где

$$B_2(A) = \sum_{n=0}^{2-1} i^{n-1}\phi^{(n)}(0)A^{-n-1}e^{iA*0} =$$

$$= i^{-1}\phi(0)A^{-1} + i^0\phi'(0)A^{-2} = \frac{A^{\beta-1}}{i},$$

$$C_2(A) = \lim_{t\to\infty}(\sum_{n=0}^{2-1} i^{n-1}\phi^{(n)}(t)A^{-n-1}e^{iAt}) =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}(i^{-1}\phi(t)A^{-1}e^{iAt} + i^0\phi^{'}(t)A^{-2}e^{iAt}) =$$

$$= \lim_{t\to-\infty}(\frac{A^{\beta-1}}{ie^{iA(-|t|)+t^4}} - \frac{4t^3A^{\beta-2}}{e^{t^4+iA(-|t|)}}) \to 0.$$

Следовательно,

$$I_1 = \frac{A^{\beta-1}}{i} + o(A^{-2}).$$

Для интеграла I_2 имеем

$$I_2 = \int_0^\infty e^{iA\alpha}\phi(\alpha)\,d\alpha = B_2(A) - C_2(A) + o(A^{-2}),$$

где

$$B_2(A) = \lim_{t\to\infty}(\sum_{n=0}^{2-1} i^{n-1}\phi^{(n)}(t)A^{-n-1}e^{iAt}) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}(i^{-1}\phi(t)A^{-1}e^{iAt} + i^0\phi^{'}(t)A^{-2}e^{iAt}) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}(\frac{A^{\beta-1}e^{iAt}}{ie^{t^4}} - \frac{4t^3A^{\beta-2}e^{iAt}}{e^{t^4}}) \to 0,$$

$$C_2(A) = \sum_{n=0}^{2-1} i^{n-1}\phi^{(n)}(0)A^{-n-1}e^{iA*0} =$$

$$= i^{-1}\phi(0)A^{-1} + i^0\phi^{'}(0)A^{-2} = \frac{A^{\beta-1}}{i}.$$

Следовательно,

$$I_2 = 0 - \frac{A^{\beta-1}}{i} + o(A^{-2}) = -\frac{A^{\beta-1}}{i} + o(A^{-2}).$$

Таким образом, $I = I_1 + I_2 = o(A^{-2})$, и

$$\int_{\mathbf{R}} A^\beta|\rho|(1,A)\,dA = \int_{\mathbf{R}} |o(A^{-2})|\,dA < C,$$

т. е. выполняется условие теоремы 1, и квазимеру μ можно построить в пространстве непрерывных функций $(C[0,1], \mathcal{B}(C[0,1]))$.

Таким образом, в данной работе получены условия, при которых «случайный процесс», порожденный квазимерой, имеет непрерывные модификации, и эти результаты применены для квазимеры, соответствующей «тепловому» уравнению четвертого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.** Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983. 383 с.
2. **Вентцель А. Д.** Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975. 319 с.
3. **Халмош П. Р.** Теория меры. М.: ИЛ, 1953. 185 с.
4. **Эрдейи А.** Асимптотические разложения. М.: Наука, 1962. 127 с.
5. **Hochberg K. J.** F signed measure on path space related to Wiener measure // The Annals of Probability. 1978. Vol. 6, No. 3. P. 433–458.

ОБ АВТОРЕ

Парамошина Ирина Геннадьевна, асп. кафедры математики УГАТУ. Дипл. математик-инж. по прикладной математике (УГАТУ, 2001). Готовит диссертацию о самоподобных функциях под рук. проф. Ф. С. Насырова.

