всегда существует, ввиду непрерывности по u подынтегральной функции. Поскольку $\alpha(t,u) \le \alpha(1,u)$, то

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon}\alpha_{p,Z}([p-Z(t),p-Z(0)],u)\,du =$$

$$=\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon}\alpha([0,t],u)\,du \le \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon}\alpha(1,u)\,du \equiv \alpha_\varepsilon(1,v).$$

Так как

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_R \alpha_\varepsilon(1,v)\,dv = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_R\int\limits_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon}\alpha(1,u)\,du\,dv =$$

$$=\int\limits_R \alpha(1,v)\,dv = 1 = \int\limits_R \lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\varepsilon(1,u)\,du,$$

то ввиду положительности $\alpha_\varepsilon(1,u)$, это означает, что семейство $\alpha_\varepsilon(1,u)$ равномерно интегрируемо. Поэтому семейство

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{v-\varepsilon}^{v+\varepsilon}\alpha_{p,Z}([p-Z(t),p-Z(0)],u)du,\ \ \varepsilon>0,$$

тоже равномерно интегрируемо. Следовательно, мы можем внести предел под знак интеграла. Тогда

$$I=\int\limits_{-\infty}^{a}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{p-Z(t)}^{p-Z(0)}\mathbf{1}(X(Z^{-1}(p-v))\in(v-\varepsilon,v+\varepsilon))\times$$

$$\times\,(Z^{-1}(p-v))'_p\,dv\,dp.$$

Это означает, что функция $X(s)+Z(s)$ обладает локальным временем. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Geman D., Horowitz J.** Occupation densities // Ann. Probab. 1980. V. 8, No 1. P. 1–67.
2. **Geman D., Horowitz J.** Smooth perturbations of a function with a smooth local time // Trans. Amer. Math. Soc. V. 267, No 2. 1981. P. 517–530.
3. **Meyer P. A.** Un cours sur les intégrales stochastiques. // Sem. de Probabilitiés X, Lecture Notes in Math. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1976. V. 511.

ОБ АВТОРЕ

Мухаметова Гульнара Зуфаровна, аспирант каф. математики УГАТУ. Дипл. инж.-математик по прикладной математике (УГАТУ, 2000). Готовит диссертацию о локальных временах функций под рук. проф. Ф. С. Насырова.

УДК 517.9

И. Г. ПАРАМОШИНА

КВАЗИМЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ C[0,1], ПОРОЖДЕННАЯ «ТЕПЛОВЫМ» УРАВНЕНИЕМ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Получено обобщение теоремы Колмогорова о непрерывности реализаций случайного процесса на случай квазимеры и показано, что квазимеру, порожденную фундаментальным решением уравнения типа теплопроводности четвертого порядка, можно построить в пространстве непрерывных функций. *Квазимера, «случайный процесс», порожденный квазимерой; непрерывность реализаций «случайного процесса», уравнения типа теплопроводности высших порядков*

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена некоторым вопросам анализа в бесконечномерных пространствах, а именно, построению квазимер в пространстве непрерывных функций $C[0,1]$. В работе получено обобщение теоремы Колмогорова о непрерывности реализаций случайного процесса на случай пространства с квазимерой и показано, что квазимеру, соответствующую «тепловому» уравнению четвертого порядка, можно построить в пространстве $C[0,1]$.

Ранее было показано [1], что квазимера, порожденная фундаментальным решением дифференциального уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{(k+1)}\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}$, имеет ограниченную вариацию только при $k=1$, поэтому теорему Колмогорова [2] можно применить только для квазимеры, которая фактически является вероятностной мерой, соответствующей уравнению теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. В работе [5] Хошбергом было высказано предположение о том, что траектории «случайных процессов» для квазимер, порожденных «тепловыми» уравнениями высших порядков, по крайней мере, не имеют разрывов второго рода. Однако в данной работе будет показано, что «случайные процессы» для таких квазимер имеют непрерывные модификации.

