ным аналогом стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi_t = b(t,\xi_t)dt + \sigma(t,\xi_t)\cdot dX(t),\;\; \xi(0)=\xi_0,$$

решения которого являются диффузионными процессами [3]. Таким образом, представленный способ построения самоподобных функций является обобщением принятого в теории случайных процессов способа построения диффузионных процессов.

ОБ АВТОРЕ

Клещова Ольга Сергеевна, аспирант каф. математики УГАТУ. Дипл. инж. по прикладной математике (УГАТУ, 2002). Готовит диссертацию в области самоподобных функций под рук. проф. Ф. С. Насырова.

УДК 517

А. В. ВАХРАМЕЕВА

ОПИСАНИЕ ПРОСТРАНСТВ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ–ЛАПЛАСА ЭЛЕМЕНТОВ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Исследуется обобщенное преобразование Фурье–Лапласа элементов гильбертова пространства многомерных комплекснозначных последовательностей с экспоненциальным весом. Дается конструктивное описание построения прообраза такого преобразования. *Гильбертово пространство; преобразование Фурье–Лапласа; скалярное произведение; аналитическая функция*

Конструктивное описание пространств преобразований Фурье элементов функциональных пространств с различной топологией играет важную роль в решении многих задач комплексного анализа. Например, классическая теорема Пэли–Винера [2] позволяет описать пространство $L^2[-\pi;\pi]$ в терминах преобразования Фурье, заданного на пространстве l^2. Обобщения этой теоремы и их приложения изучались, в частности, в работах [1,3–5].

Настоящая работа посвящена вопросу описания в терминах преобразования Фурье–Лапласа пространства, сопряженного к многомерному весовому пространству комплекснозначных последовательностей

$$l^2_m(h) = \left\{ \vec{a} = \{a_n\} : \|\vec{a}\|^2_m \overset{df}{=} \|\vec{a}\|^2_{l^2_m(h)} = \right.$$
$$\left. = \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2h(n)} < \infty \right\},$$

где $n = \{n_1,\dots,n_m\}$ – мультииндекс, $h(n) = \sum\limits_{k=1}^{m} h_k(n_k)$, $\{h_1,\dots,h_m(t)\}$ – набор выпуклых функций, определенных на всей действительной оси R, таких, что $\lim_{|t|\to\infty} h_k(t) = \infty$ при $k = 1,..,m$.

Структура гильбертова пространства на $l^2_m(h)$ задается скалярным произведением $\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = \sum\limits_{|n|=-\infty}^{\infty} a_n \bar{b}_n e^{-2h(n)}$, где $\vec{a},\vec{b} \in l^2_m(h)$.

Обозначим через H^m прямое произведение $H_1 \times \ldots \times H_m$, где $H_k = \left\{ y \in R : \|\vec{e}\|^2_{l^2(h_k)} = \sum\limits_{|n|=-\infty}^{\infty} a_n \bar{b}_n e^{-2h(n)} \right\}$, $k = 1,\dots,m$. Последовательность экспонент $\vec{e} = \{e^{-i(\mathrm{z},\mathrm{n})}\}^{\infty}_{|n|=-\infty}$, где $(z,n) = \sum\limits_{k=1}^{m} z_k n_k$, принадлежит пространству $l^2_m(h)$ при всех $z \in R^m + iH^m \subseteq C^m$. Обобщенное преобразование Фурье–Лапласа для элемента $\vec{a} \in l^2_m(h)$ имеет вид

$$\hat{a}(z) = \langle \vec{e},\vec{a}\rangle = \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n e^{-i(z,n)-2h(n)}. \qquad (1)$$

Через $\tilde{h}_k(y) = \sup\limits_{t\in R}\{yt - h_k(t)\}$ будем обозначать функцию, сопряженную по Юнгу с функцией $h(t)$, через $\rho_{h_k}(y)$ – функцию, определяемую тождеством $h_k(y+\rho_{h_k}(y)) - 2h_k(y) + h_k(y-\rho_{h_k}(y)) \equiv 1$ [3]. Нам потребуется следующая лемма:

Лемма. *Пусть* $\tilde{h}(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} \tilde{h}_k(t_k)$, *где* $h_1,\dots,h_m$ *– набор выпуклых нелинейных функций на* R, $\rho_h(y) = \prod\limits_{k=1}^{m} \rho_{h_k}(y_k)$, $dh'(y) = \prod\limits_{k=1}^{m} dh'_k(y_k)$. *Тогда для любых* t, *при которых* $\tilde{h}(t) < \infty$, *справед-*

ливы неравенства

$$e^{-2m} \leqslant$$
$$\leqslant e^{-2\tilde{h}(t)} \int\limits_{R^m} e^{2(y,t)-2h(y)} \rho_h(y)\, dh'(y) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{8e^2}{e^2-1}\right)^m.$$

Доказательство леммы основано на представлении m-кратного интеграла в виде произведения простых интегралов и применении к каждому из них результата леммы 1 из [3].

