Уфа: УГАТУ, 2003 Вестник УГАТУ Т. 4, № 2. С. 84–88

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

Н. Ф. ЛУКМАНОВ, Н. К. БАКИРОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СУПРЕМУМА ПРИРАЩЕНИЯ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА НА ОТРЕЗКЕ

Получены вероятности уклонений для винеровского моста. *Винеровский мост*

ВВЕДЕНИЕ

Задача разорения страховой компании в динамической постановке сводится к нахождению распределения экстремумов процесса капитала страховой компании. В асимптотической постановке, когда количество страховых договоров, заключенных в единицу времени, стремится к бесконечности, мы получаем соответствующую задачу для вероятности уклонений случайного процесса (чаще всего гауссовского, пуассоновского или сложнопуассоновского). Таким образом, такая теоретическая, на первый взгляд, задача, как нахождение распределения супремума приращений винеровского процесса и винеровского моста, чему и посвящена данная работа, приобретает практическое значение для задач, возникающих в страховом деле. В данной статье приводится доказательство результатов, анонсированных в [1].

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМУМА ПРИРАЩЕНИЙ ВИНЕРОВСКОГО МОСТА И ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА НА ОТРЕЗКЕ

Пусть на интервале [0,1] независимо и равномерно распределены n точек. Пусть $r \in [0{,}5,\ 1]$, $t \in [0, 1-r]$, обозначим $\widetilde{N}_t$ — множество точек, лежащих на интервале $(t, t+r)$, а N_t — их количество. В наших предположениях, очевидно, $\mathbf{E}N_t = nr$. Определим функцию $J_n(x)$ равенством

$$J_n(x) = \mathbf{P}\left\{ \sup_{t\in(0,1-r)} N_t \geqslant nr + x\sqrt{n} \right\}.$$

Идея нахождения распределения максимума приращений винеровского моста состоит в использовании функциональной ЦПТ и вытекающей из нее сходимости:

$$J_n(x) = \mathbf{P}\left\{ \sup_{t\in(0,1-r)} \frac{N_t - nr}{\sqrt{n}} \geqslant x \right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\to \mathbf{P}\left\{ \sup_{t\in(0,1-r)} \xi(t) \geqslant x \right\} \stackrel{def}{=} J(x),$$

где $\xi(t)$– гауссовский процесс с $\mathbf{E}\xi(s)\xi(t) = (r - |t-s|)_+ - r^2$, $\mathbf{E}\xi(t) = 0$, здесь $(x)_+ \stackrel{def}{=} \max(0, x)$. Ясно, что случайный процесс $\xi(t)$ распределен как случайный процесс приращений винеровского моста: $\xi(t) \stackrel{D}{=} W_0(t+r) - W_0(t), t \in [0, 1-r]$, где $W_0(t)$ — стандартный винеровский мост.

Теорема 1. *Обозначим* $\delta = 2r - 1$. *Для всех* $r \in [0{,}5; 1]$

$$J(x) = \lim_{n\to\infty} J_n = \mathbf{P}\{\{\xi_1 \geqslant x\} \bigcup \{\xi_2 \geqslant x\}\} +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathbf{E}\left(\frac{2x - \xi}{\sqrt{1-\delta}}\right)_+ \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{2x-\xi}{\sqrt{1-\delta}}\right)^2 \right\},$$

где ξ — *гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией* $\delta(1-\delta)$, *а гауссовский случайный вектор* (ξ_1, ξ_2) *имеет нулевое среднее и матрицу ковариаций*

