Уфа: УГАТУ, 2003 Вестник УГАТУ Т. 4, № 2. С. 72–78

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МАТЕМАТИКА

УДК 517.928

Л. А. КАЛЯКИН

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ГЛАВНОГО РЕЗОНАНСА

Исследована система двух дифференциальных уравнений первого порядка, которая возникает при усреднении нелинейных систем по быстрым одночастотным колебаниям. Основной результат состоит в построении асимптотики для двухпараметрических решений двух типов: ограниченных и растущих на бесконечности. Обсуждается приложение этих результатов к решению проблемы авторезонанса. *Нелинейные колебания; резонансы; асимптотики; малый параметр*

ВВЕДЕНИЕ

В данной статье исследуется задача из теории колебаний, которая является ключевой при изучении одного из интереснейших резонансных эффектов, известного под названиями авторезонанс, автофазировка, захват частоты.

С теорией колебаний как с одним из разделов теории дифференциальных уравнений связано большое количество самых впечатляющих приложений математики к разным областям естествознания от небесной механики до биологии. Аппарат дифференциальных уравнений, эффективность которого первоначально была продемонстрирована в астрономии, ныне является неотъемлемой частью почти любого теоретического исследования. Зачастую математические модели в форме дифференциальных уравнений для разных явлений оказываются идентичными, что обеспечивает успешное применение одних и тех же математических рецептов к исследованию различных, совершенно несхожих процессов. Возникающие на этом пути отдаленные аналогии позволяют выделить наиболее общие закономерности природы.

Явление авторезонанса, по-видимому, отражает одну из таких общих закономерностей. Оно наблюдается для широкого класса колебательных систем разной природы и заключает в себе эффективный способ передачи энергии в нелинейную систему. Главную роль в нем играет одно из самых характерных свойств нелинейной системы — зависимость частоты собственных (свободных) колебаний от энергии. Суть явления состоит в том, что под действием малого внешнего возмущения с медленно меняющейся частотой в системе возникают собственные колебания с той же частотой и с нарастающей амплитудой. Этот эффект, известный также под названиями автофазировка, мало зависит от того, как меняется вынуждающая частота, лишь бы она проходила через резонансное значение в один из моментов и затем менялась в нужном направлении. При анализе этого явления создается впечатление об автоматической подстройке системы под внешнее воздействие, и в связи с этим иногда говорят о захвате системой частоты вынуждающих колебаний. Одним из результатов такого захвата и возникающего долговременного резонанса является значительный рост энергии. Этот эффект широко используется в экспериментальной физике, в частности, он положен в основу конструкции ускорителей релятивистских частиц. Следует указать, что захват частоты возможен лишь при достаточно большой амплитуде вынуждающих колебаний, пороговое значение которой зависит от рассогласования частот.

Приведенное выше описание авторезонанса носит качественный характер и извлекается из анализа ряда простых математических моделей. Надо сказать, что математические модели авторезонанса, даже в простейших постановках, до сих пор остаются слабо исследованными. Известные результаты опираются либо на численные эксперименты, либо на примитивный анализ, выполненный на физическом уровне строгости. Нелинейный характер системы ведет к значительным трудностям при аналитических исследованиях.

В данной статье приводятся результаты по асимптотическому анализу системы урав-

Работа выполнена при поддержке РФФИ 03-01-00716, Грант Научные школы НШ-1446.2003.1, INTAS 99–1068

нений главного резонанса. К этим уравнениям можно свести широкий класс гамильтоновых систем с вынуждающей силой, если использовать естественные малые параметры, каковыми являются амплитуда и скорость изменения частоты вынуждающих колебаний. Основной целью работы является доказательство существования решений, которые стремятся к нулю на одной бесконечности и неограниченно растут на другой. Именно такие решения соответствуют авторезонансу. В целом приведенные ниже результаты дают ключ к пониманию авторезонанса как явления значительного роста вынужденных нелинейных колебаний, инициированных малой внешней накачкой.