Основной результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Для того, чтобы последовательность $\vec{a} \in l^2_m(h)$, необходимо и достаточно, чтобы ее обобщенное преобразование Фурье–Лапласа* (1) *удовлетворяло следующим условиям:*

1) $\hat{a}(z)$ — *аналитическая в трубчатой области* $R^m + iH^m$, 2π — *периодическая по каждому аргументу функция;*

2) $\int\limits_{[-\pi;\pi]^m} |\hat{a}(x+iy)|^2 dx \leqslant C_{\vec{a}} e^{2\tilde{h}(y)}$;

3) $$\|\hat{a}\|^2 \stackrel{df}{=} \int\limits_{H^m} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{[-\pi;\pi]^m} |\hat{a}(x+iy)|^2 dx \right\} \times$$
$$\times \exp\{-2\tilde{h}(y)\} \rho_{\tilde{h}}(y)\, d\tilde{h}'(y) < \infty.$$

При этом верна двусторонняя оценка:

$$e^{-m} \|\vec{a}\|_m \leqslant \|\hat{a}\| \leqslant \left(\frac{8e^2}{e^2-1}\right)^{\frac{m}{2}} \|\vec{a}\|_m .$$

Доказательство. В силу неравенства Коши–Буняковского

$$\hat{a}(z)| = |\langle \vec{e}, \vec{a} \rangle| \leqslant \sqrt{\langle \vec{e}, \vec{e} \rangle} \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \|\vec{e}\|_m \|\vec{a}\|_m ,$$

поэтому ряд $\sum\limits_{|n|=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n \exp\{-i(z,n) - 2h(n)\}$ сходится равномерно по z в трубчатой области $R^m + iH^m$, откуда следует аналитичность и 2π-периодичность в указанной области функции $\hat{a}(z)$.

С другой стороны, функция $\hat{a}(x+iy) = \sum\limits_{|n|=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n \exp\{(y,n) - 2h(n)\} e^{-i\langle x,n \rangle}$ является кратным рядом Фурье с коэффициентами $c_n = \bar{a}_n \exp\{(y,n) - 2h(n)\}$, причем для $y \in H^m$ имеем

$$\sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \exp\{2(y,n) - 4h(n)\} \leqslant$$
$$\leqslant e^{2\tilde{h}(y)} \|\vec{a}\|^2_{l^2(h)} < \infty.$$

Тогда в силу теоремы Рисса–Фишера и равенства Парсеваля для пространства l^2 [6]

$$\int\limits_{[-\pi;\pi]^m} |\hat{a}(x+iy)|^2 dx = (2\pi)^m \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (2\pi)^m e^{2\tilde{h}(y)} \|\vec{a}\|^2_m = C_{\vec{a}} e^{2\tilde{h}(y)}.$$

Воспользуемся последним равенством и леммой для оценки $\|\hat{a}\|^2$ сверху:

$$\int\limits_{H^m} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{[-\pi;\pi]^m} |\hat{a}(x+iy)|^2 dx \right\} e^{-2\tilde{h}(y)} \rho_{\tilde{h}}(y)\, d\tilde{h}'(y) =$$
$$= \int\limits_{H^m} \left\{ \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \exp\{2(y,n) - 4h(n)\} \right\} \times$$
$$\times e^{-2\tilde{h}(y)} \rho_{\tilde{h}}(y)\, d\tilde{h}'(y) = \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 e^{-4h(n)} \times$$
$$\times \int\limits_{H^m} \exp\{2(y,n) - 2\tilde{h}(y)\} \rho_{\tilde{h}}(y)\, d\tilde{h}'(y) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{8e^2}{e^2-1}\right)^m \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 e^{2\tilde{\tilde{h}}(n) - 4h(n)} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{8e^2}{e^2-1}\right)^m \|\vec{a}\|^2_m .$$

Так как $h_k(t)$ — выпуклые функции, то $\tilde{\tilde{h}}_k(t) = h_k(t)$, откуда следует $\tilde{\tilde{h}}(t) = h(t)$, и применение леммы дает нижнюю оценку:

$$\sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 e^{-4h(n)} \int\limits_{H^m} \exp\{2(y,n) - 2\tilde{h}(y)\} \rho_{\tilde{h}}(y)\, d\tilde{h}'(y) \geqslant$$
$$\geqslant e^{-2m} \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 e^{2\tilde{\tilde{h}}(n) - 4h(n)} = e^{-2m} \|\vec{a}\|^2_m .$$

Таким образом, необходимость выполнения условий теоремы доказана.