$$\begin{pmatrix} r(1-r) & -(1-r)^2 \\ -(1-r)^2 & r(1-r) \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Доказательство. Обозначим $\widetilde{K}_1$ — множество точек, лежащих в интервале $(0, 1-r)$, а K_1 — их количество. Аналогичным образом определим $\widetilde{K}_2$ и K_2 для интервала $(1-r, r)$, $\widetilde{K}_3$ и K_3 — для интервала $(r, 1)$. Значение параметра t меняется от 0 до $1-r$. При этом для $t = 0$ число N_t равно $K_1 + K_2$. При увеличении t из множества $\widetilde{N}_t$ будут исключаться точки, принадлежащие множеству $\widetilde{K}_1$, и включаться точки из $\widetilde{K}_3$. При $t = 1 - r$, когда промежуток $(t, t + r)$ сдвинется в крайнее правое положение, $N_t = K_2 + K_3$. Можно также заметить, что при фиксированных K_j множества $\widetilde{K}_j$ суть независимые повторные выборки из равномерных распределений на соответствующих отрезках. В дальнейшем мы будем обозначать $M = nr + x\sqrt{n}$ и предполагать без ограничения общности, что M — целое число. Ясно, что

$$J_n(x) = \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in(0,1-r)} N_t \geq M\right\} =$$
$$= \mathbf{P}\left\{\{K_1 + K_2 \geqslant M\} \bigcup \{K_2 + K_3 \geqslant M\}\right\} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{M-1} \mathbf{P}\{K_2 = k\} \times$$
$$\times \sum{}' \mathbf{P}\{K_1 = l | K_2 = k\} V(k,l) =$$
$$= J_n'' + J_n', \quad (2)$$

где $V(k,l) = \mathbf{P}\left\{\sup\limits_{t\in(0,1-r)} N_t \geqslant M | K_2 = k, K_1 = l\right\}$ и в Σ' суммирование ведется по всем l: $0 \leqslant k + l < M$, $0 \leqslant n - l < M$.

Рассмотрим теперь всевозможные траектории случайного процесса $N_t, t \in [0, 1-r]$ для $N_0 = k + l$, $N_{1-r} = n - l$. Это ступенчатые траектории, которые $n-k$ раз в случайных точках смещаются на 1, причем l раз вниз и $n - k - l$ раз вверх. Величина $V(k,l)$ является вероятностью пересечения траекторией уровня M. Ввиду равновероятности траекторий вероятность $V(k,l)$ можно представить как отношение числа траекторий, начинающихся в $k + l$, пересекающих уровень M или достигающих его, с финальным уровнем $n - l$, к числу всех траекторий из $k + l$ в $n - l$. Последнее количество равно C_{n-k}^l.

По принципу зеркального отображения число траекторий, исходящих из $k + l$, пересекающих уровень M и вернувшихся на уровень $n - l$, равно числу траекторий, начинающихся в l и к моменту $1 - r$ имеющих уровень $2M - (n - l)$. Количество этих траекторий равно C_{n-k}^{M-k}. Следовательно,

$$V(k,l) = \frac{C_{n-k}^{M-k}}{C_{n-k}^l}.$$

В силу равномерности распределения точек на интервале $[0,1]$

$$\mathbf{P}\{K_2 = k\} = C_n^k \delta^k (1-\delta)^{n-k},$$

$$\mathbf{P}\{K_1 = l | K_2 = k\} =$$
$$= C_{n-k}^l \left(\frac{1}{2}\right)^l \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-l} = C_{n-k}^l 2^{k-n}.$$

Учитывая ограничения на l и на k: $n - M < l < M - k$, — а также последние два соотношения, получаем

$$J_n' = \sum_{k=0}^{2M-n-2} C_n^k \delta^k (1-\delta)^{n-k} \times$$
$$\times \left(\sum_{l=n-M+1}^{M-k-1} C_{n-k}^l 2^{k-n} \frac{C_{n-k}^{M-k}}{C_{n-k}^l}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{2M-n-2} C_n^k \delta^k (1-\delta)^{n-k} 2^{k-n} \times$$
$$\times C_{n-k}^{M-k} (2M - n - 1 - k) =$$

$$= \sum_{k=2M-n-C\sqrt{n}\ln n}^{2M-n-2} C_n^k \delta^k (1-\delta)^{n-k} 2^{k-n} \times$$
$$\times C_{n-k}^{M-k} (2M - n - 1 - k) + \bar{\bar{o}}(1),$$