Постановка задачи

Рассматривается система двух дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + [\theta - \lambda(x^2+y^2)]\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\lambda = \mathrm{const} > 0), \tag{0.1}$$

известная под названием уравнений главного резонанса [1–3]. Требуется построить асимптотику на бесконечности для различных решений этой системы.

Растущие решения удобно исследовать в переменных «амплитуда–фаза», сделав замену $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$. Для функций $r, \psi(\theta)$ уравнения приобретают вид

$$\frac{dr}{d\theta} = \cos\psi, \qquad \Big(\frac{d\psi}{d\theta} + \theta - \lambda r^2\Big) r = -\sin\psi. \tag{0.2}$$

Основной результат работы состоит в построении асимптотики двухпараметрического семейства решений с неограниченно растущей амплитудой $r(\theta)$. Кроме того, построена асимптотика другого двухпараметрического семейства решений с ограниченной амплитудой.

Постановка задачи об асимптотике решения в особой точке, в частности на бесконечности, является классической, и на эту тему имеется большое число публикаций, см., например, [4–7]. Однако для уравнений (0.1) известные результаты непосредственно не применимы из-за осциллирующего характера решений.

В рассматриваемой форме уравнения содержат одну характерную константу λ, которая считается положительной. Вопрос об асимптотике при $\lambda < 0$ сводится к рассматриваемому случаю ($\lambda > 0$) заменой (x, y, θ, λ) на $-(x, y, \theta, \lambda)$. Любые другие отличные от нуля коэффициенты в уравнениях исключаются элементарными преобразованиями.

Данная работа ограничивается сравнительно частным случаем уравнений со специфической кубической нелинейностью (0.1). Как раз такого типа системы возникают при асимптотическом решении ряда задач с малым параметром [1-3]. Они интенсивно исследуются в последние годы [8–11], в частности, в связи с некоторыми задачами небесной механики. Мы при постановке задачи для (0.1) ориентируемся на проблему авторезонанса, которая обычно связывается с физикой плазмы и с ускорителями релятивистских частиц [12–18]. Большое число статей на эту тему можно найти по адресу [19].

1. СТЕПЕННЫЕ АСИМПТОТИКИ

Нетрудно построить степенные ряды с растущим главным членом

$$r(\theta) = \rho\theta^{1/2} + \sum_{k=2}^{\infty} \theta^{-k/2}\rho_k, \qquad \psi(\theta) = \psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{-k/2}\psi_k, \qquad \theta \to \infty, \tag{1.1}$$

которые представляют собой формальное асимптотическое решение при $\theta \to \infty$. Константы ρ_k, ψ_k при $k \geq 1$ определяются однозначно из рекуррентных формул, получающихся при подстановке рядов (1.1) в уравнения (0.2). Главные члены растущего решения извлекаются из нелинейных уравнений: $(1 - \lambda\rho^2) = 0$, $\cos\psi_0 = 0$, которые разрешимы при $\lambda > 0$. Поскольку тригонометрическое уравнение имеет два различных (по модулю 2π) корня $\psi_0 = \pm\pi/2$, то возможно построение двух асимптотических решений. Эти две асимптотические конструкции связаны с разными точными решениями.

Теорема 1.1. *Для уравнений (0.2) существует единственное решение с растущей амплитудой, которое имеет асимптотическое разложение в виде рядов (1.1) с $\psi_0 = \pi/2$.*

Теорема 1.2. *Для уравнений (0.2) существует однопараметрическое семейство решений с растущей амплитудой, которые имеют одно* *и то же асимптотическое разложение в виде рядов* (1.1) с $\psi_0 = -\pi/2$. *Разные решения экспоненциально близки при* $\theta \to \infty$.

Решений с подобной асимптотикой, растущих на другой бесконечности (при $\theta \to -\infty$), не существует. При $\theta < 0$ нетрудно получить априорную оценку $\lambda r^4 \leq M_0 + M_1 r^2$ с константами $M_0, M_1 > 0$, не зависящими от θ. Отсюда вытекает

Лемма 1.1. *Любое решение уравнений* (0.1) *ограничено при* $\theta \to -\infty$.

