Уфа: УГАТУ, 2003 Вестник УГАТУ Т. 4, № 2. С. 67–71

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

С. Ю. ЛУКАЩУК

РЕШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассматриваются обратные задачи определения постоянной и переменной матриц коэффициентов системы дифференциальных уравнений параболического типа. На основе метода интегральных характеристик построен алгоритм идентификации постоянной неособенной матрицы коэффициентов, имеющей простую структуру. Задача восстановления переменной матрицы коэффициентов с помощью метода интегральных характеристик сведена к известной задаче решения системы интегральных уравнений первого рода. *Обратная задача; идентификация коэффициентов; интегральная характеристика*

ВВЕДЕНИЕ

Пусть дана система дифференциальных уравнений параболического типа вида

$$U_t(x,t) = [A(U)U_x(x,t)]_x, \qquad 0 < x < L \leqslant \infty, \quad t > 0, \tag{1}$$

где

$$U(x,t) = (u_1(x,t), ..., u_n(x,t))', \qquad A(U) = \{A_{ij}(u_j)\}_{i,j=1}^n \tag{2}$$

(здесь $'$ — знак транспонирования).

Системой вида (1) описываются, в частности, процессы диффузионного переноса в многокомпонентных средах. В этом случае матрица A представляет собой матрицу коэффициентов диффузии.

Будем полагать, что для системы (1) поставлена первая краевая задача:

$$U(x,0) = 0, \tag{3}$$

$$U(0,t) = U_0(t), \tag{4}$$

$$\lim_{x\to\infty} U(x,t) = 0. \tag{5}$$

Поставим коэффициентную обратную задачу: на основе (1), (3)–(5) требуется восстановить матрицу коэффициентов системы A, используя в качестве дополнительной информации известные значения вектор-функции $U(x,t)$ на некотором множестве точек $M = \{M_{ij}\}$, $M_{ij} = (x_i, t_j)$, $i = 1,2,...,I$, $j = 1,2,...,J$, т. е.

$$U(M_{ij}) = U_{ij}, \tag{6}$$

где U_{ij} — известные векторы. Предполагается, что множество точек M достаточно для проведения операций численного интегрирования по пространственной и временной переменным.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом интегральных характеристик, предложенным и разработанным для уравнений теплопереноса проф. Ю. С. *Шаталовым* [1–3]. В основе метода интегральных характеристик лежат интегральные преобразования исходной краевой задачи по пространственной и/или временной переменным. Данный метод успешно применялся ранее для восстановления коэффициентов скалярных параболических уравнений [2–4] и, как будет показано ниже, может быть использован для идентификации матрицы неизвестных коэффициентов.

1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОСТОЯННОЙ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрим сначала случай, когда матрица A является постоянной. Тогда для ее восстановления достаточно, чтобы в (6) были известны значения вектора U при одном фиксированном значении $x = l$:

$$U(l,t) = U_l(t). \tag{7}$$

На практике значения $U_l(t)$ известны для ряда моментов времени:

$$U_{lj} = U_l(t_j), \quad j = 1,2,...,J.$$

Считаем, что $\{t_j\}$ позволяют приближенно найти преобразование Лапласа от функции $U_l(t)$.

Применим преобразование Лапласа к задаче (1), (3)–(6) и рассмотрим получившуюся в пространстве изображений задачу при n различных значениях параметра преобразования p_i $(i = 1, 2, ..., n)$:

$$U^*(x, P)P = AU^*_{xx}(x, P), \tag{8}$$
$$U^*(0, P) = U^*_0(P), \tag{9}$$
$$\lim_{x\to\infty} U^*(x, P) = 0, \tag{10}$$
$$U^*(l, P) = U^*_l(P), \tag{11}$$

