t)) -$$
$$- a_k(t, t, \phi(t, X_1^{(n)}(t), \dots$$
$$\left. \dots, X_{k-1}^{(n)}(t), u_k, X_{k+1}^{(n)}(t), \dots, X_m^{(n)}(t)))\right] du_k -$$
$$-\int_0^t \int_{X_k^{(n)}(0)}^{X_k^{(n)}(s)} \frac{d}{ds}\left[\frac{\partial}{\partial u_k}\phi(s, X_1^{(n)}(s), \dots \right.$$
$$\dots, X_{k-1}^{(n)}(s), u_k, X_{k+1}^{(n)}(s), \dots, X_m^{(n)}(s)) -$$
$$- a_k(t, s, \phi(s, X_1^{(n)}(s), \dots$$
$$\dots, X_{k-1}^{(n)}(s), u_k, X_{k+1}^{(n)}(s), \dots$$
$$\left.\left. \dots, X_m^{(n)}(s)))\right] du_k ds\right\} =$$
$$= \int_0^t \left[b(t, s, \phi(s, X_1^{(n)}(s), X_2^{(n)}(s), \dots \right.$$
$$\dots, X_n^{(n)}(s))) - \frac{\partial}{\partial s}\phi(s, X_1^{(n)}(s), X_2^{(n)}(s), \dots$$
$$\left. \dots, X_n^{(n)}(s))\right] ds. \quad (2.9)$$

В силу рассуждений, приведенных в предыдущем параграфе, сначала приходим к набору уравнений

$$\phi'_{u_1}(t, u_1, X_2^{(n)}(t), .., X_m^{(n)}(t)) =$$
$$= a_1(t, t, \phi(t, u_1, X_2^{(n)}(t), .., X_m^{(n)}(t)));$$
$$\phi'_{u_2}(t, X_1^{(n)}(t), u_2, X_3^{(n)}(t).., X_m^{(n)}(t)) =$$
$$= a_2(t, t, \phi(t, X_1^{(n)}(t), u_2, X_3^{(n)}(t), \dots, X_m^{(n)}(t));$$
$$\dots$$
$$\phi'_{u_m}(t, X_1^{(n)}(t), X_2^{(n)}, \dots, X_{m-1}^{(n)}(t), u_m) =$$
$$= a_n(t, t, \phi(t, X_1^{(n)}(t), X_2^{(n)}(t), \dots, X_{m-1}^{(n)}(t), u_m);$$
$$\sum_{k=1}^{m}\left[\int_0^t \int_{X_k^{(n)}(0)}^{X_k^{(n)}(s)}\left\{\frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial u_k}\phi(s, X_1^{(n)}(s), \dots \right.\right.$$
$$\dots, X_{k-1}^{(n)}(s), u_k, X_{k+1}^{(n)}(s), \dots, X_m^{(n)}(s)) -$$
$$- \frac{d}{ds}a_k(t, s, \phi(s, X_1^{(n)}(s), \dots$$
$$\left.\left. \dots, X_{k-1}^{(n)}(s), u_k, X_{k+1}^{(n)}(s), \dots, X_m^{(n)}(s)))\right\} du_k ds\right] +$$
$$+ \int_0^t \left\{b(t, s, \phi(s, X_1^{(n)}(s), X_2^{(n)}(s), \dots, X_m^{(n)}(s))) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial s}\phi(s, X_1^{(n)}(s), X_2^{(n)}(s), \dots, X_m^{(n)}(s))\right\} ds = 0;$$
$$\phi(0, X_1^{(n}(0), X_2^{(n)}(0), \dots, X_m^{(n)}(0)) = \eta_0,$$

а затем стандартные рассуждения приводят к цепочке уравнений

$$\phi'_{u_k}(t, u_1, \dots, u_m) = a_k(t, t, \phi(t, u_1, \dots, u_m)),$$
$$k = 1, \dots, m;$$
$$\phi'_t(t, X_1(t), X_2(t), .., X_m(t)) =$$
$$= b(t, t, \phi(t, X_1(t), X_2(t), .., X_m(t))) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m}\left[\int_0^t \int_{X_k(0)}^{X_k(s)}\left\{\frac{d}{ds}\frac{\partial}{\partial u_k}\phi(s, X_1(s), \dots \right.\right.$$
$$\dots, X_{k-1}(s), u_k, X_{k+1}(s), \dots, X_m(s)) -$$
$$- \frac{d}{ds}a_i(t, s, \phi(s, X_1(s), \dots$$
$$\dots, X_{k-1}(s), u_k, X_{k+1}(s), \dots$$
$$\left.\left. \dots, X_m(s)))\right\} du_k ds\right] +$$
$$+ \int_0^t \left\{b(t, s, \phi(s, X_1(s), X_2(s), .., X_m(s))) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial s}\phi(s, X_1(s), X_2(s), .., X_m(s))\right\} ds = 0;$$
$$\phi(0, X_1(0), X_2(0), .., X_m(0)) = \eta_0. \quad (2.10)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ватанабе, С.** Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабе, Н. Икеда. М.: Наука, 1986. 448 с.
2. **Мухаметова, Г. З.** О явных формулах для решений эволюционных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных / Г. З. Мухаметова, Ф. С. Насыров // Вестник УГАТУ. 2004. 5, 2 (10). С. 58–66.
3. **Насыров, Ф. С.** Симметричные интегралы и их применение в финансовой математике / Ф. С. Насыров // Труды МИАН. 2002. 237. С. 265–278.
4. **Насыров, Ф. С.** Симметричные интегралы и стохастический анализ / Ф. С. Насыров // Теория вероятностей и ее применения. 2005. 50, 3.