Для одного из таких решений строится степенная асимптотика при $\theta \to -\infty$; она оказывается убывающей.

Теорема 1.3. *Для уравнений* (0.1) *существует единственное решение с убывающей при* $\theta \to -\infty$ *амплитудой, которое имеет асимптотическое разложение в виде рядов*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\theta^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=2}^{\infty}\theta^{-n}\mathbf{x}_{n,0}, \qquad (1.2)$$
$$\theta \to \infty, \quad (\mathbf{x}_{n,0} = \mathrm{const}).$$

Тот же самый ряд описывает асимптотику решения, убывающего при $\theta \to \infty$. При этом надо понимать, что два таких убывающих решения различны, поскольку решение, убывающее на одной бесконечности, вовсе не обязано убывать на другой.

Обоснование степенных асимптотик приведено, например, в [6].

2. АСИМПТОТИКИ С ОГРАНИЧЕННОЙ АМПЛИТУДОЙ

В общем случае для ограниченных решений асимптотика при $\theta \to \pm\infty$ оказывается осциллирующей и строится методом ВКБ (Вентцель–Крамерс–Бриллюэн). При этом различные решения можно идентифицировать заданием пары констант в асимптотике на той или иной бесконечности. В предлагаемой конструкции нелинейности и правые части в (0.1) рассматриваются как слабые возмущения линейного оператора. Асимптотическое решение строится в виде рядов по обратным степеням θ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \sin S \\ \cos S \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty}\theta^{-n}\mathbf{x}_n(S;c),$$
$$\theta \to \infty \qquad (2.1)$$

с коэффициентами, зависящими от «быстрой» переменной $S = S(\theta)$, для которой строится своя асимптотика:

$$S = \theta^2/2 - \lambda c^2\theta + s_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\theta^{-n}s_n, \qquad (2.2)$$
$$\theta \to \infty.$$

Константы $c, s_0 \in \mathbb{R}$ являются произвольными параметрами решения. Асимптотическая структура ряда обеспечивается ограниченностью коэффициентов $\mathbf{x}_n(S;c)$ равномерно по S. Более того, вектор-функции $\mathbf{x}_n(S;c) = (x_n; y_n)^\top$ оказываются 2π–периодическими по S. Они определяются из неоднородных уравнений линейного осциллятора

$$\frac{d\mathbf{x}_n}{dS} + J\mathbf{x}_n = \mathbf{f}_n(S;c), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которые получаются из уравнений (0.1) приравниванием выражений при одинаковых степенях θ. Векторы правых частей выписываются через предыдущие приближения. Требование периодичности поправки $\mathbf{x}_n$ по быстрой переменной обеспечивается за счет ликвидации произволов в $\mathbf{x}_k$ на предыдущих шагах $k < n$ и выбором коэффициентов s_k в разложении фазовой функции.

В частности, первые три члена асимптотики описываются формулами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c\,\mathbf{x}_+(S) - \theta^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} -$$
$$-\theta^{-2}\lambda c^2\left\{2\sin(S)\,\mathbf{x}_-(S) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} + \mathcal{O}(\theta^{-3}),$$
$$S = \theta^2/2 - \lambda c^2\theta + s + \theta^{-1}2\lambda c + \mathcal{O}(\theta^{-2}), \quad \theta \to \infty$$

с использованием пары решений линейного осциллятора

$$\mathbf{x}_+(S) = \begin{pmatrix} \sin S \\ \cos S \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_-(S) = \begin{pmatrix} -\cos S \\ \sin S \end{pmatrix}.$$

Сдвиг фазы $-\lambda c^2\theta$ обязан кубическому резонансу, который проявляется через нелинейность; без этого сдвига конструкция асимптотического решения в форме (2.1) невозможна. Аналогично строится асимптотика при $\theta \to -\infty$. Константы $c = c_\pm$, $s = s_\pm$ произвольны.