Приведем необходимые обозначения и сведения. Пусть (X, U) — измеримое пространство с алгеброй $U = \lim\limits_{\Lambda} U_\lambda$, являющейся [1] пределом направленного семейства σ-алгебр. Аддитивная функция множеств μ на U называется *квазимерой на* U, если ее сужение $\mu_\lambda = \mu|_{U_\lambda}$ при каждом $\lambda \in \Lambda$ является мерой. Тройка (X, U, μ) при этом называется *пространством* с *квазимерой*, а элементы алгебры U — *цилиндрическими множествами.*

Рассмотрим $\mathbf{R}^T$ — множество всех функций, определенных на $T = [0,1]$. Определим систему операторов проектирования: $\mathcal{R} = \{S_{q_m}\}$, $S_{q_m} : \mathbf{R}^T \to \mathbf{R}^T$, $S_{q_m}(X(\cdot)) = X_{q_m}(\cdot)$, где $X_{q_m}(t) = X(t_{k-1})$, $t_{k-1} \leqslant t < t_k$, q_m — разбиение $\{t_1 < t_2 < \ldots < t_m\}$. Таким образом, любая функция из $\mathbf{R}^T$ проектируется в ступенчатую. Данные операторы порождают операторы Π_{q_m} над функционалами F в $\mathbf{R}^T$: $\Pi_{q_m} F(X(\cdot)) = F(S_{q_m}(X(\cdot))) = F(X_{q_m}(\cdot))$. Очевидны следующие свойства операторов Π_{q_m}:

1) $\Pi_{q_m} F \cdot G = \Pi_{q_m} F \cdot \Pi_{q_m} G$;

2) $\Pi_{q_m}(F + G) = \Pi_{q_m} F + \Pi_{q_m} G$;

3) $\Pi_{q_m} \mathbf{1}(s \in [0,1]) = \mathbf{1}(s_m \in [0,1])$, где s_m ближайшая слева к s точка разбиения q_m. Система операторов $\mathcal{R}$ порождает алгебру цилиндрических множеств.

Функция $F(X(\cdot))$ *интегрируема по квазимере* μ, если существует предел

$$I(F) = \lim_{q_m} I_{q_m}(F), \text{ где } I_{q_m}(F) = \int\limits_{\mathbf{R}^{q_m}} \Pi_{q_m} F \, d\mu_{q_m}.$$

Предел $I(F)$ называется [1] *континуальным интегралом по квазимере* μ.

Пусть в пространстве $(\mathbf{R}^T, \mathcal{B}(\mathbf{R}^T), \mu)$, где $\mathcal{B}(\mathbf{R}^T)$ — σ-алгебра цилиндрических множеств, μ — квазимера, задан «случайный процесс» $\xi_t(w), t \in [0,1]$. Множество всех функций распределения вида $F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = \mu(\xi_{t_1} \leqslant x_1, \ldots, \xi_{t_n} \leqslant x_n)$ для любых $t_1, \ldots, t_n \in T$, при всех n называется *системой конечномерных распределений «процесса»* $\xi_t(w)$. Система конечномерных распределений обладает свойствами согласованности:

1) Если $i_1, \ldots, i_n$ — перестановка чисел от 1 до n, то $F_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)$;

2) $F_{t_1,\ldots,t_{n-1},t_n}(x_1, .., x_{n-1}, +\infty) = F_{t_1,\ldots,t_{n-1}}(x_1, .., x_{n-1})$.

«Случайный процесс» $\tilde{\xi}_t$ называется *модификацией* «процесса» ξ_t относительно системы операторов проектирования $\mathcal{R}$, если $\mu(\tilde{\xi}_t \neq \xi_t) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu_{q_m}(\Pi_{q_m}(\tilde{\xi}_t \neq \xi_t)) = 0$ для любых $t \in T$.

Операторы проектирования, для которых точки разбиения q_m имеют вид $\{\frac{k}{2^m}\}_{k=1}^{2^m}$, назовем *двоично-рациональными.*

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. *Пусть ξ_t — «случайный процесс» на $(\mathbf{R}^T, \mathcal{B}(\mathbf{R}^T), \mu)$, где μ — неотрицательная неограниченная квазимера, и существуют положительные константы α, β, C такие, что выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\mathbf{R}^2} |x - y|^\beta F_{t,s}(dx\,dy) \leqslant C|t - s|^{1+\alpha} \qquad (1)$$

для любых $s, t \in [0,1]$.

1) *Если система операторов проектирования $\mathcal{R}$ двоично-рациональная, то существует непрерывная модификация $\tilde{\xi}_t$ исходного «процесса» ξ_t.*

2) *Квазимеру μ можно построить в пространстве $(C[0,1], \mathcal{B}(C[0,1]))$.*

Замечание 1. В случае, когда квазимера μ — вероятностная мера, имеет место [2] классическая теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации, причем условие (1) представляется в виде

$$E|\xi_t - \xi_s|^\beta \leqslant C|t - s|^{1+\alpha}$$

для любых $s, t \in [0,1]$.

