УДК 533.697.3

Э. Г. ГИМРАНОВ, В. Г. МИХАЙЛОВ

ОБОБЩЕННЫЕ КВАЗИОДНОМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В КАНАЛАХ ДЛА И ИХ ИНТЕГРАЛЫ

Получены обобщенные квазиодномерные уравнения установившегося движения газа в каналах ДЛА и ЭУ (дифференциальная и интегральная формы), позволяющие рассматривать изменение параметров потока в условиях влияния начальных факторов и различных физических раздельных и комбинированных активных воздействий (задача управления), осуществляемых подводом (отводом) в основной поток (в пограничный слой) дополнительной массы газа (жидкости), подводом (отводом) тепла (нагревание или охлаждение) от посторонних источников, изменением геометрии проточного канала газодинамических устройств. Даны решения прямой, обратной и смешанной задач. *Полный импульс; модифицированные газодинамические функции; физические воздействия на газовый поток*

Установление закономерностей изменения параметров газового потока на псевдоскачке [1] имеет важное значение для решения целого ряда практических задач, разработки методов расчета газодинамики технических устройств.

Параметры газа за псевдоскачком определяются законами сохранения массы, импульса и энергии. Эти законы связывают между собой значения параметров газа перед псевдоскачком с параметрами газа за псевдоскачком со скоростью движения газа. Под параметрами газа на псевдоскачке здесь понимаются приведенные скорости λ_1 в начальном x_1 и λ_2 в конечном x_2 сечении полностью развитого псевдоскачка отношение статических давлений $\bar{p} = p_2/p_1$ и полных $\sigma = p_2^*/p_1^*$ — коэффициент восстановления полного давления на псевдоскачке.

Приближенное определение соотношения параметров развитого псевдоскачка производится методами одномерной газовой динамики установившихся течений с использованием модифицированных газодинамических функций потока полного импульса, учитывающих неравномерность распределения параметров газа в каналах газодинамических установок или струях по площади поперечного сечения.

1. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОЛНОГО ИМПУЛЬСА

Для однородного газового потока полный импульс $\Phi = \mathrm{p}F + Gu$ обычно вычисляют с помощью газодинамических функций $Z(\lambda)$, $f(\lambda)$, $r(\lambda)$ по известным формулам [2–4]

$$\Phi = \frac{\gamma+1}{\gamma} G a_{\text{кр}} Z(\lambda), \quad \Phi = p^* F f(\lambda), \quad \Phi = pF\frac{1}{r(\lambda)}. \tag{1}$$

В этих формулах p, p^* — статическое давление и давление торможения (полное давление), F — площадь поперечного сечения, G — массовый расход, $\lambda = u/a_{\text{кр}}$ — приведенная скорость газа, u — скорость течения газа, $a_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}RT^*}$ — критическая скорость звука.

Расчетные формулы потока полного импульса (1) справедливы при условии коллинеарности вектора потока количества движения $\vec{K} = G\vec{u}$ и секундного импульса силы $\vec{p} = p\vec{F}$.

В общем случае для неоднородного потока полный импульс имеет вид

$$\vec{\Phi} = \vec{p} + \vec{K} = p\vec{F} + \int \rho u \vec{u}_n \, dF.$$

Для вязкого диссипативного слоя (пограничный слой или струя) с постоянным статическим давлением в расчетном сечении, расположенном нормально к линиям тока, поток полного импульса запишется формулой

$$\Phi_\delta = pF_\delta + \int\limits_{F_\delta} \rho u^2 dF_\delta$$

или для плоского течения шириной, равной единице, т. е. когда $F_\delta = \delta \cdot 1$,

$$\Phi_\delta = p\delta + \int\limits_0^\delta \rho u^2 dy, \tag{2}$$

где δ — толщина пограничного слоя, y — ось, направленная по нормали к стенке (поверхности взаимодействия с вязким диссипативным слоем).

Согласно известным соотношениям между интегральными характеристиками пограничного слоя

$$\frac{1}{\delta}(1 - H^* - H^{**}) + \int\limits_0^\delta \frac{\rho u^2}{\rho_\delta u_\delta^2} dy,$$

поток полного импульса (2) может быть рассчитан с помощью модифицированных газодинамических функций полного импульса неравномерного потока по следующим формулам:

$$\Phi_\delta = \frac{\gamma+1}{\gamma} G_\delta a_{\text{кр}} Z^{**}(\lambda_\delta),$$
$$\Phi_\delta = \mathrm{p} F \frac{1}{R^{**}(\lambda_\delta)}, \tag{3}$$
$$\Phi_\delta = p_\delta^* F_\delta F^{**}(\lambda_\delta),$$

где

$$Z^{**}(\lambda_\delta) = \frac{\lambda_\delta}{1-H^*} Z_\delta^{**}(\lambda_\delta);$$
$$Z_\delta^{**}(\lambda_\delta) = 1 + \frac{1}{\lambda_\delta^2} - \frac{2\gamma}{\gamma+1}(H^* + H^{**});$$
$$R^{**}(\lambda_\delta) = \frac{1}{\lambda_\delta^2}\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_\delta^2\right)\frac{1}{Z_\delta^{**}(\lambda_\delta)}; \tag{4}$$
$$F^{**}(\lambda_\delta) = \frac{1}{\beta^* R^{**}(\lambda_\delta)}$$

— модифицированные газодинамические функции полного импульса с неравномерным распределением скорости в поперечном сечении потока; безразмерные интегральные толщины вязкого слоя:

$$H^* = \left(\frac{\delta^*}{\delta}\right)^{j+1} = (j+1)\int_0^1 \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\delta u_\delta}\right)\eta^j d\eta \tag{5}$$

— приведенная толщина (площадь) вытеснения,

$$H^{**} = \left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^{j+1} = (j+1)\int_0^1 \frac{\rho u}{\rho_\delta u_\delta}\left(1 - \frac{u}{u_\delta}\right)\eta^j d\eta \tag{6}$$

— приведенная толщина (площадь) потери импульса, ($j = 0$ соответствует плоской задаче, $j = 1$ — осесимметричной),

$$\beta^* = \int_0^1 \frac{d\eta}{\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \tag{7}$$

— модифицированная интегральная функция от $\pi(\lambda)$; $\eta = y/\delta$ — безразмерная поперечная координата.

