Уфа: УГАТУ, 2003 Вестник УГАТУ Т. 4, № 2. С. 79–83

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МАТЕМАТИКА

УДК 517.53

А. М. ГАЙСИН

РАЗЛИЧНЫЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ УСЛОВИЯ ТИПА ЛЕВИНСОНА

При помощи преобразования Лежандра доказаны 4 эквивалентных к условию Левинсона утверждения. *Преобразование Лежандра; условие Левинсона*

1. УСЛОВИЕ ЛЕВИНСОНА

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая нулевую плотность,

$$H(\delta) = \int\limits_0^\infty M(r;Q)e^{-\delta r}\,dr,$$
$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right). \tag{1}$$

Здесь $M(r;Q) = \max\limits_{|z|=r}|Q(z)|$. Ясно, что $M(r;Q) = Q(ir)$. Очевидно, $H(\delta) \uparrow \infty$ при $\delta \downarrow 0$, $H(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \uparrow \infty$. Пусть $d > 0$ такое, что $H(d) = e$. Если

$$\int\limits_0^d \ln\ln H(\delta)\,d\delta < \infty, \tag{2}$$

будем говорить, что последовательность Λ (функция Q) удовлетворяет условию типа Левинсона.

Условие (2) называется условием типа Левинсона. Наша цель — придать условию (2) более наглядную форму. Отметим, что условие типа Левинсона часто возникает при изучении нормальных семейств аналитических функций (см., например, в [1–8]. Так, имеет место следующая теорема Левинсона (версия Домара) [2, 6].

Теорема (Y. Domar). *Пусть $D = \{z = x + iy : a < x < a', -b < y < b\}$, а $L(y)$ — измеримая по Лебегу функция, $L(y) \geq e$ $(-b < y < b)$, и*

$$\int\limits_{-b}^{b} \ln\ln L(y)\,dy < \infty. \tag{3}$$

Тогда имеется убывающая функция $m(\delta)$, зависящая только от $L(y)$ и конечная для $\delta > 0$, такая, что если $f(z)$ аналитична в D и

$$|f(z)| \leq L(\operatorname{Im} z), \tag{4}$$

то

$$|f(z)| \leq m(\mathbf{dist}(z, \partial D)),\ z \in D.$$

Следствие. *Пусть $J = \{f\}$ — семейство аналитических в D функций, удовлетворяющих условию (4). При условии (3) семейство функций J является нормальным.*

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА

Пусть $M(x)$ — любая непрерывная возрастающая на $[0,\infty)$ функция. Тогда функция

$$m(y) = \sup_{x>0}(M(x) - xy),$$

определенная при $y > 0$, называется преобразованием Лежандра функции M. Если $M(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то $m(y) \to \infty$ при $y \to 0$. Функция $m(y)$ как верхняя огибающая убывающих по $y > 0$ функций также убывающая функция. Положим

$$M^*(x) = \inf_{y>0}(m(y) + yx).$$

Ясно, что M^* — наименьшая вогнутая возрастающая мажоранта функции M : $M(x) \leq M^*(x)$. Отметим, что если функция M вогнута, то $\frac{M(x)}{x} \downarrow$ при $x \geq a$. С другой стороны, если $0 < M(x) \uparrow$, $\frac{M(x)}{x} \downarrow$ при $x > 0$, то $M^*(x) < 2M(x)$, где M^* — наименьшая вогнутая мажоранта M [6, VII D, 2, с. 326].

Теорема 1 [6, VII D, 2, с. 333]. *Пусть $M(x)$ — возрастающая вогнутая на $[0,\infty)$ функция,*

$$m(y) = \sup_{x>0}(M(x) - xy)\ (y > 0),$$

$a > 0$ такое, что $m(a) = 1$. Тогда интегралы

$$\int_0^a \ln m(y)\,dy, \quad \int_1^\infty \frac{M(x)}{x^2}\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ УСЛОВИЯ

Пусть $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $Q(z)$. Она аналитична вне начала координат. Поскольку при $|\operatorname{Im} t| \geq \delta > 0$

$$\gamma(t) = \int_0^{\pm\infty} Q(ir)e^{-irt}d(ir),$$

то для любого t, $|t| = \delta$,

$$|\gamma(t)| \leq \int_0^\infty M(r;Q)e^{-\delta r}dr = H(\delta).$$

Но

$$Q(z) = \int_C \gamma(t)e^{tz}dt, \ C = \{t : \ |t| = \delta\}.$$

Отсюда следует, что

$$|Q(z)| \leq \delta H(\delta)e^{\delta|z|} \leq$$
$$\leq \begin{cases} H(\delta)e^{\delta|z|}, & 0 < \delta \leq 1; \\ H(\delta)e^{\delta(|z|+1)}, & 1 \leq \delta < \infty. \end{cases}$$