УДК 517.2

О. С. КЛЕПЦОВА

САМОПОДОБНЫЕ ФУНКЦИИ КАК РЕШЕНИЯ ПОТРАЕКТОРНЫХ АНАЛОГОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предложен новый способ построения самоподобных функций одной переменной, которые являются функциями фрактального типа. Показано, что самоподобные в слабом смысле функции могут быть получены способом, аналогичным методу, применяемому в теории случайных процессов для построения диффузионных процессов, т. е. как решения определенного вида интегральных уравнений, содержащих симметричные интегралы. *Самоподобные функции; локальное время; симметричный интеграл; расширенный симметричный интеграл; потраекторный аналог стохастического дифференциального уравнения*

1. ВВЕДЕНИЕ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Понятие самоподобия является основой фрактальной геометрии. В п. 1 согласно работам Н. Коно [4,5] приведены определения самоподобных функций, а также ряд необходимых сведений; основной результат изложен в п. 2.

Определение 1.1. Вещественнозначную функцию $f(t)$, определенную на замкнутом интервале [0,1], назовем *самоподобной* с параметрами $0 < H \leqslant 1$ и $r > 1$ (r — целое), если для любого $t = t_{N,k} + h$ имеет место равенство

$$f(t) - f(t_{N,k}) = T_{N,k} \cdot r^{-NH} f(r^N h), \qquad (1.1)$$

где $t_{N,k} = kr^{-N}$, $(k = 0, 1, \dots, r^N - 1)$, $0 \leqslant h < r^{-N}$ $(N = 1, 2, \dots)$, $T_{N,k} = \{-1, 1\}$.

Лемма 1.1. *Ограниченная самоподобная функция непрерывна тогда и только тогда, когда равенство* (1.1) *справедливо для любого* $0 \leqslant h \leqslant r^{-N}$.

Пример 1.1. (*Кривая Пеано* [6,7]). Обозначим $\sigma(x) = 1 - x$, $\sigma^n = \sigma \circ \sigma^{n-1}$, $\sigma^0 = x$. Для каждого $t \in [0,1]$, $t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$ $(a_n = \{0,1,2\})$ определим функции $P_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n 3^{-n}$ и $P_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{-n}$, где $b_1 = a_1$, $b_n = \sigma^{a_2 + \dots + a_{2n-2}}(a_{2n-1})$ $(n = 2, 3, \dots)$, $c_n = \sigma^{a_1 + \dots + a_{2n-1}}(a_{2n})$ $(n = 1, 2, \dots)$. Функции $P_1(t)$ и $P_2(t)$ удовлетворяют условию самоподобия с параметрами $H = 1/2$ и $r = 9$ (см. [4]).

Определение 1.2. Пусть $f(t)$ — вещественнозначная функция, определенная на замкнутом интервале [0,1]. Тогда f называется *самоподобной в слабом смысле* с параметрами $0 < H \leqslant 1$ и $r > 1$, r — целое, если существует $K > 0$ (K будем называть *границей*) такое, что соотношение

$$|f(t) - f(t_{N,k}) - r^{-NH} T_{N,k} f(r^N h)| \leqslant K h r^{(1-H)N}$$

выполнено для всех $t_{N,k} = kr^{-N}$, $(k = 0, \dots, r^N - 1)$, $0 \leqslant t - t_{N,k} = h \leqslant r^{-N}$, где $T_{N,k} = \{1, -1\}$.

Пример 1.2. (*Функция Вейерштрасса*). Функция $W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n (1 - \cos 2\pi t b^n)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 < a < 1$, $ab > 1$, $b > 1$, b — целое) не является самоподобной [4], но самоподобна в слабом смысле с параметрами $H = -\frac{\log a}{\log b}$, $r = b$ и границей $K = \frac{2\pi}{ab-1} h b^{(1-H)N}$.

Одним из удобных инструментов изучения недифференцируемых функций и, в частности, функций фрактального типа является локальное время (см. [1]). Пусть $\lambda(.)$ — мера Лебега на σ-алгебре B_1 борелевских множеств отрезка [0, 1] и $X(s)$, $s \in [0, 1]$, — измеримая вещественнозначная функция. Если при любых $t \in [0,1]$ мера $\nu_t(\Gamma) = \int_0^t \mathbf{1}(X(s) \in \Gamma) \lambda(ds)$, $\Gamma \in B_1$, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\lambda(.)$, то производная Радона–Никодима

$$\alpha(t, u) \equiv \alpha_t(u) = \frac{d\nu_t}{d\lambda}(u), \ u \in \mathbf{R},$$

называется *локальным временем* функции $X(s)$. Если локальное время $\alpha(t, u)$ существует, то можно считать [1], что оно измеримо как функция двух переменных и является при каждом u неубывающей непрерывной справа функцией по t.