Замечание. При выборе параметра $c = 0$ вся конструкция сильно вырождается и зависимость от второго параметра s_0 исчезает. Асимптотическое решение представляется степенным рядом с постоянными коэффициентами (1.2).

Поскольку главная часть в уравнениях (0.1) представляется линейным оператором, то нетрудно обосновать построенную асимптотику, доказав теорему существования для остатка. Имеет место

Теорема 2.4. *Система уравнений* (0.1) *имеет двухпараметрическое семейство решений* $x, y(\theta; c_\pm, s_\pm)$, *для которых ряды* (2.1) *представляют собой асимптотическое разложение при* $\theta \to \pm\infty$.

Решениями с такой асимптотикой при $\theta \to -\infty$ исчерпывается все множество решений. Однако не все из этих решений имеют такого же типа (ограниченную) асимптотику при $\theta \to \infty$.

3. АСИМПТОТИКИ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ АМПЛИТУДОЙ

Для построения решения с неограниченной амплитудой удобно выделить растущую часть, сделав в (0.2) замену функций

$$r = \rho\theta^{1/2} + \theta^{-1/4}\mu^{-1}R(\theta), \quad \psi = \pi/2 + \Psi(\theta).$$

Здесь $\rho = 1/\sqrt{\lambda}$, $\mu = \sqrt{2}\lambda^{1/4}$, $\lambda > 0$. Уравнения для новых неизвестных записываются в форме

$$\begin{gathered} R' + \theta^{1/4}\mu\sin\Psi = \theta^{-1}R/4 + \theta^{-1/4}\mu\rho/2, \\ \Psi' - \theta^{1/4}\mu R = \theta^{-1/2}R^2/2\rho - \\ - \theta^{-1/2}\mu(\mu\rho + \theta^{-3/4}R)^{-1}\cos\Psi. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Основная трудность рассматриваемой задачи состоит в выделении из этих уравнений главной части, которая обеспечивает построение асимптотики, отличной от тривиальных степенных рядов (1.1). Конечно, можно догадаться, что асимптотика убывающих решений $R, \Psi = o(1)$, $\theta \to \infty$ будет определяться из линеаризованных на нуле уравнений. И в самом деле, асимптотическое решение может быть построено аналогично предыдущему случаю в виде ряда по степеням, кратным $\theta^{-1/8}$, с коэффициентами, которые зависят от быстрой переменной $S = (4/5)\mu\theta^{5/4} + \mathcal{O}(\theta)$, $\theta \to \infty$ и от пары произвольных констант c, s_0. Но этот путь ведет к громоздким и запутанным вычислениям.

В данной работе предлагается другой способ, который оказывается более простым в реализации и не связан с предположением об убывании решений R, Ψ. Он представляет собой аналог нелинейного метода ВКБ [20–22] в комбинации с идеями Крылова–Боголюбова и основан на использовании общего решения уравнений математического маятника:

$$\frac{d}{d\sigma}R_0 + \sin\Psi_0 = 0, \quad \frac{d}{d\sigma}\Psi_0 - R_0 = 0. \tag{3.2}$$

В основу конструкции положено семейство периодических решений уравнений маятника $R_0, \Psi_0(\sigma; E)$, которое существует в окрестности устойчивой неподвижной точки $(0, 0)$. В качестве параметра E удобно использовать значение интеграла энергии $E = R_0^2/2 - \cos\Psi_0 + 1$. Отметим, что период $T(E)$ и частота $\omega(E) = 2\pi/T$ рассматриваемых решений гладко зависят от энергии. В частности, разложение частоты по малой энергии в главных членах имеет вид $\omega(E) = [1 - E/8 + \mathcal{O}(E^2)]$, $E \to 0$.

Для уравнений (3.1) строится асимптотическое решение при $\theta \to \infty$ с использованием $R_0, \Psi_0(\sigma; E)$ в качестве главного члена[1]. Основная идея состоит в том, что в этих функциях допускаются деформации энергии $E = E(\theta)$ и подбирается подходящим образом быстрая переменная σ.