Следовательно,

$$M(r;Q) \leq H(\delta)e^{\delta(r+1)} \ (0 < \delta < \infty). \qquad (5)$$

Положим $h(\delta) = \ln H(\delta)$. Функция $h(\delta)$ непрерывна, $h(\delta) \uparrow \infty$ при $\delta \downarrow 0$, $h(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \uparrow \infty$. Пусть

$$M(x) = \inf_{\delta > 0}(h(\delta) + \delta x), x > 0.$$

Как нижняя огибающая линейных функций, $M(x)$ вогнута, $M(x) \uparrow \infty$ при $x \uparrow \infty$. Пусть m — преобразование Лежандра функции M, т. е.

$$m(\delta) = \sup_{x>0}(M(x) - x\delta), \ \delta > 0.$$

Функция m — наибольшая выпуклая миноранта h, т. е. $m(\delta) \leq h(\delta)$.

Лемма *Пусть $\varphi(x)$ — наименьшая вогнутая мажоранта функции $\ln M(x;Q)$. Тогда условие*

$$\int_0^d \ln h(\delta)\,d\delta < \infty, \ h(\delta) =$$
$$= \ln H(\delta) \ (H(d) = e) \qquad (6)$$

эквивалентно условию

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2}dx < \infty. \qquad (7)$$

Доказательство. Имеем

$$H(\delta) = \int_0^\infty M(x;Q)e^{-\delta x}\,dx \leq$$
$$\leq \int_0^\infty e^{\varphi(x)-\delta x}\,dx \ (0 < \delta < \infty).$$

Следовательно, из (7) следует (6) [9].

Пусть выполняется условие (6). Поскольку $m(\delta) \leq h(\delta)$, то

$$\int_0^a \ln m(\delta)\,d\delta < \infty \ (m(a) = 1).$$

Следовательно, из теоремы 1 следует, что

$$\int_1^\infty \frac{M(x)}{x^2}\,dx < \infty. \qquad (8)$$

Но из (5) имеем: $\ln M(x;Q) \leq M(x+1)$. Поскольку $M(x+1)$ — вогнутая мажоранта для $\ln M(x;Q)$, то $\ln M(x;Q) \leq \varphi(x) \leq M(x+1)$. Следовательно, из (8) получаем условие (7).

Замечание. *Из леммы вытекает отрицательный ответ на вопрос, поставленный в [10] (проблема 4).*

Следствие. *Если выполняется условие типа Левинсона (6), то*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n} < \infty. \qquad (9)$$

Действительно, из неравенства Иенсена имеем

$$n(x) \le \ln M(ex;Q) \le \varphi(ex). \qquad (10)$$

Так как

$$\sum_{\lambda_n \le r} \frac{1}{\lambda_n} = \int_0^r \frac{dn(x)}{x} = \frac{n(r)}{r} + \int_{\lambda_1}^r \frac{n(x)}{x^2}dx,$$

то, применяя лемму, получаем условие (9).

Теорема 2. *Пусть последовательность* Λ *удовлетворяет условию* (9). *Тогда следующие условия равносильны:*

1) $\int\limits_0^d \ln\ln H(\delta)\, d\delta < \infty,\ H(d) = e.$

2) *Если* $\varphi(x)$ — *наименьшая вогнутая мажоранта функции* $\ln M(x;Q)$, *то*

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx < \infty.$$

3) *Существует* $\omega \in \Omega$, *такая, что* $n(t) \le \omega(t)$, *где* $n(t)$ — *считающая функция последовательности* Λ, *а*

$$\Omega = \{\omega:\ \omega \in W,\ \frac{\omega(x)}{x} \downarrow 0 \text{ при } x \uparrow \infty\}.$$

4) *Существует* $w \in W$, *такая, что для любых* $(a,\ A,\ B\ (0 < a \le A < B))$

$$\int_A^B \frac{n(t)}{t^2}\, dt \le \frac{w(a)}{a}\ln\frac{B}{A} + \frac{w(a)}{a}.$$