Заметим, что существование локального времени для самоподобной функции является сильным ограничением. Необходимые и достаточные условия его существования приведены в теореме 3 работы [4].

Приведем необходимые сведения о симметричных интегралах, введенных в работе [2]. Пусть $X(s)$, $s \in [0, 1]$, произвольная непрерывная функция. Рассмотрим произвольный фильтр разбиений T_n, $n \in N$, отрезка $[0, 1] : T_n = \{t_k^{(n)}\}$, $0 = t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \dots \leqslant t_{m_n}^{(n)} = 1$, $n \in N$, такой, что $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in N$, и $\lambda_n = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}| \to 0$ при $n \to \infty$. Через $X^{(n)}(s)$, $s \in [0,1]$, обозначается непрерывная ломаная, соединяющая точки $(t_k^{(n)}, X(t_k^{(n)}))$, $k = 0, 1, \dots, m_n$.

Формально обозначим

$$f_k^{(n)} = \frac{1}{t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}} \int_{t_{k-1}^{(n)}}^{t_k^{(n)}} f(s, X^{(n)}(s))\, ds;$$

$$S^{(n)}(f, X, t) = \sum_k f_k^{(n)} \mathbf{1}(t_k^{(n)} \leqslant t)(X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})$$

Определение 1.3. *Симметричным интегралом* $\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s)$ для функций вида $f(s, X(s))$, где $X(s)$, $s \in [0, 1]$, — произвольная непрерывная функция, называется

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \lim_{n \to \infty} S^{(n)}(f, X, t),$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений $T_n, n \in N$.

Определение 1.4. Будем говорить, что пара функций $X(s)$, $s \in [0,1]$, и $f(s, u)$, $s \in [0, 1]$, $u \in R$, удовлетворяют *условию* (S) *на* $[0, t]$, если:

(a) функция $X(s)$, $s \in [0, t]$, непрерывна;

(b) при почти всех u (п.в. u) функция $f(s, u)$, $s \in [0, t]$, имеет ограниченное изменение и непрерывна справа по переменной $s \in [0, t]$;

(c) справедливо равенство $\int_0^t \mathbf{1}(X(\tau) = u) \times |f|(d\tau, u) = 0$ при п.в. u, где при каждом u функция $|f|(\tau, u)$ есть полное изменение функции $f(s, u)$ по переменной s на отрезке $[0, \tau]$;

(d) полное изменение $|f|(t, u)$ функции $f(s, u)$ по переменной s на отрезке $[0, t]$ локально суммируемо по u.

Теорема 1.1. *Пусть функции* $X(s)$, $s \in [0, t]$, *и* $f(s, u)$, $s \in [0, 1]$, $u \in R$, *удовлетворяют условию*

(S) на $[0,t]$. *Пусть функция* $X(s)$ *обладает локальным временем* $\alpha(t,u)$. *Тогда симметричный интеграл* $\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s)$ *существует и вычисляется по формуле*

$$\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} f(\gamma(\alpha(t,v),v),v)\,dv - \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^{\gamma(\alpha(t,v),v)} \operatorname{sgn}(X(t)-X(\tau)) \times \mathbf{1}([X(\tau)\wedge X(t)] < v < [X(\tau)\vee X(t)]) f(d\tau,v)\,dv, \tag{1.2}$$

где $\gamma(x,u) = \inf\{s : \alpha(s,u) > x\}$, $m(t) = \min_{s\in[0,t]} X(s)$, $M(t) = \max_{s\in[0,t]} X(s)$. Здесь и ниже через $\operatorname{sgn}(u)$ обозначается знак вещественного числа u.

Построенные выше симметричные интегралы являются обобщенными интегралами Стилтьеса римановского типа по произвольным непрерывным функциям неограниченной вариации $X(s)$. Однако класс интеграндов достаточно узок.

