Уфа: УГАТУ, 2003 Вестник УГАТУ Т. 4, № 2. С. 152–191

НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.928

А. Н. БЕЛОГРУДОВ

ОБ АСИМПТОТИКАХ РЕШЕНИЯ 4-ГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Найдены данные монодромии для трех асимптотик решений четвертого уравнения Пенлеве на вещественной оси. *Уравнения Пенлеве; асимптотический анализ; нелинейные дифференциальные уравнения*

В настоящей работе будет рассматриваться четвертое уравнение Пенлеве вида

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{2u} + \frac{3}{2}u^3 + 4xu^2 + \left(\beta + 2x^2\right)u - \frac{\beta^2}{2u}. \quad (1)$$

Известно, что уравнение (1) имеет решения с различным асимптотическим поведением при $|x| \to \infty$. Случай общего положения $u(x) \sim -\frac{2}{3}x$ полностью исследован ранее и потому здесь не рассматривается. Другие три семейства $u(x) \sim -2x$, $u(x) \sim \frac{\beta}{2x}$ и $u(x) \sim -\frac{\beta}{2x}$ (последние включают также известный случай $\beta = 0$, главный член асимптотики которого при $x \to \pm\infty$ содержит экспоненциально малый множитель) часто встречаются в приложениях и требуют изучения. Цель данной работы — описать данные монодромии, соответствующие трем семействам асимптотик $u(x)$ при $x \to \pm\infty$.

Известно [3], что с уравнением (1) ассоциируется система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2×2:

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = A(\lambda)\Psi,$$
$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda^3 + (x+u)\lambda & i\left[\sqrt{u}\lambda^2 + \frac{2xu+u^2+\beta+u_x}{2\sqrt{u}}\right] \\ i\left[\sqrt{u}\lambda^2 + \frac{2xu+u^2+\beta-u_x}{2\sqrt{u}}\right] & -\frac{1}{2}\lambda^3 - (x+u)\lambda \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $u = u(x)$ — решение (1). Отметим симметрию системы (2):

$$\sigma_3 A(-\lambda)\sigma_3 = -A(\lambda) \Rightarrow \Psi(\lambda) \mapsto \sigma_3\left(\Psi(-\lambda)\right)\sigma_3, \quad (3)$$

здесь и далее σ_k — матрицы Паули.

Как можно видеть из структуры матрицы $A(\lambda)$, система обыкновенных дифференциальных уравнений (2) имеет нерегулярную особенность в точке $\lambda = \infty$, в окрестности которой можно выписать формальное решение системы:

$$\Psi_f^\infty(\lambda) = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty}\psi_k^\infty\lambda^{-k}\right) \times$$
$$\times \exp\left\{\sigma_3\left(\frac{\lambda^4}{8} + \frac{x\lambda^2}{2} - \beta\ln\lambda\right)\right\}, \ |\lambda| \to \infty. \quad (4)$$

Из теории систем дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами известно, что в окрестности $\lambda = \infty$ выделяются канонические области [1], среди которых можно выделить девять основных:

$$\Omega_k = \left\{\lambda \,\middle|\, -\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} < \arg\lambda < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}\right\}, \quad (5)$$
$$k = \overline{1,9}.$$

В каждом из секторов найдется голоморфное невырожденное решение $\Psi_k(\lambda)$ системы (2), такое, что

$$\Psi_k(\lambda) \sim \Psi_f^\infty(\lambda), \quad |\lambda| \to \infty, \ \lambda \in \Omega_k.$$

Определим матрицы Стокса S_k, связывающие решения Ψ_k и Ψ_{k+1}:

$$S_k = \left[\Psi_k(\lambda)\right]^{-1}\Psi_{k+1}(\lambda), \quad \lambda \in \Omega_k \cap \Omega_{k-1},$$