5) *Существует* $w \in W$, *такая, что для любого* $a > a_0,\ t \ge a$

$$n(t) \le \frac{w(a)}{a}t.$$

4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ УСЛОВИЙ 1–3

Согласно лемме условия 1–2 равносильны. Далее, из условия 1, применяя лемму и оценки (10), получаем условие 3. Пусть, обратно, для некоторой функции $\omega \in \Omega$ имеет место оценка: $n(t) \le \omega(t)$ $(t > 0)$. Тогда имеем

$$\ln M(x;Q) = 2x^2 \int_{\lambda_1}^\infty \frac{n(t)}{t(t^2+x^2)}\, dt \le$$

$$\le 2x^2 \int_{\lambda_1}^\infty \frac{\omega(t)}{t(t^2+x^2)}\, dt = g(x).$$

Поскольку $\omega \in \Omega$, то, очевидно, $g \in W$. Убедимся, что $g \in \Omega$, т. е. $\frac{g(x)}{x} \downarrow 0$ при $x \uparrow \infty$. Действительно, имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{g(x)}{x}\right)' = \int_{\lambda_1}^\infty \frac{\omega(t)}{t}\frac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2}\, dt.$$

Пользуясь монотонностью функции $\frac{\omega(x)}{x}$, можно показать, что $\left(\frac{g(x)}{x}\right)' < 0$ при $x \ge a$. Значит, $g \in \Omega$. Так как $\varphi(x) \le g(x)$ $(x \ge b)$, то 2), следовательно и 1), имеют место.

5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ УСЛОВИЙ 3–4

Пусть $0 < a \le A < B$. Из 3) имеем

$$\int_A^B \frac{n(t)}{t^2}\, dt \le \int_A^B \frac{\omega(t)}{t^2}\, dt \le \frac{\omega(a)}{a}\ln\frac{B}{A},$$

если $0 < a_0 \le a$. Если положить

$$w(t) = \begin{cases} \omega(a_0), & \text{если } 0 \le t \le a_0; \\ \omega(t), & \text{если } a_0 < t, \end{cases}$$

то для любого $a > 0$

$$\int_A^B \frac{n(t)}{t^2}\, dt \le \frac{w(a)}{a}\ln\frac{B}{A} + \frac{w(a)}{a}$$

и условие 4 выполнено. Убедимся, что из 4) следует 3).

Пусть $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \le t} 1$, а $\varphi(t)$ — непрерывная возрастающая мажоранта $n(t)$, определенная следующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 0; \\ n(t), & \text{если } t = \lambda_n; \\ \text{линейна}, & \text{если } t \ne 0,\ t \ne \lambda_n. \end{cases}$$

Ясно, что $n(t) \le \varphi(t)$, $|n(t) - \varphi(t)| \le 1$. Поскольку последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет нулевую плотность, то $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$, $\varphi(t) \uparrow \infty$, $t \uparrow \infty$. Функция $\frac{\varphi(t)}{t}$ непрерывна при $t > 0$. Положим $D(r) = \max\limits_{t \ge r} \frac{\varphi(t)}{t}$. Ясно, что $D(r)$ — непрерывная и невозрастающая при $r > 0$ функция, $D(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Ясно, что $D(r)$ — наименьшая невозрастающая мажоранта функции $\frac{\varphi(r)}{r}$. Пусть $\{I_n\}$ — последовательность всех отрезков $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ из $[\lambda_1, \infty)$, на которых $D(r)$ постоянна. Пусть $D(r) = d_n$, если $t_n \le t \le t_{n+1}$. Если $D(r) \downarrow$ при $r \uparrow \infty$, то последовательность $\{d_n\}$ ограничена. В противном случае $t_n \uparrow \infty$. Имеем

$$D(r) = \begin{cases} \frac{\varphi(r)}{r}, & \text{если} \quad r \notin I,\ I = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n; \\ \frac{\varphi(t_n)}{t_n}, & \text{если} \quad r \in I_n. \end{cases}$$

Далее, из определения $D(r)$ следует, что $\varphi(r) \le rD(r) = g(r)$. Функция $g(r)$ непрерывна и возрастающая при $r > 0$, а $\frac{g(r)}{r}$ не возрастает. Поэтому существует непрерывная функция $\epsilon(r)$, $\epsilon(r) \downarrow 0$ при $r \uparrow \infty$, $\frac{g(r)}{r}(1 + \epsilon(r)) \downarrow$, $g(r)(1 + \epsilon(r)) \uparrow$ при $r \uparrow$. Положим $\omega(r) = g(r)(1 + \epsilon(r))$. Поскольку $n(r) \le \varphi(r) < \omega(r)$, то для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{g(r)}{r^2}\, dr < \infty.$$

Имеем

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{g(r)}{r^2}\, dr = \int\limits_I \frac{g(r)}{r^2} + \int\limits_{[\lambda_1,\infty)\setminus I} \frac{g(r)}{r^2}\, dr =$$

$$= \int\limits_I \frac{D(r)}{r}\, dr + \int\limits_{[\lambda_1,\infty)\setminus I} \frac{\varphi(r)}{r^2}\, dr \le$$

$$\le \int\limits_I \frac{D(r)}{r}\, dr + \int\limits_{\lambda_1}^{\infty} \frac{n(r)+1}{r^2}\, dr.$$