Замечание 2. Пусть μ — знакопеременная квазимера, тогда ее сужение $\mu_\lambda = \mu|_{U_\lambda}$ является зарядом при любом λ. Согласно разложению Хана–Жордана, $\mu_\lambda = \mu_\lambda^+ - \mu_\lambda^-$, где $\mu_\lambda^+, \mu_\lambda^-$ — неотрицательные меры [3]. Тогда $\mu = \mu^+ - \mu^-$, где μ^+, μ^- — неотрицательные квазимеры, и $\mu^+|_\lambda = \mu_\lambda^+, \mu^-|_\lambda = \mu_\lambda^-$. Теорема 1 справедлива для неотрицательных квазимер μ^+ и μ^- и очевидным образом обобщается на случай знакопеременной квазимеры μ, причем в условии (1) двухмерное распределение $F_{t,s}(x,y)$ заменяется на его вариацию

$$|F_{t,s}|(x,y).$$

Замечание 3. Теорема 1 также обобщается на случай комплекснозначной квазимеры μ. Это следует из того, что $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, где μ_1, μ_2 — вещественнозначные квазимеры, для каждой из которых теорема 1 справедлива. В этом случае также двухмерное распределение $F_{t,s}(x,y)$ в условии (1) заменяется на сумму вариаций соответствующих двухмерных распределений μ_1 и μ_2.

Доказательство. Рассмотрим на $[0,1]$ множество двоично-рациональных точек $T_0 = \{\frac{k}{2^n}\}_{k=1}^{2^n}$. Введем обозначения:

$$A_{n,k,m} = \left\{\xi_\cdot : \left|\xi_{\frac{k+1}{2^n}} - \xi_{\frac{k}{2^n}}\right| > \left(\frac{k+1}{2^n} - s\right)^{\frac{\alpha}{2\beta}}, \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{k}{2^n},\ s \in q_m\right\},$$

$$A_{n,m}=\bigcup_{k=1}^{2^n}A_{n,k,m}=$$

$$=\bigcup_{k=1}^{2^n}\left\{\xi.:\left(\frac{k+1}{2^n}-s\right)<\left|\xi_{\frac{k+1}{2^n}}-\xi_{\frac{k}{2^n}}\right|^{\frac{2\beta}{\alpha}},\right.$$

$$\left.0\leqslant s\leqslant\frac{k}{2^n},\,s\in q_m\right\}=\bigcup_{k=1}^{2^n}\left\{\xi.:\right.$$

$$\left.\frac{k+1}{2^n}-\left|\xi_{\frac{k+1}{2^n}}-\xi_{\frac{k}{2^n}}\right|^{\frac{2\beta}{\alpha}}<s\leqslant\frac{k}{2^n},\,s\in q_m\right\}.$$

Пусть Ω_0 — множество, на котором $A_{n,m}$ происходит бесконечно часто. Покажем, что $\mu(\Omega_0)=0$. Действительно, согласно определению квазимеры, имеем

$$\mu(\Omega_0)=\limsup_{m\to\infty}\mu_{q_m}\left\{\Pi_{q_m}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{l\geq n}\bigcup_{k=1}^{2^l}A_{l,k,m}\right)\right\}=$$

$$=\limsup_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty,n>m}\mu_{q_m}\left\{\bigcup_{l\geq n}\bigcup_{k=1}^{2^l}\Pi_{q_m}\left\{\xi.:\right.\right.$$

$$\left|\xi_{\frac{k+1}{2^l}}-\xi_{\frac{k}{2^l}}\right|>\left(\frac{k+1}{2^l....}-s\right)^{\frac{\alpha}{2\beta}},$$

$$\left.\left.0\leqslant s\leqslant\frac{k}{2^l},\,s\in q_m\right\}\right\}.$$

В силу того, что разбиение q_l «гуще» чем q_m (так как $l>n>m$), получим, что при применении оператора Π_{q_m} точкам $\{\frac{k}{2^l}\}_{k=1}^{2^l}$ сопоставляются ближайшие слева точки разбиения q_m. За исключением конечного числа случаев (когда точка $\frac{k+1}{2^l}$ совпадает с узлом разбиения q_m), точки $\frac{k+1}{2^l}$ и $\frac{k}{2^l}$ проектируются в одну и ту же точку, поэтому