Модифицированные газодинамические функции потока полного импульса (4) и безразмерные интегральные толщины вязкого слоя (5)–(7) вычисляются по приведенной скорости λ_δ на внешней границе пограничного слоя.

Если вектор скорости не совпадает с нормалью расчетного сечения и составляет с продольной осью x угол ω, то газодинамические функции (4) несколько усложняются и приобретают вид

$$Z_\omega^{**}(\lambda_{\delta x}) = \frac{1}{1-H^*}\Big[Z(\lambda_{\delta x}) - \frac{\gamma}{\gamma-1}\lambda_{\delta x}(H^* + H^{**}) - \frac{1}{2}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_{\delta x}\mathrm{tg}^2\omega\Big]$$

или

$$Z_\omega^{**}(\lambda_{\delta x}) = Z^{**}(\lambda_{\delta x}) - \frac{1}{2}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_{\delta x}\mathrm{tg}^2\omega\frac{1}{1-H^*};$$
$$\frac{1}{R_\omega^{**}(\lambda_{\delta x})} = \frac{1}{r\left(\frac{\lambda_{\delta x}}{\cos\omega}\right)} - \frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{\lambda_{\delta x}^*}{r\left(\frac{\lambda_{\delta x}}{\cos\omega}\right)}(H^* + H^{**} + \mathrm{tg}^2\omega);$$
$$F_\omega^{**}(\lambda_{\delta x}) = \frac{1}{\beta^* R_\omega^{**}(\lambda_{\delta x})}. \tag{8}$$

При расчетах двухслойной модели течения, состоящей из пограничного слоя и примыкающего внешнего (по отношению к вязкому слою) невозмущенного потока или ядра течения, если расчетное сечение нормально линиям тока, поток полного импульса состоит из Φ (1) и Φ_δ (3):

$$\Phi^0 = \Phi + \Phi_\delta = \frac{\gamma+1}{\gamma} G a_{\text{кр}} Z^0(\lambda_\delta);$$
$$\Phi^0 = pF\frac{1}{R^0(\lambda_\delta)}; \tag{9}$$
$$\Phi^0 = \mathrm{p}_\delta^* F F^0(\lambda_\delta),$$

где

$$Z^0(\lambda_\delta) = \bar{G} Z^{**}(\lambda_\delta) + (1-\bar{G})Z(\lambda_\delta);$$
$$\frac{1}{R^0(\lambda_\delta)} = \frac{1}{r(\lambda_\delta)} - \frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{\lambda_\delta^*}{r(\lambda_\delta)}\frac{H^* + H^{**}}{H^* + \frac{1}{\bar{G}}(1-H^*)};$$
$$F^0(\lambda_\delta) = \frac{1}{\beta^* R^0(\lambda_\delta)} \tag{10}$$

— модифицированные газодинамические функции полного импульса для двухслойной модели течения; $\bar{G} = G^0/(G^0 + G_\delta)$ — относительный массовый расход газа через ядро потока.

Если расчетное сечение ориентировано под косым углом к линиям тока, то

$$\Phi_x^0 = \Phi_x + \Phi_{\delta x} = \frac{\gamma+1}{\gamma} G a_{\text{кр}} Z_\omega^0(\lambda_{\delta x});$$
$$\Phi_x^0 = pF\frac{1}{R_\omega^0(\lambda_{\delta x})}; \quad \Phi_x^0 = p_\delta^* F F_\omega^0(\lambda_{\delta x}), \tag{11}$$

где $Z_\omega^0(\lambda_{\delta \text{x}}) = \bar{G} Z_\omega^{**}(\lambda_{\delta \text{x}}) + (1-\bar{G})Z_\omega(\lambda_{\delta x})$ или

$$Z_\omega^0(\lambda_{\delta \text{x}}) = \left(1 + \bar{G}\frac{H^*}{1-H^*}\right)Z_\omega^(\lambda_{\delta x}) - \frac{\bar{G}}{1-H^*}\frac{\gamma}{\gamma-1}\lambda_{\delta x}(H^* + H^{**});$$
$$Z_\omega^0(\lambda_{\delta \text{x}}) = Z^0(\lambda_{\delta x}) - \bar{G}\frac{1}{2}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{\lambda_{\delta x}}{1-H^*}\mathrm{tg}^2\omega;$$
$$\frac{1}{R_\omega^0(\lambda_{\delta x})} = \frac{1}{r_\omega(\lambda_{\delta x})} - \frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{\lambda_{\delta x}^2}{r\left(\frac{\lambda_{\delta x}}{\cos\omega}\right)}\frac{H^* + H^{**}}{H^* + \frac{1}{\bar{G}}(1-H^*)} \tag{12}$$

или

$$\frac{1}{R^0_\omega(\lambda_{\delta x})} = \frac{1}{r_\omega\left(\frac{\lambda_{\delta x}}{\cos\omega}\right)} - \\ - \frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{\lambda^2_{\delta x}}{r\left(\frac{\lambda_{\delta x}}{\cos\omega}\right)}\frac{H^* + H^{**} + \mathrm{tg}^2\omega}{H^* + \frac{1}{\bar G}(1-H^*)};$$

$$F^0_\omega(\lambda_{\delta\omega}) = \frac{1}{\beta^* R^0_\omega(\lambda_{\delta x})}.$$