и опишем полный набор данных монодромии [4] для системы (2). В нашем случае это формальная экспонента монодромии $e^{\beta\sigma_3}$ и матрицы Стокса S_k, $k = \overline{1,8}$, для которых в силу симметрии (3) имеем

$$s_{k+4} = -s_k\,e^{(-1)^{k+1}2i\pi\beta},$$

а также основное тождество монодромии для задачи (1)–(2) [5]:

$$((1+s_1s_2)(1+s_3s_4) + s_1s_4)e^{i\pi\beta} -$$
$$-(1+s_2s_3)e^{-i\pi\beta} = 0.$$

Для вычисления данных монодромии воспользуемся классическим подходом [4] — используем

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты №№ 02-01-00144 и 02-01-06229

обход точки поворота $\lambda = 0$ системы (2). Рассмотрим соотношение для данных монодромии

$$\begin{aligned} S_1S_2S_3S_4 &= [\Psi_1]^{-1}\,\Psi_5 = \\ &= [\Psi^1_{\text{ВКБ}}C_1]^{-1}\Psi^5_{\text{ВКБ}}C_5 = \\ &= [C_1]^{-1}[\Psi^1_{\text{ВКБ}}]^{-1}\Psi^5_{\text{ВКБ}}C_5 = \\ &= [C_1]^{-1}[\Phi_1N_1]^{-1}\Phi_5N_5C_5 = \\ &= [C_1]^{-1}[N_1]^{-1}N_5C_5, \end{aligned} \tag{6}$$

где $C_k = [\Psi^k_{\text{ВКБ}}]^{-1}\Psi_k$ и $N_k = [\Phi_k]^{-1}\Psi^k_{\text{ВКБ}}$ – матрицы связи, $\Psi^k_{\text{ВКБ}}$ – ВКБ-решения и Φ_k – решения системы (2) в окрестности точки поворота $z = 0$.

Далее будут использоваться следующие асимптотические представления для функции $u(x)$ при $x \to \pm\infty$:

$$\begin{aligned} &1)\ u(x) = \frac{\beta}{2}x^{-1} + O(x^{-3}), \\ &\quad u_x = -\frac{\beta}{2}x^{-2}(1+o(1)), \\ &2)\ u(x) = -\frac{\beta}{2}x^{-1} + O(x^{-3}), \\ &\quad u_x = \frac{\beta}{2}x^{-2}(1+o(1)), \\ &3)\ u(x) = -2x + O(x^{-1}), \\ &\quad u_x = -2 + o(1). \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим случай $x \to +\infty$. Сделаем замену переменной

$$z = \tau^{-1/4}\lambda, \quad \tau = x^2, \quad x \to +\infty.$$

Тогда система (2) для новой переменной z перепишется в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d\Psi}{dz} = \tau A(z,\tau)\Psi, \\ &A(z,\tau) = \begin{pmatrix} \frac12 z^3 + z(1+\frac{u}{x}) & i\left(\frac{\sqrt{u}}{\tau^{1/4}}z^2 + \frac{u^2+2xu-u_x+\beta}{2\tau^{3/4}\sqrt{u}}\right) \\ i\left(\frac{\sqrt{u}}{\tau^{1/4}}z^2 + \frac{u^2+2xu+u_x+\beta}{2\tau^{3/4}\sqrt{u}}\right) & -\frac12 z^3 - z(1+\frac{u}{x}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что $A(z,\tau)$ имеет порядок $O(1)$ при $\tau \to \infty$ и фиксированном z. Вид (8) позволяет применить метод ВКБ [2] к (8) и получить главный член асимптотики его решения во всей плоскости комплексного переменного z, за исключением окрестностей точек поворота системы.