Докажем их достаточность. Замена $z = i \ln \omega$ отображает функцию m комплексных переменных $\hat{a}(z)$, аналитическую в области $R^m + iH^m$, в функцию $\Phi(\omega) = \hat{a}(i \ln \omega)$, аналитическую в области Рейнхарта $\Re = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m) : -\pi \leqslant \arg \omega_k < \pi,\ |\omega_k| = \exp\{y_k\},\ y_k \in H_k\}$, которая представляет собой произведение колец с центром в начале координат. Функция $\Phi(\omega)$ в области $\Re$ представима кратным рядом Лорана $\sum\limits_{|n|=-\infty}^{\infty} c_n \omega^n$, из которого при обратной замене $\omega = e^{-iz}$ получаем разложение в кратный ряд Фурье для функции $\hat{a}(z)$

$$\hat{a}(z) = \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i(z,n)}.$$

С другой стороны, ряд $\sum\limits_{|n|=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i(z,n)} = \sum\limits_{|n|=-\infty}^{\infty} c_n e^{(y,n)} e^{-i(x,n)}$, где $z = x + iy$, является кратным рядом Фурье функции действительного аргумента $f_y(x) = \hat{a}(x+iy)$, $x \in R^m$, принадлежащей пространству $L^2[-\pi;\pi]^m$ при любом $y \in H^m$ в силу условия теоремы. Тогда по формуле Парсеваля [6]

$$\sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{2(y,n)} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{[-\pi;\pi]^m} |\hat{a}(x+iy)|^2 dx < \infty,$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{H^m} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{[-\pi;\pi]^m} |\hat{a}(x+iy)|^2 dx \right\} \times e^{-2\tilde{h}(y)} \rho_{\tilde{h}}(y)\, d\tilde{h}'(y) = \int\limits_{H^m} \left\{ \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{2(y,n)} \right\} e^{-2\tilde{h}(y)} \rho_{\tilde{h}}(y)\, d\tilde{h}'(y) = \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \int\limits_{H^m} \exp\{2(y,n) - 2\tilde{h}(y)\} \rho_{\tilde{h}}(y)\, d\tilde{h}'(y).$$

Применяя лемму к правой части последнего равенства и полагая $a_n = \bar{c}_n e^{2h(n)}$, получим

$$\sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \int\limits_{H^m} \exp\{2(y,n) - 2\tilde{h}(y)\} \rho_{\tilde{h}}(y) d\tilde{h}'(y) \geqslant e^{-2m} \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{2\tilde{\tilde{h}}(n)} = e^{-2m} \|\vec{a}\|_m^2,$$

откуда следует, что последовательность $\vec{a} = \{a_n\}_{|n|=-\infty}^{\infty} \in l_m^2(h)$, что и завершает доказательство теоремы.

Таким образом, пространство обобщенных преобразований Фурье–Лапласа последовательностей из $l_m^2(h)$ изоморфно и «почти изометрично» пространству $l_m^2(h)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вахрамеева А. В.** Описание пространства, сопряженного к индуктивному пределу гильбертовых пространств последовательностей // Матер. VI Казанск. междунар. летней шк.-конф. Казань: Казанск. матем. общ-во, 2003. С. 46–47.
2. **Левин Б. Я.** Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
3. **Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С.** Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 5. С. 80–87.
4. **Напалков В. В.** Преобразование Фурье и продолжение аналитических функций // Исследование по теории приближений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1988. С. 86-91.
5. **Напалков В. В., Зайцева А. В.** Теорема Пэли–Винера для пространств последовательностей // Докл. РАН. 2000. Т. 374, № 2. С. 157–159.
6. **Эдвардс Р.** Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. М.: Мир, 1985.

ОБ АВТОРЕ

Вахрамеева Анна Владимировна, ст. преподаватель кафедры спец. глав математики УГАТУ. Дипл. инж.-математик по прикладной математике и информатике (УГАТУ, 1998). Исследования в области комплексного анализа (преобразования Фурье и уравнения свертки).

УДК 517.958+533

В. Г. ВОЛКОВ

ПОДМОДЕЛИ СПЕЦИАЛЬНО СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА ДВУХМЕРНЫХ ПОДАЛГЕБРАХ

Рассмотрены двухмерные подалгебры из оптимальной системы алгебры Ли L_{13}, допускаемой уравнениями газовой динамики. Для них вычислены инварианты и построены инвариантные подмодели, которые приведены к одному из двух канонических типов: эволюционному либо стационарному. *Уравнения газовой динамики; инвариантные решения; подалгебра; алгебра Ли; инвариантные подмодели; канонические типы*

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения газовой динамики (УГД)

$$D = \partial_t + \mathbf{u}\nabla, \quad D\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0, \qquad D\rho + \rho\,\mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \quad DS = 0, \tag{В.1}$$

где $\mathbf{u}$ — скорость, ρ — плотность, p — давление, S — энтропия, с уравнением состояния $p = f(\rho, S)$ допускают 11-параметрическую алгебру Ли L_{11} операторов. В декартовой системе координат (D) базис L_{11} имеет вид [1, 2]:

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,$$