Поток полного импульса для плоского канала высотой h и шириной b с полностью развитым течением (пограничные слои с противоположных сторон стенок канала сомкнулись и заполнили все сечение, т. е. $\delta = h/2$) запишется в следующем виде:

$$\Phi = 2\Phi_\delta = 2\frac{\gamma+1}{\gamma}G_\delta a_{\text{кр}} Z^{**}(\lambda_0) = \\ = \frac{\gamma+1}{\gamma}G a_{\text{кр}} Z^{**}(\lambda_0); \\ \Phi = 2\Phi_\delta = 2pF_\delta\frac{1}{R^{**}(\lambda_0)} = pF\frac{1}{R^{**}(\lambda_0)}; \\ \Phi = p^*_0 F F^{**}(\lambda_0), \tag{13}$$

где $F = 2F_\delta = bh$ — площадь расчетного поперечного сечения канала; $G = 2G_\delta = 2\int \rho u\, d\left(\frac{h}{2} - y\right)$ — секундная масса.

Модифицированные газодинамические функции $Z^{**}(\lambda_0)$, $R^{**}(\lambda_0)$ и $F^{**}(\lambda_0)$ рассчитываются по приведенной скорости на оси канала по формулам (3). Относительные толщины вытеснения H^* и потери импульса H^{**} при этом должны быть заменены относительными условными площадями вытеснения $\bar F^*_\delta$ и потери импульса F^{**}_δ.

$$\bar F^*_\delta = \frac{F^*_\delta}{F} = \frac{1}{F}2b\int\limits_{h/2}^{0}\left(1 - \frac{\rho u}{\rho_0 u_0}\right)d\left(\frac{h}{2} - y\right) = \\ = \frac{2}{h}\int\limits_{h/2}^{0}\left(1 - \frac{\rho u}{\rho_0 u_0}\right)d\left(\frac{h}{2} - y\right); \\ \bar F^{**}_\delta = \frac{F^{**}_\delta}{F} = \frac{1}{F}2b\int\limits_{h/2}^{0}\left(1 - \frac{u}{u_0}\right)\frac{\rho u}{\rho_0 u_0}d\left(\frac{h}{2} - y\right) = \\ = \frac{2}{h}\int\limits_{h/2}^{0}\left(1 - \frac{u}{u_0}\right)\frac{\rho u}{\rho_0 u_0}d\left(\frac{h}{2} - y\right). \tag{14}$$

Для двухслойного течения начального участка в плоском канале с вязким пристенным слоем толщиной 2δ и невозмущенным ядром потока, $h_я = h - 2\delta$, поток полного импульса рассчитывается по формулам (9) с использованием газодинамических функций (10). При этом

$$Z^0(\lambda_0) = \bar G\left[Z(\lambda_0) - \frac{\gamma}{\gamma+1}\lambda_0\left(\bar F^*_\delta + \bar F^{**}_\delta\right)\right] \times \\ \times \frac{1}{1 - \bar F^*_\delta} + (1 - \bar G)Z(\lambda_0);$$

$$\frac{1}{R^0(\lambda_0)} = \frac{1}{r(\lambda_0)} - \frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{\lambda_0^2}{r(\lambda_0)}\frac{\bar F^*_\delta + \bar F^{**}_\delta}{\bar F^*_\delta + \frac{1}{\bar G}(1 - \bar F^{**}_\delta)};$$

$$F^0(\lambda_0) = \frac{1}{\beta^* R^0(\lambda_0)};$$

$$\bar F^*_\delta = \frac{2}{h - h_\delta}\int\limits_{h/2}^{h/2-\delta}\left(1 - \frac{\rho u}{\rho_0 u_0}\right)d\left(\frac{h}{2} - y\right);$$

$$\bar F^{**}_\delta = \frac{2}{h - h_\delta}\int\limits_{h/2}^{h/2-\delta}\left(1 - \frac{u}{u_0}\right)\frac{\rho u}{\rho_0 u_0}d\left(\frac{h}{2} - y\right). \tag{15}$$

Для плоского (моно) канала с раздельными перегородками (лопаточные каналы) поток полного импульса определяется для каждого единичного (под) канала соответственно режиму течения либо по формулам (13), (14), либо по формулам (9), (15). Разделительные перегородки могут быть расположены с равномерным и неравномерным шагом Δh и смещенными друг относительно друга в направлении продольной координаты канала (прямолинейные и криволинейные лопаточные диффузоры).

Для осесимметричного цилиндрического канала круглого поперечного сечения с полностью развитым течением, т. е. когда $\delta = R_0$ — радиус канала, поток полного импульса в расчетном сечении определяется по формулам (13), а модифицированные газодинамические функции будут иметь вид

$$\frac{1}{R^{**}(\lambda_0)} = \frac{1}{r(\lambda_0)} - \frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{\lambda_0^2}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_0^2}\left(\bar F^*_\delta + \bar F^{**}_\delta\right); \\ F^{**}(\lambda_0) = \frac{1}{\beta^* R^{**}(\lambda_0)}, \tag{16}$$

где

$$\bar F^*_\delta = 2\int\limits_{R_0}^{0}\left(1 - \frac{\rho u}{\rho_0 u_0}\right)\frac{R d(R_0 - R)}{R_0^2};$$

$$\bar F^{**}_\delta = 2\int\limits_{h/2}^{0}\left(1 - \frac{u}{u_0}\right)\frac{\rho u}{\rho_0 u_0}\frac{R}{R_0^2}d(R_0 - R).$$

Для осесимметричных кольцевых каналов круглого поперечного сечения в зависимости от характера установившегося течения и выбранного расчетного сечения поток полного импульса определяется либо по формулам (13), либо по формулам (9).

2. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПСЕВДОСКАЧКЕ И ИХ ИНТЕГРАЛЫ

Вследствие осевой протяженности псевдоскачка в 10–12 калибров канала важное значение приобретает изыскание методов активного воздействия на характеристики потока. Такое воздействие может быть осуществлено путем изменений не только начальной неравномерности, но и начальной степени турбулентности и пульсации параметров, наложения акустических колебаний и геометрии канала и других физических воздействий.

Основными уравнениями, описывающими в общем случае течение газа на псевдоскачке, будут уравнения законов сохранения расхода, энергии, импульса и уравнение состояния. В качестве замыкающих, в зависимости от того, решается ли прямая, обратная или смешанная задача, могут быть выбраны уравнение изменения площади сечения канала, уравнение изменения давления вдоль продольной оси или уравнение, связывающее эти параметры определенным образом. В некоторой степени выбор замыкающего уравнения приводит к некоторому различию в конечных результатах расчета. Однако при решении прикладных задач обычно останавливаются на наиболее простой системе уравнений.

2.1. Прямая задача

Уравнение расхода массы газа с учетом подвода или отвода вторичной массы газа по определенной зависимости (возможно, локально или распределенно) на длине псевдоскачка может быть записано в виде

$$\frac{dG}{d\bar{x}} = f(\bar{x}), \tag{17}$$

где

$$G(\bar{x}) = mp^*q(\lambda)\frac{F}{\sqrt{T^*}} = mpy(\lambda)\frac{F}{\sqrt{T^*}},$$
$$m = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{1}{R_{\text{г}}}};$$

— расход газа, выраженный через газодинамические функции

$$q(\lambda) = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\lambda,$$
$$y(\lambda) = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{\lambda}{1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2};$$

m — коэффициент в формуле расхода газа; $\bar{x} = x/D_{\text{г}}$ — безразмерная продольная координата.

Уравнение энергии с учетом зависимости (17) представим в виде

$$dI^* = dMi^*, \tag{18}$$

где $i = C_p\,dT^*$ — энтальпия газа. При $x = \text{const}$ и $R_{\text{г}} = \text{const}$ (показатель адиабаты и газовая постоянная) уравнение (18) приводится к виду

$$\sqrt{T^*/T_1^*} = \theta(\bar{x}).$$

При γ и $R_{\text{г}}$ переменных уравнение (18) должно быть представлено закономерностью в более общем виде: $I^* = f(\bar{x})$.

Уравнение импульсов для течения газа с трением, подводом или отводом массы вторичного газа в канале переменного поперечного сечения запишется в виде

$$d\Phi = pdF + u_x dM - \tau_w\,dF_w. \tag{19}$$

Здесь u_x — осевая составляющая скорости вторичной массы газа; $\tau_w = C_f\frac{\rho u^2}{2}$ — касательное напряжение на стенке канала, C_f — коэффициент гидравлического трения.

После несложных преобразований уравнения (19) получим

$$d\Phi = pdF + Gu\frac{u_x}{u}\frac{dG}{G} - \frac{1}{2}\xi Gu\frac{dx}{D_{\text{г}}}, \tag{20}$$

где $\xi = 4C_f$ — коэффициент гидравлического сопротивления (важнейшая гидравлическая характеристика канала); $D_{\text{г}} = 4F/\Pi$ — гидравлический диаметр канала; Π — периметр сечения канала.

Уравнение состояния совершенного газа записывается в виде

$$p = \rho R_{\text{г}} T. \tag{21}$$

Связь между заторможенными изоэнтропическими параметрами и параметрами газа в потоке определяется известными газодинамическими функциями:

$$\begin{aligned}
\frac{T}{T*} &= 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2 = \tau(\lambda);\\
\frac{P}{P*} &= \left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \pi(\lambda);\\
\frac{\rho}{\rho*} &= \left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \varepsilon(\lambda).
\end{aligned} \tag{22}$$

Используя выражения для потока полного импульса типа (3), представим уравнение (20) в следующих трех различных видах:

$$\begin{aligned}
d\left[\frac{\gamma+1}{\gamma}Ga_{\text{кр}}Z^i(\lambda_0)\right] &= pdF + Gu\frac{u_x}{u}\frac{dG}{G} - \frac{1}{2}\xi Gu\frac{dx}{D_{\text{г}}}\\
d\left[\text{p}F\frac{1}{R^i(\lambda_0)}\right] &= pdF + Gu\frac{u_x}{u}\frac{dG}{G} - \frac{1}{2}\xi Gu\frac{dx}{D_{\text{г}}}\\
d\left[p*FF^i(\lambda_0)\right] &= pdF + Gu\frac{u_x}{u}\frac{dG}{G} - \frac{1}{2}\xi Gu\frac{dx}{D_{\text{г}}}
\end{aligned} \tag{23}$$

В уравнениях (23) индексом i обозначены формы записи модифицированных газодинамических функций потока полного импульса.

Разделив почленно соответственно первое уравнение на $\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}Ga_{\text{кр}}\right)$, второе на $(pF)_1$ и третье на $(p^*F)_1$, после ряда преобразований уравнения (23) запишем в безразмерном виде:

$$\frac{dZ^i(\lambda_0)}{Z^i(\lambda_0)}+\frac{d\psi}{\psi}-R^i(\lambda_0)\frac{d\bar{F}}{\bar{F}}-$$
$$-\left[1-R^i(\lambda_0)\right]\bar{\lambda}_{\bar{G}}\frac{d\bar{G}}{\bar{G}}+\frac{1}{2}\xi\left[1-R^i(\lambda_0)\right]\frac{d\bar{x}}{\sqrt{\bar{F}}}=0;$$
$$\frac{d\bar{p}}{\bar{p}}-\frac{dR^i(\lambda_0)}{R^i(\lambda_0)}+\left[1-R^i(\lambda_0)\right]\frac{d\bar{F}}{\bar{F}}-$$
$$-\left[1-R^i(\lambda_0)\right]\bar{\lambda}_{\bar{G}}\frac{d\bar{G}}{\bar{G}}+\frac{1}{2}\xi\left[1-R^i(\lambda_0)\right]\frac{d\bar{x}}{\sqrt{\bar{F}}}=0;$$
$$\frac{d\sigma}{\sigma}-\frac{dF^i(\lambda_0)}{F^i(\lambda_0)}+\left[1-R^i(\lambda_0)\right]\frac{d\bar{F}}{\bar{F}}-$$
$$-\left[1-R^i(\lambda_0)\right]\bar{\lambda}_{\bar{G}}\frac{d\bar{G}}{\bar{G}}+\frac{1}{2}\xi\left[1-R^i(\lambda_0)\right]\frac{d\bar{x}}{\sqrt{\bar{F}}}=0. \tag{24}$$