$$\bigcup_{k=1}^{2^l}\Pi_{q_m}\left\{\xi.:\left|\xi_{\frac{k+1}{2^l}}-\xi_{\frac{k}{2^l}}\right|>\left(\frac{k+1}{2^l}-s\right)^{\frac{\alpha}{2\beta}},\right.$$

$$\left.0\leqslant s\leqslant\frac{k}{2^l},s\in q_m\right\}=$$

$$=\bigcup_{k=1}^{2^l}\Pi_{q_m}A_{l,k,m}\mathbf{1}\left(\frac{k+1}{2^l}=\frac{t}{2^m},t=1,...,2^m\right)=$$

$$=\bigcup_{t=1}^{2^m}\Pi_{q_m}A_{l,t2^{l-m}-1,m}=$$

$$=\bigcup_{t=1}^{2^m}\Pi_{q_m}\left\{\xi.:\left|\xi_{\frac{t}{2^m}}-\xi_{\frac{t}{2^m}-\frac{1}{2^l}}\right|>\left(\frac{t}{2^m}-s\right)^{\frac{\alpha}{2\beta}},\right.$$

$$\left.0\leqslant s\leqslant\frac{t}{2^m}-\frac{1}{2^l},s\in q_m\right\}=$$

$$=\bigcup_{t=1}^{2^m}\left\{\xi.:\left|\xi_{\frac{t}{2^m}}-\xi_{\frac{t-1}{2^m}}\right|>\left(\frac{t}{2^m}-s\right)^{\frac{\alpha}{2\beta}},\right.$$

$$\left.0\leqslant s\leqslant\frac{t-1}{2^m},s\in q_m\right\}.$$

В силу неравенства Чебышева и условия (1), получим

$$\mu_{q_m}\left\{\xi.:\left|\xi_{\frac{t}{2^m}}-\xi_{\frac{t-1}{2^m}}\right|>\left(\frac{t}{2^m}-s\right)^{\frac{\alpha}{2\beta}},\right.$$

$$\left.0\leqslant s\leqslant\frac{t-1}{2^m},\,s\in q_m\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\mu_{q_m}\left\{\xi.:\left|\xi_{\frac{t}{2^m}}-\xi_{\frac{t-1}{2^m}}\right|>\left(\frac{1}{2^m}\right)^{\frac{\alpha}{2\beta}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\mathbf{R}^2}|x-y|^{\beta}F_{\frac{t}{2^m},\frac{t-1}{2^m}}(dx\,dy)/\left(\frac{1}{2^m}\right)^{\alpha/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left(C\left(\frac{1}{2^m}\right)^{1+\alpha}\right)\Big/\left(\frac{1}{2^m}\right)^{\frac{\alpha}{2}}=\frac{C2^{-m}}{2^{\frac{\alpha m}{2}}}.$$

Следовательно,

$$\mu(\Omega_0)=\limsup_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty,n>m}\mu_{q_m}\left(\bigcup_{l\geq n}\bigcup_{t=1}^{2^m}\left\{\xi.:\right.\right.$$

$$\left|\xi_{\frac{t}{2^m}}-\xi_{\frac{t-1}{2^m}}\right|>\left(\frac{t}{2^m}-s\right)^{\frac{\alpha}{2\beta}},$$

$$\left.0\leqslant s\leqslant\frac{t-1}{2^m},\,s\in q_m\right\}=$$

$$=\limsup_{m\to\infty}\mu_{q_m}\bigcup_{t=1}^{2^m}\left\{\xi.:\right.$$

$$\left|\xi_{\frac{t}{2^m}}-\xi_{\frac{t-1}{2^m}}\right|>\left(\frac{t}{2^m}-s\right)^{\frac{\alpha}{2\beta}},$$

$$\left.0\leqslant s\leqslant\frac{t-1}{2^m},\,s\in q_m\right\}=$$

$$=\limsup_{m\to\infty}\sum_{t=1}^{2^m}\mu_{q_m}\left\{\xi.:\right.$$

$$\left|\xi_{\frac{t}{2^m}}-\xi_{\frac{t-1}{2^m}}\right|>\left(\frac{t}{2^m}-s\right)^{\frac{\alpha}{2\beta}},$$

$$\left.0\leqslant s\leqslant\frac{t-1}{2^m},\,s\in q_m\right\}=$$

$$=\limsup_{m\to\infty}\sum_{t=1}^{2^m}C\frac{2^{-m}}{2^{\frac{\alpha m}{2}}}=\limsup_{m\to\infty}\frac{C}{2^{\frac{\alpha m}{2}}}=0.$$

Так же, как при доказательстве классической теоремы Колмогорова [2], можно показать, что для $w\in\Omega\setminus\Omega_0$ выполняется неравенство $|\xi_t-\xi_s|\leqslant C(w)|t-s|^{\frac{\alpha}{2\beta}}$ на T_0, следовательно, «процесс» ξ_t равномерно непрерывен на множестве двоично-рациональных точек T_0, и его можно продолжить по непрерывности на T.