Асимптотическое решение берется в виде рядов по степеням, кратным $\theta^{-1/4}$

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty}\theta^{-n/4}R_n(\sigma; E), \\ \Psi(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty}\theta^{-n/4}\Psi_n(\sigma; E) \end{aligned} \tag{3.3}$$

с коэффициентами, зависящими от переменных: $\sigma = S(\theta)/\omega(E)$, $E = E(\theta)$. Ограниченность коэффициентов по быстрой переменной σ является дополнительным требованием на структуру решения.

Фазовая функция $S(\theta)$ и энергия $E(\theta)$ подлежат определению наряду с коэффициентами R_n, Ψ_n. Для них выписываются аналоги уравнений эйконала и переноса

$$\frac{dS}{d\theta} = \mu\theta^{1/4}\omega(E), \quad \frac{dE}{d\theta} = \mu Q(E, \theta). \tag{3.4}$$

[1] На использование уравнения маятника в похожей задаче об исследовании нелинейного резонанса указывал Б. В. *Чириков* [23].

Эти уравнения решаются на втором этапе после определения асимптотики правой части

$$Q(E,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\theta^{-n/4}Q_n(E),\quad \theta\to\infty.$$

Вводимые таким образом дополнительные неизвестные $Q_n(E)$ находятся на первом этапе из требований периодичности по быстрой переменной σ асимптотического решения (3.3).

Рекуррентная система задач для вектор-функций $\mathbf{U}_n(\sigma;E)=(R_n,\Psi_n)^\top$ получается из (3.1) приравниванием выражений при одинаковых степенях θ и представляет собой линеаризованные уравнения маятника

$$\frac{d}{d\sigma}\begin{pmatrix}R_n\\ \Psi_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\Psi_n\cos\Psi_0\\ -R_n\end{pmatrix}=\mathbf{F}_n(\sigma;E). \tag{3.5}$$

Правые части $\mathbf{F}_n$ выписываются через предыдущие приближения. На каждом шаге они содержат очередной неопределенный коэффициент $Q_{n-1}(E)$, который входит множителем при векторе $\mathbf{V}_0=\hat\partial_E\mathbf{U}_0(\sigma;E)$. Фигурирующий в этом выражении оператор $\hat\partial_E=[\partial_E-(\omega'/\omega)\sigma\partial_\sigma]$ иногда называется усеченной производной. Так, на первых шагах имеют место выражения:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1&=-Q_0\mathbf{V}_0,\\ \mathbf{F}_2&=-Q_1\mathbf{V}_0-Q_0\hat\partial_E\mathbf{U}_1-\\ &-\begin{pmatrix}\rho/2\\ 0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\Psi_1^2\sin\Psi_0\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Решение неоднородной линеаризованной системы выписывается методом вариации с использованием решений однородной системы $\mathbf{V}_1=\partial_\sigma\mathbf{U}_0(\sigma;E)$ и $\mathbf{V}_2=\partial_E\mathbf{U}_0(\sigma;E)\equiv\mathbf{V}_0+(\omega'/\omega)\sigma\mathbf{V}_1$. Отметим, что вектор-функции $\mathbf{V}_0,\mathbf{V}_1(\sigma;E)$ периодичны по σ, а растущий множитель во втором решении обязан зависимости частоты $\omega(E)$ от энергии. Поскольку вронскиан $W(\mathbf{V}_2,\mathbf{V}_1)=1$ оказывается единичным, то общее решение выписывается через интегралы от кососкалярных произведений в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_n&=+C_n\mathbf{V}_2+D_n\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_0\int_0^\sigma[\mathbf{V}_1,\mathbf{F}_n]\,d\sigma+\\ &+\mathbf{V}_1\int_0^\sigma\left([\mathbf{F}_n,\mathbf{V}_0]+\frac{\omega'}{\omega}\int_0^\sigma[\mathbf{V}_1,\mathbf{F}_n]\,d\sigma\right)d\sigma\end{aligned} \tag{3.6}$$

с произвольными константами C_n, D_n.