Лемма 1.2. *Пусть* $X(s)$, $s \in [0,t]$, *— непрерывная функция с локальным временем* $\alpha(s,u)$, $f(s)$, $s \in [0,t]$, *— произвольная суммируемая функция. Тогда при п.в.* $s \in [0,t]$ *справедливо равенство* $f(s) = f^+{}_t(\xi(s),X(s))$, *где* $f^+{}_t(x,u) = f(\gamma(x,u))\mathbf{1}(\alpha(t,u) > x)$, $\xi(s) = \alpha(s,X(s))$.

Определение 1.5. Функцию $f^+{}_t(x,u)$, как и $f^+{}_t(\xi(s),X(s))$, будем называть *представлением функции* $f(s)$ на отрезке $[0,t]$.

Опираясь на лемму 1.2 для определенного класса интеграндов вида $f(\xi(s),X(s))$, можно определить расширенный симметричный интеграл. При этом класс интеграндов достаточно широк в том смысле, что для любой суммируемой на $[0,t]$ функции $f(s)$ существует представление $f(\xi(s),X(s))$, для которого расширенный симметричный интеграл определен.

Определение 1.6. Пусть $X(s), s \in [0,t]$, — непрерывная функция с локальным временем $\alpha(t,u)$. *Расширенным симметричным интегралом* $(E)\int_0^t f(s) * dX(s)$ называется интеграл по заряду:

$$(E)\int_0^t f(s) * dX(s) \equiv \equiv (E)\int_0^t f^+{}_t(\xi(s),X(s)) * dX(s) = = \int_{R^+\times R} f_t^+(x,u) G_t(dx\,du),$$

где $G_t(dx\,du)$ — заряд, однозначно определяющийся своими значениями на прямоугольниках $A\times B$:

$$G_t(A\times B) \equiv \int_{X(0)}^{X(t)} \mathbf{1}((\alpha(t,u),u) \in A\times B)\,du - \frac{1}{2}\int_R \mathbf{1}((\alpha(t,u),u) \in (A\backslash\{0\})\times B)\operatorname{sgn}(u-X(0))\,du + \frac{1}{2}\int_R \mathbf{1}(u\in B, \alpha(t,u)>0)\operatorname{sgn}(u-X(0))\,du\,\mathbf{1}(0\in A).$$

Для расширенного симметричного интеграла справедлива формула

$$(E)\int_0^t f(s) * dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} f_t^+(\alpha(t,u),u)\,du - \frac{1}{2}\int_R [f_t^+(\alpha(t,u),u) - f_t^+(0,u)]\mathbf{1}(\alpha(t,u)>0) \times \operatorname{sgn}(u-X(0))\,du. \tag{1.3}$$

2. ПОСТРОЕНИЕ САМОПОДОБНЫХ ФУНКЦИЙ КАК РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим уравнение

$$\eta(t) - \eta(0) = \int_0^t a(s,\eta(s)) * dX(s) + \int_0^t b(s,\eta(s))\,ds, \tag{2.1}$$

где первый интеграл в правой части есть симметричный интеграл по непрерывной функции $X(s)$ неограниченной вариации. *Решением* уравнения (2.1) будем называть любую функцию вида $\eta(s) = \phi(s,X(s))$, для которой имеют смысл интегралы в правой части уравнения (2.1) и которая обращает это уравнение в тождество.

В работе [2] было показано, что, если функция $\eta(s) = \phi(s,X(s))$ является решением уравнения (2.1), то функция $\phi(s,u)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{cases} \phi'_u(s,u) = a(s,\phi(s,u)); \\ \phi'_s(s,X(s)) = b(s,\phi(s,X(s))) \end{cases} \tag{2.2}$$

в предположении, что функция $a(s,\phi)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка, т.е., в силу системы (2.2) уравнение (2.1) эквивалентно следующему соотношению:

$$\phi(t,X(t)) - \phi(0,X(0)) = = \int_0^t \phi'_u(s,X(s)) * dX(s) + \int_0^t \phi'_s(s,X(s))\,ds. \tag{2.3}$$