Найдем уравнение для функции $\mu(z,\tau)$, генерирующей собственные значения матрицы $A(z,\tau)$:

$$\mu^2(z,\tau) = \frac{z^6}{4} + z^4 + (1-\frac{\beta}{\tau})z^2 + \frac{b^2}{\tau}, \tag{9}$$

где, учитывая поведение (7) функции $u(x)$ при $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned} &b^2 = -2\beta + O(\tau^{-1}), && u(x) \sim \tfrac{\beta}{2x}, \\ &b^2 = O(\tau^{-2}), && u(x) \sim -\tfrac{\beta}{2x}, \\ &b^2 = O(\tau^{-1}), && u(x) \sim -2x. \end{aligned} \tag{10}$$

ВКБ-решение имеет следующую структуру [2]:

$$\begin{aligned} &\Psi_{\text{ВКБ}}(z) = T(z)\exp\left\{\int^z \Lambda(\eta)\,d\eta\right\}, \\ &\Lambda(z) = \tau\Lambda_0(z) + \Lambda_1(z) + O(\tau^{-1}), \end{aligned} \tag{11}$$

где $\Lambda_0 = \sigma_3\,\mu(z,\tau)$, $\Lambda_1 = -\text{diag}\left(T^{-1}\frac{dT}{dz}\right)$, а матрица $T(z)$ находится из уравнения $T^{-1}AT = \Lambda_0$ и Λ_0 – диагональная форма матрицы A.

К сказанному выше следует добавить то, что необходимо определить выбор ветви корня для функции $\mu(z,\tau)$ на римановой поверхности Γ квадратного корня, которую можно представить как два листа плоскости z, склеенные по разрезам (z_i, z_{i+1}), $i = 1,3,5$. Точки z_k, $k = \overline{1,6}$ являются корнями алгебраического уравнения $\mu^2(z,\tau) = 0$. Положим $\Gamma_\pm$ – соответственно верхний и нижний листы римановой поверхности Γ и выберем для определенности

$$\mu(z,\tau) \to \pm\frac12 z(z^2+2), \quad z \to +\infty, \quad z \in \Gamma_\pm.$$

Точки поворота являются решениями уравнения $\mu^2 = 0$. Точки $z_{1,2}$, $z_{3,4}$, $z_{5,6}$, при $\tau \to \infty$ сливаются в двойные точки поворота $z_1 = 0$, $z_{3,5} = \pm i\sqrt{2}$.

Теория асимптотических методов для линейных ОДУ [2] доказывает существование приближенного ВКБ-решения в некоторых областях плоскости z, за исключением окрестностей точек поворота системы. Области применения различных ВКБ-приближений ограничены линиями Стокса системы (8). Эти линии при $z \to \infty$ совпадают с границами секторов (5). Таким образом, выделяется восемь различных ВКБ-решений, определенных в своих областях, ограниченных линиями Стокса.

Поведение ВКБ-решений в окрестности точки $z = \infty$ совпадает с видом формального решения (4). Выясним вид и расположение линий Стокса системы (8) около точки поворота $z = 0$. Линии Стокса выходят из точки $z = 0$ под углами $\arg z = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k = \overline{0,3}$ и при $z \to \infty$ выходят на асимптоты $\arg z = \pm\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}$.

Для вычисления матриц связи $C_{1,5}$ требуются решения $\Psi_{1,5}$, которые аппроксимируются соответствующими ВКБ-решениями в областях $\Omega_{1,5}$. Рассмотрим сектор $|\arg z| < \frac{\pi}{8}$ при $z \to \infty$ и решение $\Psi^1_{\text{ВКБ}}(z)$ в нем. Сшивку внутреннего и ВКБ-решений необходимо производить в области

$$D_0^\varepsilon = \{\,z\,|\,O(\tau^{-1/2}) < z < O(\tau^{-1/2+\varepsilon}),\ 0 < \varepsilon < 1/2\}.$$

Вычислим главные члены $\Psi^1_{\text{ВКБ}}(z)$ в этой области. Найдем первые члены асимптотики функции $\mu(z,\tau)$:

$$\begin{aligned} \mu(z,\tau) = \frac{z}{2}(z^2+2) + \frac{b^2-\beta z^2}{\tau z(z^2+2)} &+ \\ + O\left(\frac{\tau^{-2}}{z^3(z^2+2)}\right) &+ O\left(\frac{\tau^{-2}z}{(z^2+2)^3}\right), \end{aligned}$$