где обозначено

$$U^*(x, P) = \{u^*_{ij}\}^n_{i,j=1},$$
$$u^*_{ij} \equiv u^*_i(x, p_j) \equiv \int\limits_0^\infty e^{-p_j t} u_i(x, t)\, dt,$$
$$P = \operatorname{diag}\{p_1, ..., p_n\}, \quad p_i > 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Утверждение 1. *Если квадратная матрица A является неособенной, то решение задачи (8) – (11) представляется рядом*

$$U^*(x, P) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^m}{m!} Y^m \times$$
$$\times U^*_0(P) \left(\sqrt{P}\right)^m, \quad Y = \sqrt{A^{-1}}. \tag{12}$$

Доказательство. Уравнение (8) допускает представление в виде

$$\tilde{U}^*_{xx} - \left(A^{-1} \otimes P'\right) \tilde{U}^* = 0, \tag{13}$$

где

$$\tilde{U}^* = \{\tilde{u}^*_k\}^{n^2}_{k=1}, \quad \tilde{u}^*_k = \tilde{u}^*_{(i-1)n+j} = u^*_{ij},$$
$$i, j = 1, 2, ..., n, \quad k = 1, 2, ..., n^2$$

— редуцированная матрица.

Вследствие диагональности матрицы P имеем $P' = P$.

По свойству прямого матричного произведения

$$A^{-1} \otimes P =$$
$$= \left(\sqrt{A^{-1}} \otimes \sqrt{P}\right) \left(\sqrt{A^{-1}} \otimes \sqrt{P}\right) =$$
$$= \left(Y \otimes \sqrt{P}\right)^2.$$

Тогда (13) принимает вид

$$\tilde{U}^*_{xx} - \left(Y \otimes \sqrt{P}\right)^2 \tilde{U}^* = 0. \tag{14}$$

Общее решение уравнения (14):

$$\tilde{U}^*(x, P) = e^{-(Y\otimes\sqrt{P})x} C_1 + e^{(Y\otimes\sqrt{P})x} C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные матрицы, определяемые из граничных условий. Из (9) и (10) находим

$$C_1 = \tilde{U}^*(0, P) \equiv \tilde{U}^*_0(P), \quad C_2 = 0,$$

т. е. частное решение рассматриваемой задачи имеет вид

$$\tilde{U}(x, P) = e^{-(Y\otimes\sqrt{P})x} \tilde{U}^*_0(P).$$

Раскладывая экспоненту как матричную функцию в ряд, получаем

$$\tilde{U}^*(x, P) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (Y \otimes \sqrt{P})^m \frac{x^m}{m!} \tilde{U}^*_0(P) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(Y^m \otimes (\sqrt{P})^m\right) \frac{x^m}{m!} \tilde{U}^*_0(P).$$

В результате обратного перехода от редуцированных матриц к обычным получаем искомое представление (12). *Утверждение доказано.*

Подставляя (11) в (12), получаем уравнение для определения искомой матрицы A(точнее, матрицы $Y = \sqrt{A^{-1}}$)

$$U^*_l(P) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{l^m}{m!} Y^m U^*_0(P) \left(\sqrt{P}\right)^m. \tag{15}$$

Обозначим

$$B_0 = U^*_0(P) - U^*_l(P),$$
$$B_m = (-1)^m \frac{l^m}{m!} U^*_0(P)(\sqrt{P})^m,$$
$$m = 1, 2, \ldots.$$

Тогда (15) примет вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} Y^m B_m = G(Y) = 0. \tag{16}$$

Матричной функции $G(Y)$ соответствует λ-матрица

$$G(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m B_m.$$

Справедливо следующее

Утверждение 2. *Собственные значения* λ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ (*с учетом кратности*) *матрицы* Y *являются корнями уравнения*

$$g(\lambda) = \det G(\lambda) = 0. \qquad (17)$$

Доказательство. В самом деле, в силу обобщенной теоремы Безу [5] матричный многочлен $G(\lambda)$ делится без остатка на бином $\lambda E - Y$ (E — единичная матрица), поскольку выполнено условие $G(Y) = 0$. Поэтому справедливо представление

$$G(\lambda) = (\lambda E - Y)Q(\lambda),$$

где $Q(\lambda)$ — некоторая λ-матрица. Тогда

$$g(\lambda) = \det G(\lambda) = \det(\lambda E - Y)\det Q(\lambda).$$

Поскольку, по предположению, λ_i — собственные значения матрицы Y, то

$$\det(\lambda_i E - Y) = 0,$$

а следовательно,

$$g(\lambda_i) = 0.$$

Утверждение доказано.