Здесь ψ — комплексный параметр

$$\psi=\frac{G}{G_1}\sqrt{\frac{T^*}{T_1^*}}\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}R_{\text{г}}\right)\Big/\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}R_{\text{г}}\right)_1}=\bar{G}\theta\vartheta,$$

где $\bar{G}=G/G_1$ — коэффициент массового воздействия; $\theta=\sqrt{T^*/T_1^*}$ — коэффициент теплового воздействия; $\vartheta=\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}R_{\text{г}}\right)/\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}R_{\text{г}}\right)_1}$ — коэффициент термического воздействия; $\bar{F}=F/F_1$ — безразмерная площадь поперечного сечения канала; $\bar{\lambda}_{\bar{G}}=\lambda_{Gx}/\lambda_0$ — относительная безразмерная скорость подведенной (отведенной) массы газа, приведенной к расчетному сечению.

Общие интегралы дифференциальных уравнений (24) будут определять изменение приведенной скорости и относительного давления в конечном сечении псевдоскачка в функции начальных условий, физических воздействий и изменения геометрии канала:

$$Z^i(\lambda_0)=\frac{Z^i(\lambda_{01})}{\psi}\exp\left[\int_1^{\bar{F}}R^i(\lambda_0)\,d\ln\bar{F}+\right.$$
$$\left.+\int_1^{\bar{G}}I^i(\lambda_0)\bar{\lambda}_{\bar{G}}\,d\ln\bar{G}-\frac{1}{2}\int_0^{\bar{x}}I^i(\lambda_0)\xi\frac{d\bar{x}}{\sqrt{\bar{F}}}\right];$$
$$\bar{p}=\frac{R^i(\lambda_0)}{R^i(\lambda_{01})}\exp\left[-\int_1^{\bar{F}}R^i(\lambda_0)\,d\ln\bar{F}+\right.$$
$$\left.+\int_1^{\bar{G}}I^i(\lambda_0)\bar{\lambda}_{\bar{G}}\,d\ln\bar{G}-\frac{1}{2}\int_0^{\bar{x}}I^i(\lambda_0)\xi\frac{d\bar{x}}{\sqrt{\bar{F}}}\right]; \tag{25}$$
$$\sigma=\frac{F^i(\lambda_{01})}{F^i(\lambda_0)}\exp\left[-\int_1^{\bar{F}}R^i(\lambda_0)\,d\ln\bar{F}+\right.$$
$$\left.+\int_1^{\bar{G}}I^i(\lambda_0)\bar{\lambda}_{\bar{G}}\,d\ln\bar{G}-\frac{1}{2}\int_0^{\bar{x}}I^i(\lambda_0)\xi\frac{d\bar{x}}{\sqrt{\bar{F}}}\right].$$

Здесь для краткости записи принято $I^i(\lambda_0)=1-R^i(\lambda_0)$.

Правые части уравнений (25) представляют собой произведения четырех сомножителей, где:
- первый сомножитель $\frac{1}{\psi}$ учитывает влияние внутренних воздействий теплом θ, массой $\bar{G}$ и изменением термодинамических свойств потока газа ϑ;
- второй сомножитель $\exp\left[\int_1^{\bar{F}}R^i(\lambda_0)\,d\ln\bar{F}\right]$ или $\exp\left[\int_1^{\bar{F}}I^i(\lambda_0)\,d\ln\bar{F}\right]$ учитывает влияние изменения геометрии канала $\bar{F}=\bar{F}(\bar{x})$;
- третий сомножитель $\exp\left[\int_1^{\bar{G}}I^i(\lambda_0)\bar{\lambda}_{\bar{G}}\,d\ln\bar{G}\right]$ учитывает влияние изменения потока полного импульса за счет подведенной (отведенной) массы газа $\bar{G}=\bar{G}(\bar{x})$;
- четвертый сомножитель $\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^{\bar{x}}I^i(\lambda_0)\xi\frac{d\bar{x}}{\sqrt{\bar{F}}}\right]$ учитывает влияние закона трения $\xi=\xi(\bar{x})$.

Влияние начальной неравномерности потока определяют модифицированные газодинамические функции потока полного импульса $Z^i(\lambda_0)$, $R^i(\lambda_0)$ и $I^i(\lambda_0)$, $F^i(\lambda_0)$. Таким образом, уравнения (24) представляют собой дифференциальные (а с учетом интегральных характеристик вязкого диссипативного слоя — интегродифференциальные) уравнения движения газа в псевдоскачке, а уравнения (25) — уравнения движения в интегральной форме.