где выражение справа нужно понимать как двойную асимптотику (по z и по $\tau \to \infty$). Выпишем выражение для матрицы $T(z)$ в главных членах при $z \in D_0^\varepsilon$, $\quad x \to +\infty$:

$$T(z) = \begin{pmatrix} 1 & -i\dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}\tau^{1/2}z} \\ i\dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}\tau^{1/2}z} & 1 \end{pmatrix}(I + \mathrm{o}(1)),$$
$$u(x) \sim \frac{\beta}{2x},$$
$$T(z) = \begin{pmatrix} 1 & O\left(\tau^{-1/2}z\right) \\ O\left(\tau^{-1/2}z\right) & 1 \end{pmatrix}(I + \mathrm{o}(1)),$$
$$u(x) \sim -\frac{\beta}{2x},$$
$$T(z) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\sqrt{2}}{z} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{z} & 1 \end{pmatrix}(I + \mathrm{o}(1)),$$
$$u(x) \sim -2x.$$

Теперь выпишем интеграл в фазе ВКБ-решения:

1) $u(x) \sim \dfrac{\beta}{2x}, \quad x \to +\infty, \quad \displaystyle\int_z^\zeta \Lambda(\eta)\,d\eta =$

$$= \sigma_3\tau\left(\frac{\zeta^4}{8} + \frac{\zeta^2}{2} - \frac{\beta}{\tau}\ln\zeta - \frac{z^2}{2} + \frac{\beta}{\tau}\ln z + \mathrm{o}(\tau^{-1})\right),$$

2) $u(x) \sim -\dfrac{\beta}{2x}, \quad x \to +\infty, \quad \displaystyle\int_z^\zeta \Lambda(\eta)\,d\eta =$

$$= \sigma_3\tau\left(\frac{\zeta^4}{8} + \frac{\zeta^2}{2} - \frac{\beta}{\tau}\ln\zeta - \frac{z^2}{2} + \frac{\beta}{2\tau}\ln 2 + \mathrm{o}(\tau^{-1})\right),$$

3) $u(x) \sim -2x, \quad x \to +\infty, \quad \int_z^\zeta \Lambda(\eta)\,d\eta =$

$$= \sigma_3\tau\left(\frac{\zeta^4}{8} + \frac{\zeta^2}{2} - \frac{\beta}{\tau}\ln\zeta - \frac{z^2}{2} + \frac{\beta}{2\tau}\ln 2\right) - I\left(\ln z - \frac{1}{2}\ln 2\right) + \mathrm{o}(1).$$

Рассмотрим теперь решение (2) в окрестности точки $z = 0$. После растяжения координат

$$\xi = \tau^{1/4}\lambda, \quad z = \tau^{-1/2}\xi$$

запишем полученное уравнение в медленных переменных

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \tau^{1/2}A(\tau^{-1/2}\xi, \tau)\Psi. \qquad (12)$$

Для решения системы (12) при $u(x) \sim \frac{\beta}{2x}$, $x \to +\infty$ рассмотрим модельную систему

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \begin{pmatrix} \xi & b \\ b & -\xi \end{pmatrix}\Phi, \qquad (13)$$

где после замены переменной $\xi = \frac{\eta}{\sqrt{2}}$ ее решение сводится к решению уравнения параболического цилиндра

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{\eta^2}{4}\right)y = 0,$$
$$\nu_{1,2} = -\frac{b^2}{2} - \frac{1}{2} + (-1)^k,$$
$$\Phi_{kk}(\xi) = y(\sqrt{2}\,\xi).$$

Для построения фундаментальной системы решений уравнения (13) возьмем следующую пару функций:

$$\Phi_{11}(\xi) = D_{-1-\nu_1}(i\sqrt{2}\,\xi), \quad \Phi_{22}(\xi) = D_{\nu_2}(\sqrt{2}\,\xi),$$

где $D_\nu(z)$ – функции Вебера–Эрмита. Из (13) найдем

$$\Phi_{21}(\xi) = \frac{i}{\sqrt{\beta}}\left(\sqrt{2}\xi D_{-\beta}(i\sqrt{2}\xi) + iD_{1-\beta}(i\sqrt{2}\xi)\right),$$
$$\Phi_{12}(\xi) = -\frac{i}{\sqrt{\beta}}\left(\sqrt{2}\xi D_\beta(\sqrt{2}\,\xi) - D_{1+\beta}(\sqrt{2}\,\xi)\right).$$