С учетом введенных ранее обозначений уравнение (17) может быть преобразовано к виду

$$g(\lambda) = \det\left(U_0^*(P)e^{-\lambda l\sqrt{P}} - U_l^*(P)\right) = 0. \qquad (18)$$

Здесь матричные функции имеют вид

$$\sqrt{P} = \operatorname{diag}\{\sqrt{p_1}, ..., \sqrt{p_n}\},$$
$$e^{-\lambda l\sqrt{P}} = \operatorname{diag}\{e^{-\lambda l\sqrt{p_1}}, ..., e^{-\lambda l\sqrt{p_n}}\}.$$

Необходимо отметить, что уравнение (18) может иметь бесконечное множество решений, однако только n из них не будут зависеть от P. Именно эти решения и будут представлять собой собственные значения λ_i. Поэтому для их нахождения необходимо, вообще говоря, решать серию уравнений типа (18) с различными матрицами P.

Теперь возникает задача построения алгоритма нахождения искомой матрицы Y на основании уравнения (16) и по известным в результате решения (18) ее собственным значениям. Решение этой задачи проведем в предположении, что матрица D (а следовательно, и матрица Y) имеет простую структуру [5]. Это, в частности, справедливо, если все собственные значения матрицы различны. Тогда все ее элементарные делители будут многочленами только первой степени и попарно простыми. В этом случае жорданова форма J_Y матрицы Y будет представлять собой диагональную матрицу, элементами которой будут выступать ее собственные значения:

$$J_Y = \operatorname{diag}\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}.$$

Матрица Y может быть представлена через свою жорданову форму:

$$Y = T^{-1}J_Y T, \qquad (19)$$

где T — некоторая неособенная матрица. При этом справедливо [5]

$$Y^n = T^{-1}J_Y^n T.$$

Подставляя это представление в уравнение (16), находим

$$\sum_{m=0}^{\infty} T^{-1}J_Y^m T B_m = 0$$

или

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m T^{-1}J_Y^m T U_0^* \frac{l^m}{m!}(\sqrt{P})^m = U_l^*.$$

Умножая это уравнение на матрицу Tслева, находим

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m J_Y^m T U_0^* \frac{l^m}{m!}(\sqrt{P})^m = TU_l^*. \qquad (20)$$

Обозначим

$$S_0 \equiv \{s_{0,ij}\}_{i,j=1}^n = TU_0^*,$$
$$S_l = \{s_{l,ij}\}_{i,j=1}^n = TU_l^*$$

и введем редуцированные матрицы

$$\tilde{S}_0 = \{\tilde{s}_{0,k}\}_{k=1}^{n^2}, \quad \tilde{s}_{0,k} = \tilde{s}_{0,(i-1)n+j} = s_{0,ij},$$
$$\tilde{S}_l = \{\tilde{s}_{l,k}\}_{k=1}^{n^2}, \quad \tilde{s}_{l,k} = \tilde{s}_{l,(i-1)n+j} = s_{l,ij}.$$

Тогда (20) можно записать в виде

$$e^{-(J_Y\otimes\sqrt{P})l}\tilde{S}_0 = \tilde{S}_l. \qquad (21)$$

Матричное уравнение (21) представляет собой систему из n^2 линейных алгебраических уравнений относительно элементов матрицы T.

В результате приходим к следующему алгоритму восстановления постоянной неособенной матрицы простой структуры:

1) решается уравнение (18) и находятся все собственные значения матрицы Y;

2) решается система (21) и восстанавливается матрица T;

3) на основании (19) определяется матрица Y;

4) по соотношению $A = Y^{-2}$ находится искомая матрица A.