В силу условия (9) последний интеграл сходится. Убедимся, что

$$\int\limits_I \frac{D(r)}{r}\, dr = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{I_n} \frac{D(r)}{r}\, dr < \infty.$$

Пусть $r \in I_n = [t_n, t_{n+1}]$. Тогда $D(r) = \frac{\varphi(t_{n+1})}{t_{n+1}} = \frac{\varphi(t_n)}{t_n}$. Для $r \ge \lambda_1$ имеем $\varphi(r) \le n(r) + 1 \le 2n(r)$. Следовательно, пользуясь условием 4), для любого $a \in I_n$ получаем, что для некоторой функции $w \in W$

$$\frac{\varphi(t_{n+1})}{t_{n+1}}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \le \int\limits_{t_{n+1}}^{et_{n+1}} \frac{\varphi(r)}{r^2}\, dr \le$$

$$\le 2 \int\limits_{t_{n+1}}^{et_{n+1}} \frac{n(r)}{r^2}\, dr \le 4\frac{w(a)}{a}.$$

Так что для любого $a \in I_n$

$$D(a) = \frac{\varphi(t_{n+1})}{t_{n+1}} \le 4\frac{e}{e-1}\frac{w(a)}{a}.$$

Следовательно, $g(r) = rD(r) \le \frac{4e}{e-1}w(r)$, $r \in I_n$ $(n \ge 1)$. Значит,

$$\int\limits_I \frac{D(r)}{r}\, dr \le \frac{4e}{e-1}\int\limits_I \frac{w(r)}{r^2}\, dr < \infty.$$

Таким образом, $n(r) \le \omega(r) = g(r)(1 + \epsilon(r))$, $\omega \in \Omega$.

6. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ УСЛОВИЙ 3–5

Из 3) следует, что $n(t) \le \frac{\omega(t)}{t}t \le \frac{\omega(a)}{a}t$, если $t \ge a \ge a_0$. Пусть имеет место 5), $a_0 \le a \le A < B$. Тогда

$$\int\limits_A^B \frac{n(t)}{t^2}\, dt \le \frac{w(a)}{a}\int\limits_A^B \frac{dt}{t} = \frac{w(a)}{a}\ln\frac{B}{A}.$$

Значит, условие 4), а следовательно, и условие 3) имеют место.

Теорема 2 полностью доказана.

ВЫВОДЫ

В теореме 2 получены различные эквивалентные интерпретации условия типа Левинсона (2), полезные в теории функций. Из них, в частности, вытекает ответ на проблему, поставленную в работе [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Levinson N.** Gap and Density Theorems. New York: Amer. Math. Soc., 1940.
2. **Domar Y.** On the existence of a largest subharmonic minorant of a given function // Arkiv fuer Mat. 1958. № 3. P. 429–440.
3. **Дынькин Е. М.** О росте аналитической функции вблизи множества ее особых точек // Записки науч. сем. ЛОМИ АН СССР. 1972. Т. 30. С. 158–160.
4. **Дынькин Е. М.** Функции с заданной оценкой $\partial f/\partial \overline{z}$ и теорема Левинсона // Матем. сб. 1972. Т. 89 (131), № 2. С. 182–190.
5. **Вольберг А. Л., Ёрикке Б.** Суммируемость логарифма почти аналитических функций и обобщение теоремы Левинсона–Картрайт // Матем. сб. 1986. Т. 30, № 3. С. 335–348.
6. **Koosis P.** The Logarithmic Integral I. Cambridge: Univ. Press, 1988.
7. **Koosis P.** The Logarithmic Integral II. Cambridge: Univ. Press, 1992.
8. **Brennan J. E.** Weighted polynomial approximation and quasianalyticity for general sets // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6, № 4. P. 69–89.
9. **Korevaar J., Dixon M.** Interpolation, strongly nonspanning powers and Macintyre exponents // Indag. Math. (N. S.) 1978. T. 40, No 2. P. 243–258.
10. **Sheremeta M. M.** Five open problems in the theory of entire functions // Математичні студії 1996. Т. 6. P. 157–159.

ОБ АВТОРЕ

Гайсин Ахтяр Магазович, профессор, вед. науч. сотр. Ин-та математики УНЦ РАН, проф. каф. спецглав математики УГАТУ. Дипл. математик (БГУ, 1978). Д-р физ.-мат. наук по матанализу (Екатеринбург, 1996). Исследования в области теории функций комплексной переменной.