Указанные уравнения по форме и содержанию напоминают уравнения Л. А. *Вулиса* [5] — «условия обращения воздействия» и уравнения движения недиссоциированного газа В. Н. *Крымасова* [6], но при этом существенно отличаются от них модифицированными газодинамическими функциями потока полного импульса и дозвуковыми решениями при сверхзвуковых начальных условиях с высоким переходным непрерывным (только в одном частном случае локальным) градиентом параметров газового потока. В этом смысле уравнения (24)–(25) могут быть названы как общие условия перехода от сверхзвукового ($M>1$) течения к дозвуковому ($M<1$) в псевдоскачке. В частном случае, в предельно упрощающем предположении об отсутствии начальной неравномерности потока в канале, физических воздействий и трения в канале постоянной площади поперечного сечения уравнения (25) приводятся к виду

$$Z(\lambda_2)=Z(\lambda_1),\quad \bar{p}=r(\lambda_2)/r(\lambda_1),$$
$$\sigma=f(\lambda_1)/f(\lambda_2),$$

решение которых дает известные соотношения для единичного прямого скачка уплотнения: $\lambda_1\cdot\lambda_2=1$ — основное кинематическое соотношение для прямого скачка уплотнения;

$$\bar{p} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_1^2};$$

$$\sigma_{\text{п.ск.}} = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \lambda_1^2 \left(\frac{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_1^2}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{1}{\lambda_1^2}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

по отношению к которым в последующих расчетах будут даны сравнительные оценки.

Точные решения уравнений (24)–(25) можно получить, если известны зависимости $\psi = \psi(\bar{x})$ или $\bar{G} = \bar{G}(\bar{x})$, $\theta = \theta(\bar{x})$, $\gamma = \gamma(\bar{x})$, $\bar{F} = \bar{F}(\bar{x})$, $\xi = \xi(\bar{x})$, $\lambda_0 = \lambda_0(\bar{x})$ или $M_0 = M_0(\bar{x})$, а также начальные условия: числа M_1 и Re_1, профиль скорости вязкого слоя $u = u(\eta)$ (пограничного слоя или в сечении канала, заполненного вязким течением). При этом подынтегральные выражения получаются достаточно сложными, что приводит к существенным затруднениям аналитического метода, который рациональнее использовать для решения частных задач. В общем случае лучше переходить к приближенным или численным методам.

Форма записи уравнений (25) позволяет рассматривать раздельно и в любой комбинации воздействия на газовый поток на длине псевдоскачка.

2.2. Обратная задача

Выражение для определения изменения площади поперечного сечения канала $\bar{F} = \bar{F}(\bar{x})$ (обратная задача) находится из решения первого дифференциального уравнения (24), которое после ряда преобразований приводится к линейному неоднородному дифференциальному уравнению первого порядка относительно искомой функции $\sqrt{\bar{F}}$ и производной $\frac{d\sqrt{\bar{F}}}{d\bar{x}}$;

$$\frac{d\sqrt{\bar{F}}}{d\bar{x}} + \frac{1}{2R^i(\lambda_0)} \left\{ I^i(\lambda_0)\bar{\lambda}_{\bar{G}} \frac{d\ln\bar{G}}{d\bar{x}} - \frac{d\ln\left(\psi Z^i(\lambda_0)\right)}{d\bar{x}} \right\} \sqrt{\bar{F}} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{R^i(\lambda_0)} - 1\right]\xi(\bar{x}). \quad (26)$$

Общее решение уравнения (26) запишется в виде

$$\sqrt{\bar{F}} = \exp\left[-\int p(\bar{x})d\bar{x}\right] \times \left\{ \int Q(\bar{x}) \left[\exp\int p(\bar{x})d\bar{x}\right] d\bar{x} + C_1 \right\},$$

где

$$p(\bar{x}) = \frac{1}{2R^i(\lambda_0)} \left\{ I^i(\lambda_0)\bar{\lambda}_{\bar{G}} \frac{d\ln\bar{G}}{d\bar{x}} - \frac{d\ln\left(\psi Z^i(\lambda_0)\right)}{d\bar{x}} \right\},$$

$$Q(\bar{x}) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{R^i(\lambda_0)} - 1\right]\xi(\bar{x}).$$

Если возмущающая функция $Q(x) \equiv 0$, то уравнение (26) становится линейным однородным и решается способом разделения переменных

$$d\ln\sqrt{\bar{F}} = -\frac{1}{R^i(\lambda_0)} \times \left\{ I^i(\lambda_0)\bar{\lambda}_{\bar{G}} d\ln\bar{G} - d\ln\left(\psi Z^i(\lambda_0)\right) \right\}.$$

Тогда после интегрирования получим

$$\sqrt{\bar{F}} = \exp\left\{ \frac{1}{2}\int_0^{\bar{x}} \frac{1}{R^i(\lambda_0)} d\ln\left[\psi Z^i(\lambda_0)\right] - \frac{1}{2}\int_0^{\bar{x}} \frac{1}{R^i(\lambda_0)} \bar{\lambda}_{\bar{G}} d\ln\bar{G} \right\}.$$

К обратной задаче можно отнести определение из первого уравнения (25) при известном характере изменения площади поперечного сечения канала $\bar{F} = \bar{F}(\bar{x})$ коэффициента внутреннего воздействия на газовый поток на длине псевдоскачка, $\psi = \psi(\bar{x})$. Эта зависимость имеет вид

$$\psi = \frac{Z^i(\lambda_{01})}{Z^i(\lambda_0)} \exp\left[\int_1^{\bar{F}} R^i(\lambda_0) d\ln\bar{F} + \int_1^{\bar{G}} I^i(\lambda_0)\bar{\lambda}_{\bar{G}} d\ln\bar{G} - \frac{1}{2}\int_0^{\bar{x}} I^i(\lambda_0)\xi(\bar{x})d\bar{x} \right]. \quad (27)$$

Здесь могут быть сформулированы следующие задачи:

- при известных параметрах газа в начальном сечении псевдоскачка определить такой закон движения газа $\lambda_0 = \lambda_0(\bar{x})$ и такое профилирование канала — закона изменения площади поперечного сечения канала, при которых обеспечивались бы либо заданное отношение давлений, либо заданная величина коэффициента восстановления давления $\sigma_{\text{пск}} = p_2^*/p_1^*$, либо заданная величина приведенной скорости в конечном сечении псевдоскачка или отношения M_{02}/M_{01};
- при известных параметрах газа в начальном сечении псевдоскачка определить такой закон движения газа $\lambda_0 = \lambda_0(\bar{x})$ и такую закономерность раздельных $\bar{G} = \bar{G}(\bar{x})$, $\theta = \theta(\bar{x})$, $\vartheta = \vartheta(\bar{x})$ или комбинированных физических воздействий $\psi = \psi(\bar{x})$, при которых обеспечивались бы либо заданное отношение давлений, либо заданная величина коэффициента восстановления давления $\sigma_{\text{пск}} = p_2^*/p_1^*$, либо заданная величина приведенной скорости в конечном сечении «псевдоскачка» или отношения $\lambda_{02}/\lambda_{01}$, M_{02}/M_{01}.