(см.[2]) при больших n, здесь $C > 0$ — произвольная константа. Используя формулу Стирлинга, получаем равномерно по k из последней суммы при $n \to \infty$:

$$2^{k-n} C_{n-k}^{n-M} \approx \frac{2 + \bar{\bar{o}}(1)}{\sqrt{\pi n(1-\delta)}} \exp\left\{-\frac{(2x - \xi_{n,k})^2}{2(1-\delta)}\right\},$$

где $\xi_{n,k} = (k - n\delta)/\sqrt{n}$. Пусть случайная величина η имеет биномиальное распределение с параметрами (n, δ) и $\xi_n = (\eta - n\delta)/\sqrt{n}$. Тогда

$$J_n' = \sum_{k=2M-n-C\sqrt{n}\ln n}^{2M-n-2} C_n^k \delta^k (1-\delta)^{n-k} \times$$
$$\times \frac{2(2x - \xi_{n,k})}{\sqrt{\pi(1-\delta)}} \exp\left\{-\frac{(2x - \xi_{n,k})^2}{2(1-\delta)}\right\} + \bar{\bar{o}}(1) =$$
$$= \mathbf{E}\, \frac{2(2x - \xi_n)}{\sqrt{\pi(1-\delta)}} \exp\left\{-\frac{(2x - \xi_n)^2}{2(1-\delta)}\right\} \chi_1 + \bar{\bar{o}}(1),$$

где $\chi_1 = \chi\{\eta \in [2M - n - C\sqrt{n}\ln n, 2M - n - 1]\}$ — индикатор соответствующего события. В силу ЦПТ при $n \longrightarrow \infty$

$$J_n' \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathbf{E} \left(\frac{2x - \xi}{\sqrt{1-\delta}}\right)_+ \exp\left\{-\frac{(2x - \xi)^2}{2(1-\delta)}\right\}, \quad (3)$$

где ξ — гауссовская случайная величина с $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{D}\xi = \delta(1-\delta)$. Далее, в силу ЦПТ, при $n \longrightarrow \infty$

$$J''_n \longrightarrow \mathbf{P}\{\{K_1+K_2 \geqslant M\} \bigcup \{K_2+K_3 \geqslant M\}\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_1 \geqslant M \bigcup \xi_2 \geqslant M\},$$

где случайный вектор (ξ_1, ξ_2) распределен нормально с нулевым средним и ковариационной матрицей (1), что вкупе с (2),(3) доказывает теорему.

Теорема доказана.

Следствие 1. Ясно, что случайный процесс $\xi(t) + r\xi_0$, где ξ_0 — нормальная (0,1) случайная величина, не зависящая от случайного процесса $\xi(t)$, распределен так же как процесс приращений винеровского процесса: $\xi(t) + r\xi_0 \overset{D}{=} W(t+r) - W(t), t \in [0, 1 - r]$, где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс. Тем самым $\forall r \in [0{,}5; 1]$

$$p(x,r) \overset{def}{=}$$
$$= \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in(0,1-r)} \left[W(t-r) - W(t)\right] \geqslant x\right\} =$$
$$= \int\limits_{\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} J(x-ry)\, dy.$$

Следствие 2. В частном случае при $r = 1/2$ имеем $\delta = 0, \xi = 0, \xi_1 = -\xi_2$, поэтому при $x > 0$

$$J(x) = 2xe^{-2x^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} +$$
$$+ \mathbf{P}\left\{\{\xi_1 \geqslant x\} \bigcup \{\xi_2 \geqslant x\}\right\} =$$
$$= \sqrt{\frac{8}{\pi}}\left(2xe^{-2x^2} + \int\limits_x^{\infty} e^{-2y^2}\, dy\right),$$

а при $x < 0$

$$J(x) = \mathbf{P}\left\{|\xi_1| \leq |x|\right\} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int\limits_0^{|x|} e^{-2y^2}\, dy,$$

тем самым при $r = 1/2$ плотность распределения случайной величины $\sup\limits_{t\in(0,1/2)} \xi(t)$ равна

$$f(y) = \begin{cases} \frac{16}{\sqrt{2\pi}} y^2 e^{-2y^2}, & y > 0, \\ \sqrt{\frac{8}{\pi}} e^{-2y^2}, & y < 0, \end{cases}$$

т. е. плотость имеет разрыв $\sqrt{8/\pi}$ в нуле.