Лемма 3.2. *Рекуррентная система уравнений* (3.5) *разрешима в классе периодических по σ функций при подходящем выборе коэффициентов $Q_n(E)$.*

Доказательство сводится к исключению из формулы (3.6) секулярных слагаемых, растущих квадратично и линейно по σ. На этом пути получаются выражения для $Q_{n-1}(E)$ и $C_n=C_n(E)$ через средние значения подынтегральных функций. Константа D_n может быть выбрана любой, например, нулем. Хотя при разном выборе $D_n=D_n(E)$ получаются разные ряды, но все они асимптотически совпадают, см. [24].

В частности, вычисления на первых шести шагах приводят к следующим результатам: $Q_0=Q_1=Q_2=Q_3=0$, $Q_4=-(4\mu)^{-1}\langle R_0^2\rangle$, $Q_5=0$. Угловыми скобками здесь обозначен интеграл, дающий среднее значение. Среди поправок нулевой оказывается только первая: $\mathbf{U}_1\equiv0$.

На втором этапе исследуется уравнение деформации энергии (3.4).

Лемма 3.3. *Энергия, определяемая как общее решение уравнения* (3.4), *зависит от произвольной константы $E(\theta)=E(\theta;c)$ и имеет асимптотику:*

$$\begin{aligned}E(\theta;c))&=(c^2/2)\theta^{-1/4}+\\ &+\sum_{n=2}^{\infty}E_n(c)\theta^{-n/4},\quad\theta\to\infty.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Доказательство. Главный ненулевой коэффициент в асимптотике правой части $Q(E,\theta)$ указывает на убывание решения $E(\theta)$ к нулю при $\theta\to\infty$. Далее используется асимптотика по малой энергии решения уравнения маятника

$$\begin{pmatrix}R_0\\ \Psi_0\end{pmatrix}=\sqrt{2E}\begin{pmatrix}\sin(\sigma\omega)\\ -\cos(\sigma\omega)\end{pmatrix}[1+\mathcal{O}(E)],\quad E\to0,$$

из которой вытекает асимптотическая формула для среднего значения $\langle R_0^2\rangle=E+\mathcal{O}(E^2)$, $E\to0$. Тем самым уравнение для энергии в асимптотическом приближении приобретает вид

$$\frac{dE}{d\theta}=-\frac{1}{4}\theta^{-1}[E+\mathcal{O}(E^2)]+\mathcal{O}(\theta^{-3/2}).$$

Из этого уравнения легко усматривается структура главного члена асимптотики

$E(\theta) = \text{const} \cdot \theta^{-1/4} + \mathcal{O}(\theta^{-1/2})$ с произвольной константой интегрирования. Полное асимптотическое разложение (3.7) строится с учетом полных асимптотик для правой части $Q(E,\theta)$ при $\theta \to \infty$ и для функции $R_0(\sigma; E)$ при $E \to 0$. Коэффициенты $E_n(c)$ вычисляются по рекуррентным формулам. Выбор первого (произвольного) коэффициента в виде $c^2/2$ сделан для удобства записи последующих формул.

Следствие 3.1. *Главный член асимптотического решения (3.1), как сложная функция от (σ, θ), имеет асимптотику*

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ \Psi_0 \end{pmatrix}(\sigma; E(\theta)) = c\theta^{-1/8} \times \\ \times \begin{pmatrix} \sin(\sigma\omega) \\ -\cos(\sigma\omega) \end{pmatrix} \left[1 + \mathcal{O}(\theta^{-1/4})\right], \\ \theta \to \infty. \tag{3.8}$$

Из этой формулы становится понятным происхождение степеней, кратных $\theta^{-1/8}$, и обоснованность метода линеаризации для построения асимптотики решений уравнений (3.1). Отметим, что в асимптотике (3.8) в качестве быстрой переменной фигурирует фазовая функция $\sigma\omega = S(\theta)$.