Предположим, что функция $X(s)$, $s\in[0,1]$, самоподобна с параметрами $0 < H \le 1$, $r > 1$, и имеет локальное время $\alpha(t,u)$. Будем считать, что $\eta(0) = \phi(0,X(0)) = 0$. Докажем, что $\eta(t) = \phi(t,X(t))$ является самоподобной в слабом смысле функцией. Для этого нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть $X(s)$, $s \in [0,1]$, — самоподобная функция с параметрами $0 < H \leq 1$, $r > 1$, имеющая локальное время $\alpha(t,u)$. Тогда в приведенных выше обозначениях справедливы следующие утверждения:*

1) *Справедливо равенство* $\alpha([t_{N,k},t],u) = r^{-(1+H)N}\alpha([0,r^N h],p)$, *где* $p = \frac{u-X(t_{N,k})}{T_{N,k}r^{-NH}}$.

2) *Точка $s = r^N h$ является точкой роста справа функции $\alpha(s,u)$, т.е $\gamma(\alpha(r^N h,u),u) = r^N h$.*

Доказательство.

1. Запишем определение локального времени следующим образом:

$$\alpha([t_{N,k},t],u) = \frac{d}{du}\int\limits_{t_{N,k}}^{t} \mathbf{1}(X(s) < u)ds,$$

что верно при п. в. u. Поскольку

$$\int\limits_{t_{N,k}}^{t} \mathbf{1}(X(s) < u)\,ds = \int\limits_{t_{N,k}}^{t} \mathbf{1}(X(s) - X(t_{N,k}) < u - X(t_{N,k}))\,ds,$$

то в силу самоподобия функции $X(t)$ интеграл в правой части последнего соотношения равен

$$\int\limits_{t_{N,k}}^{t}\mathbf{1}(T_{N,k}r^{-NH}X(r^N(s-t_{N,k})) < u-X(t_{N,k}))\,ds = r^{-N}\int\limits_{0}^{r^N h} \mathbf{1}(T_{N,k}r^{-NH}X(v) < u - X(t_{N,k}))\,dv = r^{-N}\int\limits_{0}^{r^N h} \mathbf{1}\left(X(v) < \frac{u - X(t_{N,k})}{T_{N,k}r^{-NH}}\right)\,dv,$$

где $v = r^{-N}(s - t_{N,k})$. Положим

$$p = \frac{u - X(t_{N,k})}{T_{N,k}r^{-NH}}\,,$$

тогда

$$\alpha([t_{N,k},t],u) = r^{-N}\frac{d}{du}\int\limits_{0}^{r^N h} \mathbf{1}(X(v) < p)\,dv = r^{-N}r^{-NH}T_{N,k}\frac{d}{dp}\int\limits_{0}^{r^N h} \mathbf{1}(X(v) < p)\,dv.$$

Последний интеграл представляет собой локальное время на интервале $[0, r^N h]$.

2. Поскольку $\alpha(s,u)$ является неубывающей функцией по переменной s, из определения функции $\gamma(x,u)$ следует, что

$$\gamma(\alpha(t,u),u) = \int\limits_{0}^{1} \mathbf{1}(\alpha(s,u) \leqslant \alpha(t,u))\,ds = t + \int\limits_{t}^{1} \mathbf{1}(\alpha(s,u) = \alpha(t,u))\,ds. \quad (2.4)$$

С другой стороны, так как $t_{N,k} \leqslant t$, то

$$\gamma(\alpha(t,u),u) = t_{N,k} + \int\limits_{t_{N,k}}^{t} \mathbf{1}(\alpha(s,u) \leqslant \alpha(t,u))\,ds + \int\limits_{t}^{1} \mathbf{1}(\alpha(s,u) = \alpha(t,u))\,ds.$$