Рассмотрим «процесс»

$$\tilde{\xi}_t = \mathbf{1}_{(\Omega\setminus\Omega_0)} \begin{cases} \xi_t, & t \in T_0, \\ \lim\limits_{\substack{s\to t_0,\\ s\in T_0}} \xi_s, & t \in T\setminus T_0. \end{cases}$$

Заметим, что в силу построения «процесса» $\tilde{\xi}_t$ при $w \in \Omega\setminus\Omega_0$ «процесс» $\tilde{\xi}_t(w)$ непрерывен для любых $t \in [0,1]$ и $\tilde{\xi}_t(w) \equiv 0$ при $w \in \Omega_0$, следовательно, $\tilde{\xi}_t(w)$ непрерывен для всех $w \in \Omega$.

Покажем теперь, что $\tilde{\xi}_t$ является модификацией «процесса» ξ_t, т. е. $\mu(\tilde{\xi}_t \neq \xi_t) = 0$. Имеем: $\mu(\tilde{\xi}_t \neq \xi_t) = \mu(\tilde{\xi}_t \neq \lim\limits_{s\to t_0, s\in T_0} \xi_s, w \in \Omega\setminus\Omega_0) + \mu(\tilde{\xi}_t \neq \lim\limits_{s\to t_0, s\in T_0} \xi_s, w \in \Omega_0)$. Второе слагаемое равно нулю, так как оно не превосходит $\mu(\Omega_0) = 0$.

Рассмотрим события $A^* = \{\xi. : |\xi_t - \xi_s| \leqslant C|t-s|^{\frac{\alpha}{2\beta}}\}$ и $B^* = \{\xi. : \limsup\limits_{s\to t_0, s\in T_0} |\xi_t - \xi_s| = 0\}$. Из определения верхнего предела следует, что $A^* \subset B^*$, значит $\bar{B}^* \subset \bar{A}^*$, но $\bar{A}^* = \{\xi. : |\xi_t - \xi_s| > C|t-s|^{\frac{\alpha}{2\beta}}\} \subset \Omega_0, \mu(\Omega_0) = 0$, значит $\mu(\bar{A}^*) = 0$, следовательно, $\mu(\tilde{\xi}_t \neq \xi_t) = 0$.

Таким образом, $\tilde{\xi}_t$ является непрерывной модификацией ξ_t. Первое утверждение теоремы 1 доказано.

Покажем, что конечномерные распределения ξ_t и $\tilde{\xi}_t$ совпадают. Ограничимся случаем двухмерных распределений (в других случаях доказательство аналогично).

Учитывая, что $\mu(\tilde{\xi}_t \neq \xi_t) = 0$ и

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\tilde{\xi}_t < x, \tilde{\xi}_s < y\right) = \\
&\quad = \mu\left(\tilde{\xi}_t < x, \tilde{\xi}_s < y, \tilde{\xi}_t = \xi_t, \tilde{\xi}_s = \xi_s\right) + \\
&\quad + \mu\left(\tilde{\xi}_t < x, \tilde{\xi}_s < y, \tilde{\xi}_t = \xi_t, \tilde{\xi}_s \neq \xi_s\right) + \\
&\quad + \mu\left(\tilde{\xi}_t < x, \tilde{\xi}_s < y, \tilde{\xi}_t \neq \xi_t, \tilde{\xi}_s = \xi_s\right) + \\
&\quad + \mu\left(\tilde{\xi}_t < x, \tilde{\xi}_s < y, \tilde{\xi}_t \neq \xi_t, \tilde{\xi}_s \neq \xi_s\right),
\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\tilde{\xi}_t < x, \tilde{\xi}_s < y\right) = \\
&\quad = \mu\left(\tilde{\xi}_t < x, \tilde{\xi}_s < y, \tilde{\xi}_t = \xi_t, \tilde{\xi}_s = \xi_s\right) = \\
&\quad = \mu\left(\xi_t < x, \xi_s < y, \tilde{\xi}_t = \xi_t, \tilde{\xi}_s = \xi_s\right) = \\
&\quad = \mu\left(\xi_t < x, \xi_s < y\right) - \\
&\quad - \mu\left(\xi_t < x, \xi_s < y, \tilde{\xi}_t \neq \xi_t, \tilde{\xi}_s = \xi_s\right) - \\
&\quad - \mu\left(\xi_t < x, \xi_s < y, \tilde{\xi}_t = \xi_t, \tilde{\xi}_s \neq \xi_s\right) - \\
&\quad - \mu\left(\xi_t < x, \xi_s < y, \tilde{\xi}_t \neq \xi_t, \tilde{\xi}_s \neq \xi_s\right) = \\
&\quad = \mu\left(\xi_t < x, \xi_s < y\right).
\end{aligned}$$