Кроме того, при $r = 1/2$ для натурального T и $\eta(t) = W(t+1/2) - W(t)$ мы можем оценить

$$\mathbf{P}\{A\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \eta(t) \geqslant x\right\} =$$
$$= \mathbf{P}\{A+B\} \leqslant \mathbf{P}\{A'+B'\}, \quad (4)$$

где

$$A = \left\{\sup_{k=1,2,\ldots,T} \sup_{t\in\Delta_k} \eta(t) \geqslant x\right\},$$
$$\Delta_k = \left[k-1, k-\frac{1}{2}\right],$$

$$B = \left\{\sup_{k=1,2,\ldots,T} \sup_{t\in\Delta'_k} \eta(t) \geqslant x\right\},$$
$$\Delta'_k = \left[k-\frac{1}{2}, k\right],$$

а случайные события A', B' определяются так же, как и A, B с заменой случайного процесса $\eta(t)$ на случайный процесс $\eta'(t)$, который на каждом из интервалов Δ'_k, Δ_k распределен так же, как и случайный процесс $\eta(t)$, а его распределения на различных интервалах Δ'_k,Δ_k не зависят друг от друга.

Ясно, что ввиду независимости приращений случайного процесса $\eta(t)$ на различных промежутках Δ_k, а также на различных промежутках Δ'_k

$$\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\left\{\sup_{k=1,2,\ldots,T} \sup_{t\in\Delta_k} \eta(t) \geqslant x\right\} =$$
$$= 1 - \mathbf{P}^T\left\{\sup_{t\in\Delta_1} \eta(t) \leqslant x\right\} =$$
$$= 1 - (1 - p(x, 1/2))^T,$$

$$\mathbf{P}\{A'+B'\} = 1 - \mathbf{P}^{2T}\left\{\sup_{t\in\Delta_1} \eta(t) \leqslant x\right\} =$$
$$= 1 - (1 - p(x, 1/2))^{2T}.$$

Отметим, наконец, что в правом неравенстве в (4) применено хорошо известное неравенство Д. *Слепяна*.

2. СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМУМА И МИНИМУМА ПРИРАЩЕНИЙ ВИНЕРОВСКОГО МОСТА

В силу результатов первого пункта для определения совместного распределения максимума и минимума приращений винеровского моста нам достаточно определить следующую величину:

$$G(x,y) = = \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in(0,1-r)} \xi(t) \geqslant x \bigcup \inf_{t\in(0,1-r)} \xi(t) \leqslant y\right\}, \quad y \leqslant x.$$

Обозначим

$$K(u,z,a,b,t) = e^{\frac{(z-u)^2}{2t}} \times \times \sum_{q=-\infty}^{\infty}\left(e^{-\frac{(z-u+2q(b-a))^2}{2t}} - -e^{-\frac{(z+u-2a+2q(b-a))^2}{2t}}\right).$$

Теорема 2. *Для всех* $r \in [0{,}5; 1]$, $y \leqslant x$

$$G(x,y) = \mathbf{P}\{\xi_1 \notin [y,x] \bigcup \xi_2 \notin [y,x]\} + + \mathbf{E}\,(1 - K(\xi_1,\xi_2,y,x,1-\delta)) \times \times \chi(\xi_1 \in [y,x], \xi_2 \in [y,x]),$$

где случайные величины ξ_1, ξ_2 *определены выше в теореме* 1, $\chi(A)$ — *индикатор множества* A.