ОБ АВТОРАХ

Насыров Фарит Сагитович, проф. каф. математики. Дипл. математик (ЛГУ, 1976). Д-р физ.-мат. наук по теории вероятностей и мат. статистике и по мат. анализу (защ. в ИМ им. Соболева, Новосибирск, 2002). Иссл. в обл. теории случайных процессов, теории функций, финансовой математики.

Захарова Ольга Владимировна, студентка УГАТУ по спец. «Прикладная математика и информатика». Иссл. в обл. теории стохастических интегральных уравнений.

Крымская Мария Викторовна, Дипл. бакалавр прикладной математики и информатики (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. теории стохастических дифференциальных уравнений.

УДК 541.138.2

Н. А. АМИРХАНОВА, Р. З. ВАЛИЕВ, С. Л. АДАШЕВА, Е. А. ПРОКОФЬЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРОЗИОННЫХ И ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СПЛАВОВ НА ОСНОВЕ НИКЕЛИДА ТИТАНА В КРУПНОЗЕРНИСТОМ И УЛЬТРАМЕЛКОЗЕРНИСТОМ СОСТОЯНИЯХ

Весовым и потенциодинамическим методами изучены коррозионные и электрохимические свойства сплава $Ni_{49,83}Ti_{50,62}$ (при комнатной температуре находится в мартенситном состоянии) — сплав № 1 и $Ni_{50,6}Ti_{49,4}$ (аустенитное состояние) — сплав № 4 в крупно- (КЗ) и ультрамелкозернистом (УМЗ) состояниях. По результатам поляризационных исследований в растворах кислот и хлорида натрия установлено понижение коррозионной стойкости ультрамелкозернистого нитинола в сравнении с крупнозернистым..

Использование сплавов на основе никелида титана в медицине и технике стимулировало широкие исследования электрохимического поведения и коррозионной стойкости этих материалов в различных агрессивных средах. В литературе [1] описаны коррозионные свойства крупнозернистого нитинола и показано, что он в средах, моделирующих физиологические жидкости, подобные человеческим, хорошо пассивируется. Установлено, что на нитиноле при наличии биосреды образуется пассивный оксидный слой, на котором формируются покрытия из фосфата кальция и TiO_2.

В связи с этим интересно рассмотреть коррозионные и электрохимические свойства сплавов нитинола в различных структурных состояниях, ввиду уникальных физических и физико-механических свойств материалов в крупнозернистом и ультрамелкозернистом состоянии в кислотных и солевых средах.

В качестве исходных материалов были взяты застехиометрические крупнокристаллические сплавы $Ti_{49,83}Ni_{50,62}$ и $Ni_{50,6}Ti_{49,4}$ с размером зерна в закаленном состоянии 80 мкм.

Ультрамелкозернистый нитинол был получен методом РКУ-прессования. При реализации данного метода заготовка неоднократно продавливалась в специальной оснастке через два канала с одинаковыми поперечными сечениями, пересекающимися обычно под углом 90° [2].

Границы зерен в УМЗ материалах отличаются высокой плотностью дислокаций [3]. В случае нитинола превалирующую роль играет титановая компонента на поверхности сплава.

Нитинол с ультрамелкозернистой структурой имеет малый размер зерен и большую протяженность границ. В результате деформации размер зерна изменяется от 80 мкм (крупнозернистый) до 10 нм (ультрамелкозернистое состояние).

Высокотемпературное аустенитное состояние сплава № 4 NiTi характеризуется кубической решеткой B2. Степень дальнего атомного порядка высока и незначительно снижается при нагреве до 1000 °С. Мартенситному состоянию присуща моноклинно-искаженная орторомбическая элементарная ячейка при комнатной температуре, которая обозначается B19.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для установления коррозионных свойств нитинола в КЗ и УМЗ состояниях для сплава № 1 и сплава № 4 первоначально измеряли его потенциалы коррозии. Все потенциалы приведены относительно нормального водородного электрода.

Поляризационные кривые снимали с помощью коррозиометра со скоростью поляризации 1 мВ/с. Для исключения омической составляющей электролита использовали капилляр Луггина–Габера, который подводился к исследуемому электроду на расстояние 0,1 мм.

Изучение поверхностной микроструктуры образцов после контакта с коррозионной средой осу-

Работа выполнена при поддержке гранта INTAS № 01-0320, и проекта МНТЦ №2398.