Таким образом, конечномерные распределения квазимеры μ можно задать на цилиндрических множествах пространства $(C[0,1], \mathcal{B}(C[0,1]))$, откуда следует второе утверждение теоремы 1.

Воспользуемся теоремой 1 для проверки того, что квазимеру, порожденную фундаментальным решением «теплового» уравнения четвертого порядка, можно построить в пространстве $C[0,1]$.

Теорема 2. *Квазимеру, порожденную фундаментальным решением дифференциального уравнения* $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, *можно перестроить в пространстве непрерывных функций.*

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно доказать, что выполняется условие

$$\int\limits_{\mathbf{R}^2} |x-y|^\beta |\mu_{s,t}|(dx\,dy) \leqslant C|t-s|^{1+\varepsilon},$$

где $\mu_{s,t}(\cdot)$ — квазимера, соответствующая уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$. Фундаментальное решение этого уравнения имеет вид

$$\rho(t,x) = \frac{1}{2\Pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\alpha x - \alpha^4 t\}\, d\alpha,$$

поэтому

$$\mu_{s,t}(x,y) = \int_0^x \int_0^y \rho(s,u)\rho(t-s, v-u)\, du\, dv.$$

Учитывая свойство автомодельности [5], имеем $\rho(t,h) = \rho(1, t^{-1/4}x)t^{-1/4}$, поэтому

$$\begin{aligned}
\mu_{s,t}(x,y) = \int_0^x \int_0^y & s^{-1/4}\rho(1, s^{-1/4}u) \times \\
& \times (t-s)^{-1/4}\rho(1, (v-u)(t-s)^{-1/4})\, du\, dv.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbf{R}^2} |x-y|^\beta |\mu_{s,t}|(dx\,dy) = \\
&\quad = \int\limits_{\mathbf{R}^2} |x-y|^\beta s^{-1/4}(t-s)^{-1/4} \times \\
&\times \left|\rho\left(1, s^{-1/4}x\right)\rho\left(1, (y-x)(t-s)^{-1/4}\right)\right| dx\,dy = \\
&\quad = \frac{|t-s|^{1+\varepsilon}}{|t-s|^{1+\varepsilon}} \int\limits_{\mathbf{R}^2} |x-y|^\beta s^{-1/4}(t-s)^{-1/4} \times \\
&\times \left|\rho\left(1, s^{-1/4}x\right)\rho\left(1, (y-x)(t-s)^{-1/4}\right)\right| dx\,dy = \\
&\quad = |t-s|^{1+\varepsilon} \int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{|x-y|^\beta}{s^{1/4}|t-s|^{\frac{5}{4}+\varepsilon}} \times \\
&\quad \times \left|\rho\left(1, s^{-1/4}x\right)\rho\left(1, \frac{y-x}{(t-s)^{1/4}}\right)\right| dx\,dy.
\end{aligned}$$

Сделав замену в последнем интеграле $z = y - x$, $x = x$ и положив $\beta = 5 + 4\varepsilon$, продолжим цепочку равенств:

$$|t-s|^{1+\varepsilon} \int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{|z|^\beta}{|t-s|^{\frac{\beta}{4}}} \times$$
$$\times |\rho|(s,x)|\rho| \left(1, \frac{z}{(t-s)^{1/4}}\right) dx\,dz =$$
$$= |t-s|^{1+\varepsilon} \int\limits_{\mathbf{R}} |\rho|(s,x)\,dx \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{|z|^\beta}{|t-s|^{\frac{\beta}{4}}} |\rho| \left(1, \frac{z}{(t-s)^{1/4}}\right) dz.$$