Доказательство. Рассуждая так же, как и при выводе формулы (2), мы можем получить следующее представление:

$$G(x,y) = \lim_{n\to\infty} G_n,$$

где

$$G_n = \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in(0,1-r)} N_t \geqslant M_1, \bigcup \inf_{t\in(0,1-r)} N_t \leqslant M_2\right\},$$

здесь $M_1 = nr + x\sqrt{n}$, $M_2 = nr + y\sqrt{n}$, и мы считаем эти числа, не теряя общности рассуждений, целыми, кроме того,

$$G_n = \mathbf{P}\Big\{\{K_1 + K_2 \geqslant M_1\} \bigcup \bigcup \{K_2 + K_3 \geqslant M_1\} \bigcup \{K_1 + K_2 \leqslant M_2\} \bigcup \bigcup \{K_2 + K_3 \leqslant M_2\}\Big\} + +\Sigma''\mathbf{P}\{K_2 = k\}\,\mathbf{P}\{K_1 = l | K_2 = k\}\, V_1(k,l), \quad (5)$$

где

$$V_1(k,l) = \mathbf{P}\left\{\sup_{t\in(0,1-r)} N(t) \geqslant \geqslant x \bigcup \inf_{t\in(0,1-r)} N(t) \leq y \Big| \ K_2 = k, K_1 = l\right\}$$

— вероятность того, что траектория случайного блуждания, стартующего с уровня $k+l$, пересечет уровень M_1 или M_2 при условии, что она через $n-k$ переходов окажется на уровне $n-l$, при этом в Σ'' суммирование ведется по всем $k,l : M_2 < k+l < M_1, M_2 < n-l < M_1$ ($\Sigma'' = 0$, если таких индексов не найдется).

Далее, ясно, что имеет место слабая сходимость

$$\left(\frac{K_1 + K_2 - nr}{\sqrt{n}}, \frac{n - K_1 - nr}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{D} (\xi_1, \xi_2).$$

В силу функциональной ЦПТ при $n \to \infty$ рассматриваемое случайное блуждание в слабом пределе переходит в броуновское движение. Тем самым

$$V_1(K_1,K_2) \xrightarrow[n\to\infty]{D} 1 - K(\xi_1,\xi_2,y,x,1-\delta),$$

здесь мы использовали тот факт, что в соответсвии с формулами 1.15.8; 1.0.6 из [3]

$$K(u,z,y,x,t) = = \mathbf{P}_{u,z}\{\sup_{s\in(0,t)} W(s) \leqslant x, \inf_{s\in(0,t)} W(s) \geqslant y\},$$

где меры $\mathbf{P}_{u,z}$ образуют марковское семейство распределений, соответствующих условным распределениям случайного процесса $u + W(s)$ при условии, что $u + W(t) = z$, здесь $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, $W(0) = 0$.

Таким образом, при $n \to \infty$

$$\Sigma'' \longrightarrow \mathbf{E}\,(1 - K(\xi_1,\xi_2,y,x,1-\delta)) \times \times \chi(\xi_1 \in [y,x], \xi_2 \in [y,x]).$$

Сходимость первого слагаемого в (5) очевидна.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лукманов Н. Ф., Бакиров Н. К.** Распределение супремума приращения винеровского процесса на отрезке // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2001. Т. 8, вып. 2. С. 789.
2. **Ширяев А. Н.** Вероятность. М.: Наука, 1980. 576 с.
3. **Бородин А. Н., Салминен П. С.** Справочник по броуновскому движению: факты и формулы. СПб., 2000.

ОБ АВТОРАХ

Лукманов Наиль Флерович, ст. преп. кафедры математики УГАТУ. Дипл. математик-инж. (УГАТУ, 1998). Исследования в области случайных процессов, страховой и финансовой математики.

Бакиров Наиль Кутлужанович, вед. науч. сотр. Ин-та математики с ВЦ УНЦ РАН. Дипл. математик (МГУ, 1975). Д-р физ.-мат. наук (СПб., 1995). Область научных интересов: случайные процессы.