УДК 777.555

В. Г. АБДРАХМАНОВ, Д. Н. ТЕТЕРКИН

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ БЕСКОНЕЧНОЙ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ

Сообщается о Maple-программе, позволяющей получить решение Даламбера задачи о колебаниях бесконечной и полубесконечной струны при задании начального условия различными аналитическими выражениями на конечном числе различных промежутков. Программа позволяет получить полное аналитическое выражение для решения, график решения, форму струны в заданный момент времени и наблюдать распространение волны. *Бесконечная струна; полубесконечная струна; решение Даламбера; кусочное задание начального условия; анимация; распространение волны; Maple*

Формула Даламбера решения задачи Коши для одномерного волнового уравнения (уравнения колебаний бесконечной струны)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0$$

при начальных условиях

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

имеет вид [1, 2]:

$$u(x,t) = \\ = \frac{1}{2}\big(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau.$$

Когда функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ даются одним аналитическим выражением на всей числовой оси, легко получить аналитическое выражение для решения $u(x,t)$ на всей полуплоскости $t \geq 0$. Однако дело сильно осложняется, когда $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ задаются разными аналитическими выражениями на разных частях промежутка $(-\infty,+\infty)$. В этом случае, чтобы получить полное аналитическое выражение для функции $u(x,t)$ приходится рассматривать большое число зон полуплоскости $t \geq 0$, в каждой из которых функция $u(x,t)$ задается одним аналитическим выражением. Само полученное аналитическое выражение занимает несколько страниц. Можно ограничиться графическим сложением прямой и обратной волн в заданный момент времени. Но и составление аналитического выражения для прямой и обратной волн занимает достаточно много времени. Чтобы сделать такую работу мгновенной, авторы составили программу получения решения Даламбера для бесконечной и полубесконечной струны при задании начальных данных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ разными аналитическими выражениями на конечном числе различных промежутков оси Ox. Саму программу можно получить, обратившись непосредственно к авторам.

Поясним основные моменты работы программы.

Ввод данных a, $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Коэффициент a вводится в самом начале простым присвоением значения соответствующей переменной. В частности, чем больше эта величина, тем быстрее распространяется волна.

Несколько иначе вводятся начальные профиль и скорость (импульс). Поскольку нас интересуют задачи, в которых эти функции имеют различные аналитические представления на разных интервалах, мы должны задавать как сами эти выражения, так и соответствующие им интервалы. В программе мы рассматриваем четыре одномерных массива (списка) – для границ интервалов и для аналитических выражений. Несоответствие между ними может привести к неверному решению.

Пусть начальный профиль представляет собой две верхних полуокружности единичного радиуса с центрами в точках $(1,0)$ и $(-1,0)$; вне интервала $(-2,2)$ он равен 0 (рис. 1).

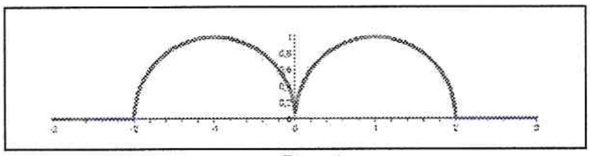

Рис. 1

Список границ в этом случае будет иметь следующий вид: [-2, 0, 2], а список выражений, [$x \rightarrow 0$, $x \rightarrow$ *sqrt*(1 – (x + 1)^2), $x \rightarrow$ *sqrt*(1 – (x – 1)^2), $x \rightarrow 0$]. Если мы хотим, чтобы функция имела только одно аналитическое представление на всей числовой прямой, мы должны оставить список границ пустым, а в списке выражений поместить эту функцию. Пусть в задаче отсутствует начальный импульс, тогда: список границ – [ ], список выражений – $[x \rightarrow 0]$.

Получение формулы и графиков: После ввода начальных данных управление передается процедуре, рассчитывающей значения функции $u(x,t)$. С помощью функции $plot3d$ можно просмотреть все поле решения уравнения (рис. 2).

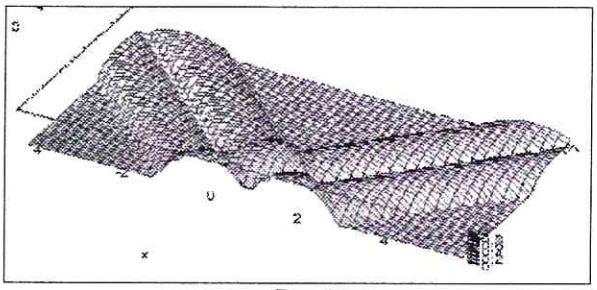

Рис. 2

Профиль решения (форму струны) в момент времени t можно просмотреть при помощи команды $plot$ (на рис. 3 дано сечение в момент $t = 1{,}5$):

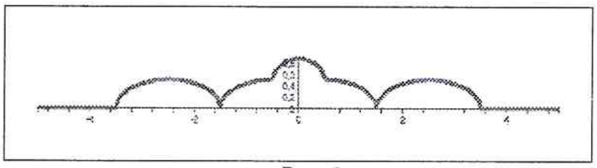

Рис. 3

Для большей наглядности работы программы возможно получение анимации решения.

Для полубесконечной струны программа реализуется по такой же схеме, с тем лишь отличием, что начальные условия мы задаем только для неотрицательных x (точка $x = 0$ в список границ не включается). При этом, если краевое условие имеет вид $u(0,t) = 0$ (конец струны закреплен в токе $x = 0$), то в программе следует положить $bound := 1$, если краевое условие имеет вид $u_x(0,t) = 0$ (конец $x = 0$ свободен), то $bound := 2$ (начальные условия продолжаются на отрицательную полуось соответственно нечетным и четным образом, после чего строится решение для бесконечной струны).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Левин, И. Г.** Уравнения математической физики / И. Г. Левин, В. И. Араманович. М. : Наука, 1969. 286 с.

2. **Кошляков, Н. С.** Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. М. : Высшая школа, 1970. 710 с.