Ввиду первого утверждения леммы 2.1, а также свойств локального времени, первый интеграл в правой части последнего соотношения равен

$$\int\limits_{t_{N,k}}^{t} \mathbf{1}(\alpha([t_{N,k},s],u) \leqslant \alpha([t_{N,k},t],u))\,ds = \int\limits_{t_{N,k}}^{t} \mathbf{1}(\alpha(r^N(s - t_{N,k}),p) \leq \alpha(r^N h,p))\,ds.$$

Сделав замену переменных $\tau = r^N(s - t_{N,k})$, получим, что

$$\gamma(\alpha(t,u),u) = t_{N,k} + r^{-N}\gamma(\alpha(r^N h,p),p) + \int\limits_{t}^{1} \mathbf{1}(\alpha(s,u) = \alpha(t,u))\,ds. \quad (2.5)$$

Приравняв правые части соотношений (2.4) и (2.5), имеем $t = t_{N,k} + r^{-N}\gamma(\alpha(r^N h,p),p)$, что завершает доказательство леммы 2.1.

Теорема 2.1. *Пусть пара функций $f(s,u)$, $s \in [0,t]$, $u \in R$, и $X(s)$, $s \in [0,1]$, удовлетворяет условию (S) на любом отрезке $[0,t] \subset [0,1]$. Предположим, что функция $X(s)$ самоподобна с параметрами $r > 1$, $0 < H \leq 1$ и обладает локальным временем $\alpha(s,u)$, а функция $f(s,u)$ такова, что*

1) $f(0,u) = 0$ *при любом* $u \in R$;

2) *существует производная* $f'_s(s,u)$ *и* $N = \sup\{|f'_s(s,u)|,\ (s,u) \in [0,1] \times [m(1), M(1)]\} < \infty$;

3) *функция $f(s,u)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L по переменной s.*

Тогда функция $F(t) = \int\limits_0^t f(s,X(s)) * dX(s)$ *является самоподобной в слабом смысле функцией с параметрами r, H и границей* $K = 3(M(1) - m(1))(L + N)$.

Доказательство. Перепишем определение самоподобия в слабом смысле для функции $F(t)$, в силу (1.2) имеем

$$|F(t) - F(t_{N,k}) - r^{-NH}T_{N,k}F(r^N h)| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{X(0)}^{X(t_{N,k})\vee X(t)} |f(\gamma(\alpha(t,u),u),u) - f(\gamma(\alpha(t_{N,k},u),u),u)|\,du +$$
$$+ r^{-NH} \int\limits_{X(0)}^{X(r^N h)} |f(\gamma(\alpha(r^N h,u),u),u) - f(0,u)|\,du +$$
$$+ \int\limits_{m(t)}^{M(t)} \int\limits_{\gamma(\alpha(t_{N,k},u),u)}^{\gamma(\alpha(t,u),u)} |f'_s(s,u)|\,ds\,du +$$
$$+ r^{-NH} \int\limits_{m(r^N h)}^{M(r^N h)} \int\limits_{0}^{\gamma(\alpha(r^N h,u),u)} |f'_s(s,u)|\,ds\,du.$$

Поскольку функция $f(s,u)$ удовлетворяет условию Липшица, то последнее соотношение не превосходит

$$(M(1) - m(1)) \times$$
$$\times \Big[(L+N)|\gamma(\alpha(t,u),u) - \gamma(\alpha(t_{N,k},u),u)| +$$
$$+ r^{-NH}(L+N)|\gamma(\alpha(r^N h,u),u)|\Big].$$

Согласно определению функции $\gamma(x,u)$ выводим:

$$|\gamma(\alpha(t,u),u)| - \gamma(\alpha(t_{N,k},u),u)| \leqslant$$
$$\leqslant |t - t_{N,k}| + \left| \int\limits_{t_{N,k}}^{1} \mathbf{1}(\alpha(s,u) \le \alpha(t_{N,k},u))\,ds - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{t}^{1} \mathbf{1}(\alpha(s,u) \le \alpha(t,u))\,ds \right| \leqslant 2h.$$