В заключении второго этапа следует проинтегрировать уравнение для фазовой функции (3.4). Для $S(\theta)$, очевидно, получается разложение по степеням, кратным $\theta^{-1/4}$, кроме того, возможно появление логарифма $\ln\theta$.

Сформулируем окончательное утверждение этой части работы, которое вытекает из выполненных построений.

Теорема 3.5. *Если $\lambda > 0$, то уравнения (0.2) имеют двухпараметрическое семейство растущих решений $r, \psi(\theta; c, s_0)$ с асимптотикой*

$$r(\theta) = \rho\theta^{1/2} + \theta^{-1/4}\sum_{n=1}^{\infty}\theta^{-n/8} r_n(S; c), \\ \psi(\theta) = \pi/2 + \sum_{n=1}^{\infty}\theta^{-n/8}\psi_n(S; c), \\ \theta \to \infty; \tag{3.9}$$

фазовая переменная имеет асимптотику

$$S = (4/5)\mu\theta^{5/4} + s_{0,1}(c)\ln\theta + \sum_{n=-4}^{\infty} s_n(c)\theta^{-n/4}, \\ \theta \to \infty.$$

Доказательство. Ряды (3.9) по степеням, кратным $\theta^{-1/8}$, получаются из рядов (3.3) после переразложения коэффициентов с учетом асимптотики для энергии (3.7). Поскольку главный член (3.8) такого типа асимптотики для R, Ψ удовлетворяет уравнениям линейного осциллятора, то обоснование можно получить обычным способом.

Следствие 3.2. *Первые поправки к главным членам асимптотики описываются формулами:* $r_1 = c\mu^{-1}\sin S$, $\psi_1 = -c\cos S$, $s_{-4} = -\mu c^2/8$.

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

В приложении к авторезонансу принципиальным является вопрос о поведении при $\theta \to \infty$ решения (обозначим его $\mathbf{x}_{th}(\theta, \lambda)$), которое стремится к нулю при $\theta \to -\infty$; оно может либо оставаться ограниченным, либо расти. К сожалению, получить на этот вопрос ответ в замкнутой форме не удается[1]. Мы приведем результаты асимптотического анализа, которые свидетельствуют о возможности разных вариантов ответа в зависимости от значения λ.

Рассматриваемое решение зависит от параметра λ. При малых (либо больших) значениях этого параметра задачу можно упростить и получить ответы для двух крайних случаев.

Теорема 4.6. *Для уравнений (0.1) существует значение $\lambda_0 > 0$ такое, что для $\forall \lambda \in [0, \lambda_0)$ решение $\mathbf{x}_{th}(\theta, \lambda)$ ограничено при $\theta \to \infty$.*

Теорема 4.7. *Для уравнений (0.1) существует значение $\Lambda_0 > 0$ такое, что для $\forall \lambda > \Lambda_0$ решение $\mathbf{x}_{th}(\theta, \lambda)$ имеет растущую асимптотику при $\theta \to \infty$.*

Приведенные выше свойства являются грубыми, т. е. они устойчивы относительно возмущений исходных данных и возмущений краевого условия на $-\infty$.

Доказательство первой теоремы сравнительно просто и основано на свойстве ограниченности всех решений предельной задачи (при $\lambda = 0$). Доказательство второй теоремы гораздо сложнее и опирается на метод ВКБ для уравнений с малым параметром при производных.