Для решения этих задач уравнения (26) и (27) следует дополнить вторым и третьим уравнениями (24)–(25), из которых при заданных отношениях статических или полных давлений сначала определяются модифицированные газодинамические функции $R^i(\lambda_0)$ или $F^i(\lambda_0)$, а затем и закономерности течения газа $\lambda_0 = \lambda_0(\bar{x})$. С целью обеспечения значений параметров газа в конечном сечении псевдоскачка следует при решении первой задачи активно использовать либо раздельное, либо комбинированное воздействие в пределах допустимого и обеспечивающих эффективный переход от $M > 1$ к $M < 1$, а при решении второй задачи — геометрию канала, т. е. геометрическое воздействие при тех же условиях.

2.3. Смешанная задача

Интерпретация классической смешанной задачи в приложении к газодинамике торможения сверхзвукового потока с переходом от $M > 1$ к $M < 1$ в каналах заключается в определении закономерностей изменения площади поперечного сечения канала и статического давления в функции продольной координаты на длине псевдоскачка, т. е. $\bar{p} = \bar{p}(\bar{x})$, при известных начальных условиях и физических воздействиях — смешанная задача анализа.

Смешанная задача синтеза (управления) может быть сформулирована следующим образом: при заданных начальных условиях и геометрии канала обеспечить закономерность распределения статического давления $\bar{p} = \bar{p}(\bar{x})$ раздельным или комбинированным воздействием (управлением) на газовый поток в пределах допустимого при безусловном обеспечении перехода от $M > 1$ к $M < 1$.

Системы уравнений (24)–(25) в принципе позволяют решить обе сформулированные смешанные задачи. При решении задачи анализа из первых уравнений определяется зависимость изменения площади поперечного сечения канала (геометрия канала) от приведенной скорости, трения и физических воздействий, а из вторых и третьих уравнений — зависимости относительных давлений при заданных начальных условиях:

$$\varphi_1(\bar{F}) = f_1(\lambda_0, \xi, \psi); \quad \varphi_2(\bar{p}, \bar{F}) = f_2(\lambda_0, \xi);$$
$$\varphi_3(\sigma, \bar{F}) = f_3(\lambda_0, \xi).$$

При решении задачи синтеза (управления) при заданных начальных условиях, геометрии канала и закономерности распределения давления вдоль продольной координаты из второго и третьего уравнений сначала определяется закономерность изменения приведенной скорости $\lambda_0 = \lambda_0(\bar{x})$, а затем по первому уравнению — закономерность изменения физических раздельных или комбинированных воздействий:

$$\varphi_1(\lambda_0) = f_1(\bar{p}, \bar{F}, \xi); \quad \varphi_2(\lambda_0) = f_2(\sigma, \bar{F}, \xi);$$
$$\varphi_3(\psi) = f_3(\lambda_0, \bar{F}, \xi).$$

Аналитическое полное решение задач весьма затруднительно, и в явном виде выразить искомые функции невозможно. Здесь следует рекомендовать численные методы.

Рассмотрим упрощенные задачи, когда дополнительный импульс от подведенной (отведенной) массы и трение отсутствуют.

Из уравнений (24) получим следующее:

$$\frac{d\bar{F}}{\bar{F}} = \frac{1}{R^i(\lambda_0)} \frac{dZ^i(\lambda_0)}{Z^i(\lambda_0)} + \frac{1}{R^i(\lambda_0)} \frac{d\psi}{\psi};$$
$$\frac{d\bar{p}}{\bar{p}} + I^i(\lambda_0)\frac{d\bar{F}}{\bar{F}} = \frac{dR^i(\lambda_0)}{R^i(\lambda_0)};$$
$$\frac{d\sigma}{\sigma} + I^i(\lambda_0)\frac{d\bar{F}}{\bar{F}} = -\frac{dF^i(\lambda_0)}{F^i(\lambda_0)}; \tag{28}$$

— при решении задачи анализа или в интегральной форме

$$\begin{aligned} \ln \bar{F} &= \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{R^i(\lambda_0)} d\ln Z^i(\lambda_0(\bar{x})) + \\ &+ \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{R^i(\lambda_0)} d\ln \psi(\bar{x}); \\ \ln \bar{p} &+ \int_0^{x} I'(\lambda_0) \ell n \bar{F}(\bar{x}) = \ln R^i\left[\lambda_0(\bar{x})\right]; \\ \ln \sigma &+ \int_0^{x} I'(\lambda_0) \ln \bar{F}(\bar{x}) = -\ln F^i\left[\lambda_0(\bar{x})\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{I'(\lambda_0)} \frac{dR^i(\lambda_0)}{R^i(\lambda_0)} &= \frac{1}{I'(\lambda_0)} \frac{d\bar{p}}{\bar{p}} + \frac{d\bar{F}}{\bar{F}}; \\ -\frac{1}{I'(\lambda_0)} \frac{dF^i(\lambda_0)}{F^i(\lambda_0)} &= \frac{1}{I'(\lambda_0)} \frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{d\bar{F}}{\bar{F}}; \\ \frac{d\psi}{\psi} &= R^i(\lambda_0)\frac{d\bar{F}}{\bar{F}} - \frac{dZ^i(\lambda_0)}{Z^i(\lambda_0)}. \end{aligned} \tag{30}$$