2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЕРЕМЕННОЙ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Пусть теперь матрица коэффициентов A зависит от U и рассматривается ограниченная область $0 \leqslant x \leqslant L < \infty$. Будем полагать, что каждый элемент этой матрицы A_{ij} зависит только от одного элемента вектора U,причем от того, перед производной которого этот элемент находится в уравнении, т. е. $A(U) = \{A_{ij}(u_j)\}_{i,j=1}^{n}$. В этом случае интегрированием по пространственной переменной задача отыскания матрицы $A(U)$ сводится к задаче решения системы интегральных уравнений первого рода. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть вектор* $U(x,t) = (u_1(x,t),...,u_n(x,t))'$ *и матрица* $A(U) = \{A_{ij}(u_j)\}_{i,j=1}^{n}$ *удовлетворяют уравнению* (1), *причем все функции* $u_i(x,t)$ $(i = 1,2,...,n)$ *монотонны по* $x \in [0,L]$.*Пусть*$\rho(x)$ *— дифференцируемая на* $[0,L]$ *функция, такая, что* $\rho(0) = \rho(L) = 0$. *Тогда элементы матрицы* A *удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений первого рода:*

$$\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{g_j(t)}^{h_j(t)} J_j(s,t;\rho) A_{ij}(s)\, ds = f_i(t),$$

$$i = 1,2,...,n, \qquad (22)$$

в которой

$$J_i(s,t;\rho) = (-1)^{k_i} \left. \frac{d\rho(x)}{dx} \right|_{x=x_i(s,t)},$$

$$f_i(t) = \frac{d}{dt} \int\limits_0^L \rho(x) u_i(x,t) dx,$$

$$g_i(t) = \min_{0 \le x \le L} u_i(x,t),$$

$$h_i(t) = \max_{0 \le x \le L} u_i(x,t).$$

Здесь $x_i(s,t)$ *— функция координаты изоповерхности* $u_i(x,t) = s, k_i$ *— параметр, который равен нулю, если* $u_i(x,t)$ *монотонно возрастает, и единице, если* $u_i(x,t)$ *монотонно убывает.*

Доказательство. Умножим уравнение (1) на $\rho(x)$ и проинтегрируем по $x \in [0,L]$. В результате левая часть будет представлять собой вектор, значениями которого являются функции $f_i(t)$.

Выполним преобразование типового слагаемого, возникающего в правой части полученной после интегрирования системы:

$$\int\limits_0^L \rho(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(A_{ij}(u_j) \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^L \rho(x) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int\limits_{g_j(t)}^{u_j(x,t)} A_{ij}(s) ds \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^L \frac{d^2\rho}{dx^2} \int\limits_{g_j(t)}^{u_j(x,t)} A_{ij}(s)\, ds\, dx -$$

$$- \left. \left(\frac{d\rho}{dx} \int\limits_{g_j(t)}^{u_j(x,t)} A_{ij}(s)\, ds \right) \right|_{x=0}^{L} \qquad (23)$$

(здесь выполнено интегрирование по частям с учетом $\rho(0) = \rho(L) = 0$).

Введем характеристическую функцию

$$\chi(g_j(t), u_j(x,t), s) = \begin{cases} 1, & s \in (g_j(t), u_j(x,t)); \\ 0, & s \notin (g_j(t), u_j(x,t)). \end{cases}$$

Тогда (23) можно переписать в виде

$$\int\limits_0^L \frac{d^2\rho}{dx^2} \int\limits_{g_j(t)}^{h_j(t)} \chi(g_j(t), u_j(x,t), s) A_{ij}(s)\, ds\, dx -$$

$$- \left. \left(\frac{d\rho}{dx} \int\limits_{g_j(t)}^{h_j(t)} \chi(g_j(t), u_j(x,t), s) A_{ij}(s)\, ds \right) \right|_{x=0}^{L}. \qquad (23')$$