[1]Поставленный вопрос является упрощением задачи рассеяния о связи констант асимптотики на разных бесконечностях. В настоящее время не представляется возможным получить в аналитической форме решение задачи рассеяния для неинтегрируемых уравнений, каковыми являются (0.1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения главного резонанса (0.1) при $\lambda > 0$ имеют богатые семейства как ограниченных так и растущих решений. Для решения, фиксированного константами c_-, s_- асимптотики при $\theta \to -\infty$, выход на тот или иной тип решения при $\theta \to \infty$ зависит как от констант c_-, s_-, так и от параметра λ. Для решения $\mathbf{x}_{th}(\theta, \lambda)$ с константой $c_- = 0$ для всех достаточно больших $\lambda > \lambda^*$ гарантируется рост при $\theta \to \infty$. Применительно к авторезонансу можно сделать вывод о зависимости этого явления как от начальных условий, так и от параметров накачки. В частности, критическое значение параметра λ^* определяет пороговое значение амплитуды накачки, выше которого только и возможно вхождение в авторезонанс.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 501 с.
2. **Найфэ А. Х.** Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
3. **Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.** Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1977. 368 с.
4. **Козлов В. В., Фурта С. Д.** Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. М.: МГУ, 1996. 244 с.
5. **Брюно А. Д.** Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, 1998. 288 с.
6. **Кузнецов А. Н.** О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // Функц. анализ и его прилож. 1989. Т. 23, вып. 4. С. 63–74.
7. **Федорюк М. В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
8. **Нейштадт А. И.** Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром // ПММ. 1975. Т. 39, вып. 4. С. 621–632.
9. **Нейштадт А. И.** О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях // Дифф. уравнения. 1987. Т. 23, №12. С. 2060–2067.
10. **Haberman R., Ho E. K.** Boundary of the basin of attraction for weakly damped primery resonance // J. Appl. Mech. 1990. V. 62. P. 941–946.
11. **Glebov S. G., Kiselev O. M.** Applicability of the WKB method in the perturbation problem for the equation of Principal resonance // Russ. J. Math. Phys. 2002. V. 9, №1. P. 60–83.
12. **Коломенский А. А., Лебедев А. Н.** Теория циклических ускорителей. М.: Физ.-мат. лит. 1962. 352 с.
13. **Livingston M. S.** High-energy Particle Accelerators. New York: Interscience, 1954.
14. **Голованевский К. С.** Гиромагнитный авторезонанс с переменной частотой // Физика плазмы. 1985. Т. 11, вып. 3. С. 295–299.
15. **Fajans J., Friedland I.** Autoresonant (non stationary) excitation of a pendulum, Plutinos, plasmas and other nonlinear oscillators // Am. J. Phys. 2001. 69, № 10. P. 1096–1102.
16. **Friedland L.** Migration timescale thresholds for resonant capture in the plutino problem // Astrophys. J. 2001. 547, part 2. P. L75–L79.
17. **Калякин Л. А.** Асимптотический анализ модели авторезонанса // Доклады РАН. 2001. Т. 378, № 5. С. 594–597.
18. **Kalyakin L. A.** Asymptotic analysis of an autoresonance model // Russ. J. Math. Phys. 2002. V. 9, No 1. P. 84–95.
19. **http://**socrates.berkeley.edu/~fajans/pub
20. **Кузмак Г. Е.** Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // ПММ. 1951. Т. 23, № 3. С. 519–526.
21. **Доброхотов С. Ю., Маслов В. П.** Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях // Итоги науки и техники. 1980. Т. 15. С. 4–94.
22. **Bourland F. J., Haberman R.** The modulated phase shift for strongly nonlinear, slowly varynng and weasly damped oscillators // SIAM J. Aprl. Math. 1988. 48, No 3. P. 737–748.
23. **Чириков Б. В.** Прохождение нелинейной колебательной системы через резонанс // Доклады АН СССР. Т. 125, № 5. С. 1015–1018.
24. **Калякин Л. А.** Усреднение одночастотных колебаний // Вестник УГАТУ. Уфа: 2001. № 1(3). С. 40–46.

ОБ АВТОРЕ

Калякин Леонид Анатольевич, профессор, зав. отделом дифф. уравнений ИМ с ВЦ РАН. Дипл. математик (Уральский гос. ун-т, 1969). Д-р физ.-мат. наук (защ. в Ин-те мат. и мех. УрО РАН, 1989). Соросовский профессор (2000). Исследования в области асимптотических методов и нелинейных задач математической физики.