— при решении задачи синтеза (управления) или в интегральной форме

$$\begin{aligned} &\int_0^{\bar{x}} \frac{1}{I'(\lambda_0)} \ln nR^i\left[\lambda_0(\bar{x})\right] = \\ &\quad = \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{I'(\lambda_0)} d\ln \bar{p}(\bar{x}) + \ln \bar{F}(\bar{x}); \\ &-\int_{\bar{x}}^{0} \frac{1}{I'(\lambda_0)} d\ln F^i\left[\lambda_0(\bar{x})\right] = \\ &\quad = \int_0^{\bar{x}} \frac{1}{I'(\lambda_0)} d\ln \sigma(\bar{x}) + \ln \bar{F}(\bar{x}); \\ &\ln \psi = \int_0^{\bar{x}} R^i(\lambda_0) \ln nF^i(\bar{x}) - \ln Z^i\left[\lambda_0(\bar{x})\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

Предложенные уравнения расчета основных параметров газового потока могут быть использованы для последующих частных решений.

ВЫВОДЫ

Таким образом, получены:

- модифицированные газодинамические функции полного импульса неравномерного потока;
- обобщенные квазиодномерные уравнения установившегося движения газа, позволяющие рассматривать изменение параметров потока в условиях влияния начальных факторов и различных физических воздействий;
- общие решения прямой, обратной и смешанной задач квазиодномерного движения газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Крокко, Л.** Одномерное рассмотрение газовой динамики установившихся течений // Основы газовой динамики / Л. Крокко. Пер. с англ. М. : ИЛ, 1963. С. 64–324.
2. **Абрамович, Г. Н.** Прикладная газовая динамика : учебное руководство / Г. Н. Абрамович. В 2-х ч. Ч. 1. 5-е изд., перераб и доп. М. : Наука, 1991. 600 с.
3. **Виноградов, Б. С.** Некоторые модификации газодинамических функций полного импульса / Б. С. Виноградов // Тр. Казанск. авиац. ин-та. Казань : КАИ, 1971. Вып. 133. С. 17–23.
4. **Черный, Г. Г.** Газовая динамика / Г. Г. Черный. М. : Наука, 1988. 424 с.
5. **Вулис, Л. А.** Термодинамика газовых потоков / Л. А. Вулис. М. : Госэнергоиздат, 1950. 320 с.
6. **Крымасов, Н. Н.** Газодинамические течения в каналах при наличии тепломассообмена / Н. Н. Крымасов // Тр. ЦАГИ. 1973. Вып. 1443. 64 с.

ОБ АВТОРАХ

Гимранов Эрнст Гайсович, проф. каф. прикладной гидромеханики. Дипл. инж.-мех. по авиац. двигателям (УАИ, 1965). Д-р техн. наук по тепловым двигателям (УАИ, 1990). Иссл. в обл. газовой динамики двигателей.

Михайлов Валерий Германович, проф. каф. основ констр. механизмов и машин. Дипл. инж.-мех. по гидравлич. машинам (УАИ, 1985). Д-р техн. наук по тепловым двигателям (УГАТУ, 1999). Иссл. в обл. газовой динамики двигателей.

УДК 621.313.282.2, 621.3.082.4

Ф. Р. ИСМАГИЛОВ, Р. Р. САТТАРОВ, А. В. ТРОФИМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ В ВИБРАЦИОННЫХ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯХ

Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований электромагнитных процессов в вибрационных электромеханических преобразователях. Получена математическая модель вибрационного преобразователя, позволяющая определить статические тяговые характеристики при учете нелинейности магнитной системы. Проведены экспериментальные исследования магнитного поля и электромагнитной силы, результаты которых подтверждают достоверность полученной математической модели. *Вибрационные электромеханические преобразователи; электромагнитные вибраторы; электромагнитные процессы; нелинейные магнитные системы*

В настоящее время существует широкий класс линейных электрических машин возвратно-поступательного движения, в том числе ударного действия. Область применения линейных электрических машин чрезвычайно широка — от реле в системах автоматики до катапульты при запуске самолетов и космических объектов. Наиболее широкое распространение получили линейные асинхронные преобразователи, принцип действия которых подобен принципу действия асинхронных двигателей с немагнитным проводящим полым ротором. В то же время, когда необходимы высокая надежность и постоянство скорости движения, широко применяются бесконтактные синхронные машины [1].

Разработка новых конструкций линейных электрических машин интенсивно продолжается. Специальный класс электромеханических преобразователей составляют линейные преобразователи возвратно-поступательного движения [1]. В настоящей работе рассматриваются электромагнитные процессы в линейных преобразователях, которые могут служить для возбуждения вибраций в агрессивных средах [2, 3]. Кроме того, такие преобразователи могут быть использованы как основной элемент устройства для перемещения вдоль линии электропередачи [4]. При этом возможен режим безударных или ударных колебаний, когда вибрационное движение инерционного элемента перемежается следующими один за другим ударами.

Статические тяговые характеристики известных электромагнитных вибраторов могут меняться в широких пределах путем изменения формы полюсов и их конструктивного исполнения [5]. При большом ходе якоря (до 100 мм) применяются броневые, а при малом ходе якоря (до 10 мм) — преимущественно клапанные магнитные системы. В броневом электромагните по сравнению с клапанным создается дополнительная сила за счет потоков рассеяния. Благодаря этой особенности броневые электромагниты используются в тех случаях, когда требуется развить относительно большое и практически постоянное усилие при большом ходе. В броневых электромагнитах перемещение является поперечным по отношению к магнитному полю, в то время как в клапанных — продольным [5].