Заметим, что $r^{(1-H)N} \geqslant 1$, так как $0 < H \leqslant 1$. Следовательно,

$$|F(t) - F(t_{N,k}) - r^{-NH}T_{N,k}F(r^N h)| \leqslant$$
$$\leqslant (M(1)-m(1))[2(L+N)h + r^{(1-H)N}(L+N)h] \leqslant$$
$$\leqslant 3(M(1)-m(1))(L+N)hr^{(1-H)N}.$$

Таким образом, *теорема доказана.*

Теорема 2.2. *Пусть функция $X(s)$, $s \in [0,1]$, самоподобна с параметрами $r > 1$, $0 < H \leqslant 1$, обладает локальным временем $\alpha(t,u)$. Если:*

1) пара функций $a(s,\phi(s,u))$ и $X(s)$ удовлетворяет условию (S) на $[0,1]$;

2) функция $a(s,\phi(s,u))$ удовлетворяет условию Липшица по переменной s с постоянной L; $a(0,\phi(0,u)) = 0$ при любом $u \in [m(1), M(1)]$;

3) Существует полная производная $a'_s(s,\phi(s,u))$, причем $N = \sup\{|a'_s(s,\phi(s,u))|\} < \infty$ при любых $(s,u) \in [0,1] \times [m(1), M(1)]$;

4) Функция $b(s,u)$ такова, что $P = \sup\{|b(s,\phi(s,X(s))|$, при $s \in [0,1]\} < \infty$,

то решение уравнения (2.1) является самоподобной в слабом смысле функцией с параметрами r, H и границей $K = \max\{3(M(1)-m(1))(L+N), 2P\}$.

Доказательство. Для функции $\phi(s,X(s))$, удовлетворяющей уравнению (2.3), определение самоподобия в слабом смысле имеет вид

$$|\phi(t,X(t)) - \phi(t_{N,k},X(t_{N,k})) -$$
$$- r^{NH}T_{N,k}\phi(r^N h, X(r^N h))| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_0^t \phi'_u(s,X(s)) * dX(s) - \right.$$
$$- \int\limits_0^{t_{N,k}} \phi'_u(s,X(s)) * dX(s) -$$
$$\left. - r^{NH}T_{N,k} \int\limits_0^{r^N h} \phi'_u(s,X(s)) * dX(s) \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{t_{N,k}}^{t} \phi'_s(s,X(s))\,ds - r^{NH}T_{N,k} \int\limits_0^{r^N h} \phi'_s(s,X(s))\,ds \right|.$$

По теореме 2.1 первое слагаемое в правой части последнего соотношения не превосходит $3(M(1)-m(1))(L+N)hr^{(1-H)N}$, а второе, очевидно, $2\sup|\phi'_s(s,u)|hr^{(1-H)N}$.

Теорема 2.3. *Пусть суммируемая функция $f(s)$, $s \in [0,1]$, удовлетворяет условию Липшица с постоянной L, $f(0) = 0$. Пусть $X(s)$, $s \in [0,1]$, самоподобная функция с параметрами $r > 1$, $0 < H \leqslant 1$, имеющая локальное время $\alpha(s,u)$. Тогда $F(t) = (E)\int_0^t f(s) * dX(s)$ является самоподобной в слабом смысле функцией с границей $K = \frac{9}{2}L(M(1)-m(1))$ и теми же параметрами r, H.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.1 с использованием формулы (1.3) вычисления расширенного симметричного интеграла.

Замечания

1) Представленный метод позволяет по одной самоподобной функции построить целый класс самоподобных в слабом смысле функций с заранее определенными свойствами.

2) Для случайного процесса броуновского движения $X(s) = X(s,\omega)$ было показано [2], что потраекторные симметричные интегралы $\int_0^t f(s) * dX(s)$ совпадают со стохастическими интегралами Стратоновича. Следовательно, в данном случае уравнение (2.1) является потраектор-

ным аналогом стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi_t = b(t, \xi_t)dt + \sigma(t, \xi_t) \cdot dX(t), \;\; \xi(0) = \xi_0,$$

решения которого являются диффузионными процессами [3]. Таким образом, представленный способ построения самоподобных функций является обобщением принятого в теории случайных процессов способа построения диффузионных процессов.