Сделаем замену во внутреннем интеграле $A = \frac{z}{(t-s)^{1/4}}$, получим, что выражение в правой части равно

$$|t-s|^{1+\varepsilon}|t-s|^{-1/4} \int\limits_{\mathbf{R}} |\rho|(s,x)\,dx \int\limits_{\mathbf{R}} A^\beta |\rho|(1,A)\,dA.$$

Известно [1], что интеграл $\int\limits_{\mathbf{R}} |\rho|(s,x)\,dx = C_1 \geqslant 1$. Следовательно, мы пришли к равенству

$$\int\limits_{\mathbf{R}^2} |x-y|^\beta |\mu_{s,t}|(dx\,dy) =$$
$$= C_1 |t-s|^{1+\varepsilon}|t-s|^{-1/4} \int\limits_{\mathbf{R}} A^\beta |\rho|(1,A)\,dA.$$

Осталось показать, что $\int\limits_{\mathbf{R}} A^\beta |\rho|(1,A)dA < \infty$. Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbf{R}} A^\beta |\rho|(1,A)\,dA =$$
$$= \int\limits_{\mathbf{R}} A^\beta \left| \frac{1}{2\Pi} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{iA\alpha - \alpha^4} d\alpha \right| dA =$$
$$= \frac{1}{2\Pi} \int\limits_{\mathbf{R}} \left| \int\limits_{\mathbf{R}} e^{iA\alpha} (A^\beta e^{-\alpha^4}) d\alpha \right| dA.$$

Обозначим

$$I = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{iA\alpha} \phi(\alpha) d\alpha,$$

где $\phi(\alpha) = A^\beta e^{-\alpha^4}$. Воспользуемся разложением интеграла Фурье [4], а именно тем фактом, что если функция $\phi(t)$ имеет на отрезке $\gamma \leqslant t \leqslant \delta$ непрерывные производные до N-го порядка включительно, то

$$\int_\gamma^\delta e^{ixt} \phi(t)\,dt = B_N(x) - C_N(x) + o(x^{-N}),\ x \to \infty, \tag{2}$$

где

$$C_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} i^{n-1} \phi^{(n)}(\gamma) x^{-n-1} e^{ix\gamma},$$

$$B_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} i^{n-1} \phi^{(n)}(\delta) x^{-n-1} e^{ix\delta}.$$

Этот результат останется справедливым, если $\gamma = -\infty$ (или $\delta = \infty$) при условии, что $\phi^{(n)}(t) \to 0$ при $t \to -\infty$ (или $t \to \infty$) для любых $n = 0, 1..N-1$, причем $\phi^{(N)}(t)$ является интегрируемой на (γ, δ) функцией.

Разобьем интеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{iA\alpha}\phi(\alpha)d\alpha + \int\limits_{0}^{\infty} e^{iA\alpha}\phi(\alpha)d\alpha \equiv I_1 + I_2$ и проверим справедливость условий, приведенных выше для каждого интеграла:

Пусть $N = 2$. Вычислим две производные функции $\phi(\alpha)$:

$$\phi'(\alpha) = A^\beta e^{-\alpha^4}(-4\alpha^3),$$

$$\phi''(\alpha) = A^\beta e^{-\alpha^4}(-4\alpha^3)^2 + A^\beta e^{-\alpha^4}(-12\alpha^2) =$$
$$= A^\beta \left(\frac{16\alpha^6}{e^{\alpha^4}} - \frac{12\alpha^2}{e^{\alpha^4}} \right).$$

Проверим интегрируемость $\phi''(\alpha)$.
Для I_2 имеем:

$$\int_0^\infty |\phi''(\alpha)|\,d\alpha =$$
$$= A^\beta \left| 16 \int_0^\infty \frac{\alpha^6}{e^{\alpha^4}} d\alpha - 12 \int_0^\infty \frac{\alpha^2}{e^{\alpha^4}} d\alpha \right| =$$
$$= A^\beta \left| 4\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) - 3\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \right|;$$

тогда для I_1:

$$\int_{-\infty}^0 |\phi''(\alpha)|\,d\alpha =$$
$$= \int_0^\infty |\phi''(-\alpha)|\,d(-\alpha) - \int_0^\infty |\phi''(\alpha)|\,d\alpha =$$
$$= A^\beta \left| 3\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) - 4\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \right|.$$

Далее, $\phi(\alpha) = A^\beta e^{-\alpha^4} \to 0$, при $\alpha \to \pm\infty$ и $\phi'(\alpha) = A^\beta e^{-\alpha^4}(-4\alpha^3) \to 0$, при $\alpha \to \pm\infty$.