Допустим, что $u_j(x,t)$ монотонно возрастает. Тогда

$$\chi(g_j(t), u_j(0,t), s) = 1,$$
$$\chi(g_j(t), u_j(L,t), s) = 0$$

и после смены порядка интегрирования в первом интеграле (23′) имеем

$$\int\limits_{g_j(t)}^{h_j(t)} \left(\int\limits_0^{x_j(s,t)} \frac{d^2\rho}{dx^2}\,dx + \left.\frac{d\rho}{dx}\right|_{x=0} \right) A_{ij}(s)\,ds =$$

$$= \int\limits_{g_j(t)}^{h_j(t)} \left.\frac{d\rho}{dx}\right|_{x=x_j(s,t)} A_{ij}(s)\,ds. \quad (24)$$

Если $u_j(x,t)$ монотонно убывает, то

$$\chi(g_j(t), u_j(0,t), s) = 0,$$
$$\chi(g_j(t), u_j(L,t), s) = 1$$

и после смены порядка интегрирования в первом интеграле (23′) получаем

$$\int\limits_{g_j(t)}^{h_j(t)} \left(\int\limits_{x_j(s,t)}^{L} \frac{d^2\rho}{dx^2}\,dx - \left.\frac{d\rho}{dx}\right|_{x=L} \right) A_{ij}(s)\,ds =$$

$$= -\int\limits_{g_j(t)}^{h_j(t)} \left.\frac{d\rho}{dx}\right|_{x=x_j(s,t)} A_{ij}(s)\,ds. \quad (24')$$

Объединяя (24) и (24′), окончательно находим

$$\int\limits_0^L \rho(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(A_{ij}(u_j)\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x} \right) dx =$$

$$= (-1)^{k_j} \int\limits_{g_j(t)}^{h_j(t)} \left.\frac{d\rho}{dx}\right|_{x=x_j(s,t)} A_{ij}(s)\,ds =$$

$$= \int\limits_{g_j(t)}^{h_j(t)} J_j(s,t;\rho) A_{ij}(s)\,ds.$$

Проводя соответствующую суперпозицию, получаем левую часть искомой системы интегральных уравнений (22). *Утверждение доказано.*

Необходимо отметить, что число неизвестных функций в системе (22) равно n^2, в то время как общее число уравнений всего n. Тем не менее, если рассматривать (22) на совокупности весовых функций $\rho_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$, то возникает замкнутая система из независимых n^2 уравнений, позволяющая восстановить всю матрицу искомых коэффициентов.

Существенным недостатком системы (22) является наличие производных по временной переменной, входящих в $f_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$, вычисление которых с требуемой точностью по экспериментальным данным может оказаться не всегда возможным. Однако этот недостаток легко устраняется дополнительным интегрированием системы (22) по временной переменной. В этом случае необходимо также провести смену порядка интегрирования во всех возникающих двойных интегралах в левой части системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены две частные обратные задачи идентификации постоянной и переменной матриц коэффициентов системы уравнений параболического типа. Эти задачи имеют естественное обобщение: для постоянной матрицы необходимо отказаться от требования простоты ее структуры, а для переменной матрицы необходимо рассмотреть случай, когда каждый ее элемент является функцией не одной, а нескольких переменных. При этом возможность решения этих задач методом интегральных характеристик не представляется очевидной и требует дополнительного детального изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Власов В. В., Шаталов Ю. С.** и др. Теплофизические измерения. Тамбов: ВНИИРТМаш, 1975. 255 с.
2. **Шаталов Ю. С.** Интегральные представления постоянных коэффициентов переноса. Уфа: УАИ, 1992. 82 с.
3. **Шаталов Ю. С.** Функционально-интегральные уравнения теплофизических характеристик. М.: Наука, 1996. 304 с.
4. **Shatalov Yu. S., Lukashuk S. Yu., Rikachev Yu. Yu.** The problem of coefficients identification in the mathematical model of the ion implantation diffusion process // Inverse Problems in Engineering. 1999. V. 7. P. 267–290.
5. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

ОБ АВТОРЕ

Лукащук Станислав Юрьевич, доцент каф. ВВТиС УГАТУ. Дипл. инж. по авиацион. и ракетно-косм. теплотехнике (УГАТУ, 1997). Канд. физ.-мат. наук по тепло- и молекулярной физике (защ. в БГУ, 1999). Исследования в обл. математического моделирования, обратных задач, высокопроизводительных вычислений.