Выпишем асимптотику $\Phi(\xi)$ при $\xi \to \infty$, $\arg\xi = -\frac{\pi}{4}$, используя асимптотические разложения функций Вебера–Эрмита при больших ξ:

$$\Phi(\xi) \sim \begin{pmatrix} 1 & -i\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}\,\xi} \\ i\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}\,\xi} & 1 \end{pmatrix}\left(I + O(\xi^{-2})\right) \times$$
$$\times\exp\left\{\sigma_3\left(\frac{\xi^2}{2} - \beta\ln\xi - \frac{\beta}{2}\ln 2 - \frac{i\pi\beta}{4}\right) - \frac{i\pi\beta}{4}\sigma_0\right\}.$$

С помощью формул перехода $\xi \to -\xi$ для функций Вебера–Эрмита выпишем асимптотику $\Phi(\xi)$ при $\xi \to \infty$, $\arg\xi = \frac{3\pi}{4}$:

$$\Phi(\xi) \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{i\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}\,\xi} \\ \frac{i\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}\,\xi} & 1 \end{pmatrix}\left(I + O(\xi^{-2})\right) \times$$
$$\times\exp\left\{\sigma_3\left(\frac{\xi^2}{2} - \beta\ln\xi - \frac{\beta}{2}\ln 2 + \frac{7i\pi\beta}{4}\right) - \frac{i\pi\beta}{4}\sigma_0\right\} \times$$
$$\times\begin{pmatrix} 1 & \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\frac{i\pi\beta}{2}}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\beta}\,\Gamma(-\beta)} \\ -\frac{\mathrm{e}^{\frac{3i\pi\beta}{2}}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\beta}\,\Gamma(\beta)} & \mathrm{e}^{-2i\pi\beta} \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. *В случае $b^2 \ll 1, \tau \to \infty$ модельная система упрощается и решение ее выписывается явно*

$$\Phi(\xi) = B^{(0)}\,\mathrm{e}^{\pm\frac{\xi^2}{2}\sigma_3}.$$

Как видно из (10), данное решение имеет место быть в случае $u(x) \sim -2x$ или $u(x) \sim -\frac{\beta}{2x}$ при $x \to +\infty$.

Вычисляя теперь произведение

$$[C_1]^{-1}[N_1]^{-1}N_5C_5,$$

получаем выражение для $S_1S_2S_3S_4$. Окончательно имеем следующие выражения для данных монодромии при $x \to +\infty$:

1) $u(x) \sim \frac{\beta}{2x}, \quad x \to +\infty,$

$$1 + s_2 s_3 = e^{2i\pi\beta},$$
$$s_2 + s_4 e^{2i\pi\beta} = \frac{\sqrt{2\pi}\, 2^\beta\, \tau^{\beta/2}}{\sqrt{\beta}\,\Gamma(\beta)},$$
$$s_3 + s_1 e^{2i\pi\beta} = -\frac{i\sqrt{2\pi}\,\tau^{-\beta/2}\, e^{i\pi\beta}}{2^\beta \sqrt{\beta}\,\Gamma(-\beta)},$$

2) $u(x) \sim -\frac{\beta}{2x}, \quad x \to +\infty,$

$$s_1 s_2 = s_2 s_3 = 0, \quad s_1 + s_3 = 0, \quad \beta \in \mathbb{Z},$$

3) $u(x) \sim -2x, \quad x \to +\infty,$

$$s_1 s_2 = s_2 s_3 = 0, \quad s_1 + s_3 = 0, \quad \beta \in \mathbb{Z}.$$

Аналогичные вычисления в случае $x \to -\infty$ дают следующие выражения для данных монодромии:

1) $u(x) \sim \frac{\beta}{2x}, \quad x \to +\infty,$

$$1 + s_1 s_4 = e^{-2i\pi\beta},$$
$$s_2 - s_4 = -\frac{\sqrt{2\pi}\, 2^\beta\, \tau^{\beta/2}}{\sqrt{\beta}\,\Gamma(\beta)},$$
$$s_1 - s_3 = \frac{i\sqrt{2\pi}\,\tau^{-\beta/2}\, e^{-i\pi\beta}}{2^\beta \sqrt{\beta}\,\Gamma(-\beta)},$$

2) $u(x) \sim -\frac{\beta}{2x}, \quad x \to -\infty,$

$$s_1 s_4 = s_3 s_4 = 0, \quad s_3 - s_1 e^{2i\pi\beta} = 0, \quad \beta \in \mathbb{Z},$$

3) $u(x) \sim -2x, \quad x \to -\infty,$

$$s_1 s_4 = s_3 s_4 = 0, \quad s_3 - s_1 e^{2i\pi\beta} = 0, \quad \beta \in \mathbb{Z}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
2. **Федорюк М. В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
3. **Jimbo M., Miwa T., Ueno K.** Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients // Physica D (1981). V. 2. P. 306–352, 407–448; V. 4. P. 26–46.
4. **Its A. R., Novokshenov V. Yu.** The isomonodromic deformation method in the theory of Painlevé equations // Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1986. V. 1191.
5. **Белогрудов А. Н.** Формулы связи для асимптотик решений четвертого уравнения Пенлеве. Вырожденные случаи. I // Проблемы математики и теории управления / Ред. Б. Г. Ильясов и И. И. Голичев. Уфа: УГАТУ, 1998. С. 17–32.

ОБ АВТОРЕ

Белогрудов Александр Николаевич, ст. преподаватель кафедры специальных глав математики УГАТУ. Дипл. математик (БГУ, 1999). Исследования в области нелинейных дифференциальных уравнений.

УДК 517.5

Г. З. МУХАМЕТОВА

ЛОКАЛЬНЫЕ ВРЕМЕНА И ЗАДАЧА ВОЗМУЩЕНИЯ

Показано, что если имеется вещественнозначная борелевская функция, обладающая локальным временем, совместно непрерывным по двум переменным, то возмущенная функция, состоящая из суммы исходной функции и гладкой строго монотонной функции, тоже обладает локальным временем. *Недифференцируемая функция; локальное время; задача возмущения*

Пусть $X(s)$, $s \in [0,1]$, — вещественнозначная борелевская функция. Ниже удобно интерпретировать переменную s как время. Для любого множества A через $\mathbf{1}(A)$ будем обозначать индикатор множества A, т. е. функцию, равную 1 на A и 0 вне A; далее всюду $a \wedge b = \min(a, b)$. Введем величины

$$\nu_t(\Gamma) = \int_0^t \mathbf{1}(X(s) \in \Gamma)ds, \;\; t \in [0,1], \;\; \Gamma \in B(R),$$

которые можно рассматривать как количество времени, проводимое функцией $X(s)$, $s \in [0,1]$, в множестве Г. При каждом фиксированном t функция множества $\nu_t(\Gamma)$, $\Gamma \in B(R)$, является мерой, значит, функция $\nu_t(u) = \nu_t((-\infty, u])$, $u \in R$, будет неубывающей функцией. Подчеркнем тот факт, что несмотря на то, что исходная функция $X(s)$ может не иметь производной, время пребывания $\nu_t(u)$ при почти всех (п. в.) u ее имеет.

Определение. Если при каждом t мера $\nu_t(.)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\lambda(.)$, то производная Радона–Никодима $\alpha_t(u) = \alpha(t,u) = \frac{d\nu_t}{d\lambda}(u)$ называется *локальным временем* функции $X(s)$.

Положим $\alpha(t,u) = \alpha([0,t],u)$.

Таким образом, локальное время $\alpha(t,u)$, если оно существует, при каждом фиксированном t есть плотность времени пребывания. Это означает, что при каждом $\Gamma \in B(R)$ справедливо равен-