Таким образом, можно воспользоваться разложением (2) для обоих интегралов I_1 и I_2. Имеем:

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{iA\alpha}\phi(\alpha)d\alpha = B_2(A) - C_2(A) + o(A^{-2}),$$

где

$$B_2(A) = \sum_{n=0}^{2-1} i^{n-1}\phi^{(n)}(0)A^{-n-1}e^{iA*0} =$$

$$= i^{-1}\phi(0)A^{-1} + i^0\phi'(0)A^{-2} = \frac{A^{\beta-1}}{i},$$

$$C_2(A) = \lim_{t\to\infty}(\sum_{n=0}^{2-1} i^{n-1}\phi^{(n)}(t)A^{-n-1}e^{iAt}) =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}(i^{-1}\phi(t)A^{-1}e^{iAt} + i^0\phi'(t)A^{-2}e^{iAt}) =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}(\frac{A^{\beta-1}}{ie^{iA(-|t|)+t^4}} - \frac{4t^3A^{\beta-2}}{e^{t^4+iA(-|t|)}}) \to 0.$$

Следовательно,

$$I_1 = \frac{A^{\beta-1}}{i} + o(A^{-2}).$$

Для интеграла I_2 имеем

$$I_2 = \int_0^\infty e^{iA\alpha}\phi(\alpha)\,d\alpha = B_2(A) - C_2(A) + o(A^{-2}),$$

где

$$B_2(A) = \lim_{t\to\infty}(\sum_{n=0}^{2-1} i^{n-1}\phi^{(n)}(t)A^{-n-1}e^{iAt}) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}(i^{-1}\phi(t)A^{-1}e^{iAt} + i^0\phi'(t)A^{-2}e^{iAt}) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}(\frac{A^{\beta-1}e^{iAt}}{ie^{t^4}} - \frac{4t^3A^{\beta-2}e^{iAt}}{e^{t^4}}) \to 0,$$

$$C_2(A) = \sum_{n=0}^{2-1} i^{n-1}\phi^{(n)}(0)A^{-n-1}e^{iA*0} =$$

$$= i^{-1}\phi(0)A^{-1} + i^0\phi'(0)A^{-2} = \frac{A^{\beta-1}}{i}.$$

Следовательно,

$$I_2 = 0 - \frac{A^{\beta-1}}{i} + o(A^{-2}) = -\frac{A^{\beta-1}}{i} + o(A^{-2}).$$

Таким образом, $I = I_1 + I_2 = o(A^{-2})$, и

$$\int_{\mathbf{R}} A^\beta|\rho|(1,A)\,dA = \int_{\mathbf{R}} |o(A^{-2})|\,dA < C,$$

т. е. выполняется условие теоремы 1, и квазимеру μ можно построить в пространстве непрерывных функций $(C[0,1], \mathcal{B}(C[0,1]))$.

Таким образом, в данной работе получены условия, при которых «случайный процесс», порожденный квазимерой, имеет непрерывные модификации, и эти результаты применены для квазимеры, соответствующей «тепловому» уравнению четвертого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.** Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983. 383 с.
2. **Вентцель А. Д.** Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975. 319 с.
3. **Халмош П. Р.** Теория меры. М.: ИЛ, 1953. 185 с.
4. **Эрдейи А.** Асимптотические разложения. М.: Наука, 1962. 127 с.
5. **Hochberg K. J.** F signed measure on path space related to Wiener measure // The Annals of Probability. 1978. Vol. 6, No. 3. P. 433–458.

ОБ АВТОРЕ

Парамошина Ирина Геннадьевна, асп. кафедры математики УГАТУ. Дипл. математик-инж. по прикладной математике (УГАТУ, 2001). Готовит диссертацию о самоподобных функциях под рук. проф. Ф. С. Насырова.

УДК 517.2

О. С. КЛЕПЦОВА

САМОПОДОБНЫЕ ФУНКЦИИ КАК РЕШЕНИЯ ПОТРАЕКТОРНЫХ АНАЛОГОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предложен новый способ построения самоподобных функций одной переменной, которые являются функциями фрактального типа. Показано, что самоподобные в слабом смысле функции могут быть получены способом, аналогичным методу, применяемому в теории случайных процессов для построения диффузионных процессов, т. е. как решения определенного вида интегральных уравнений, содержащих симметричные интегралы. *Самоподобные функции; локальное время; симметричный интеграл; расширенный симметричный интеграл; потраекторный аналог стохастического дифференциального уравнения*