ОБ АВТОРЕ

Клещова Ольга Сергеевна, аспирант каф. математики УГАТУ. Дипл. инж. по прикладной математике (УГАТУ, 2002). Готовит диссертацию в области самоподобных функций под рук. проф. Ф. С. Насырова.

УДК 517

А. В. ВАХРАМЕЕВА

ОПИСАНИЕ ПРОСТРАНСТВ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ–ЛАПЛАСА ЭЛЕМЕНТОВ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Исследуется обобщенное преобразование Фурье–Лапласа элементов гильбертова пространства многомерных комплекснозначных последовательностей с экспоненциальным весом. Дается конструктивное описание построения прообраза такого преобразования. *Гильбертово пространство; преобразование Фурье–Лапласа; скалярное произведение; аналитическая функция*

Конструктивное описание пространств преобразований Фурье элементов функциональных пространств с различной топологией играет важную роль в решении многих задач комплексного анализа. Например, классическая теорема Пэли–Винера [2] позволяет описать пространство $L^2[-\pi;\pi]$ в терминах преобразования Фурье, заданного на пространстве l^2. Обобщения этой теоремы и их приложения изучались, в частности, в работах [1, 3–5].

Настоящая работа посвящена вопросу описания в терминах преобразования Фурье–Лапласа пространства, сопряженного к многомерному весовому пространству комплекснозначных последовательностей

$$l^2_m(h) = \left\{ \vec a = \{a_n\} : \|\vec a\|^2_m \stackrel{df}{=} \|\vec a\|^2_{l^2_m(h)} = \right.$$
$$\left. = \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2h(n)} < \infty \right\},$$

где $n = \{n_1, \dots, n_m\}$ — мультииндекс, $h(n) = \sum_{k=1}^{m} h_k(n_k)$, $\{h_1, \dots, h_m(t)\}$ — набор выпуклых функций, определенных на всей действительной оси R, таких, что $\lim_{|t|\to\infty} h_k(t) = \infty$ при $k = 1, .., m$.

Структура гильбертова пространства на $l^2_m(h)$ задается скалярным произведением $\langle \vec a, \vec b\rangle = \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} a_n \bar b_n e^{-2h(n)}$, где $\vec a, \vec b \in l^2_m(h)$.

Обозначим через H^m прямое произведение $H_1 \times ... \times H_m$, где $H_k = \left\{ y \in R : \|\vec e\|^2_{l^2(h_k)} = \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} a_n \bar b_n e^{-2h(n)} \right\}$, $k = 1, \dots, m$. Последовательность экспонент $\vec e = \{e^{-i(\mathrm{z},\mathrm{n})}\}^{\infty}_{|n|=-\infty}$, где $(z, n) = \sum_{k=1}^{m} z_k n_k$, принадлежит пространству $l^2_m(h)$ при всех $z \in R^m + iH^m \subseteq C^m$. Обобщенное преобразование Фурье–Лапласа для элемента $\vec a \in l^2_m(h)$ имеет вид

$$\hat a(z) = \langle \vec e, \vec a\rangle = \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} \bar a_n e^{-i(z,n)-2h(n)}. \qquad (1)$$

Через $\tilde h_k(y) = \sup_{t\in R}\{yt - h_k(t)\}$ будем обозначать функцию, сопряженную по Юнгу с функцией $h(t)$, через $\rho_{h_k}(y)$ — функцию, определяемую тождеством $h_k(y+\rho_{h_k}(y)) - 2h_k(y) + h_k(y-\rho_{h_k}(y)) \equiv 1$ [3]. Нам потребуется следующая лемма:

Лемма. *Пусть* $\tilde h(t) = \sum_{k=1}^{m} \tilde h_k(t_k)$, *где* $h_1, \dots, h_m$ — *набор выпуклых нелинейных функций на* R, $\rho_h(y) = \prod_{k=1}^{m} \rho_{h_k}(y_k)$, $dh'(y) = \prod_{k=1}^{m} dh'_k(y_k)$. *Тогда для любых* t, *при которых* $\tilde h(t) < \infty$, *справед-*