кратным рядом Фурье функции действительного аргумента $f_y(x) = \hat{a}(x+iy)$, $x \in R^m$, принадлежащей пространству $L^2[-\pi;\pi]^m$ при любом $y \in H^m$ в силу условия теоремы. Тогда по формуле Парсеваля [6]

$$\sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{2(y,n)} = $$
$$= \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{[-\pi;\pi]^m} |\hat{a}(x+iy)|^2 dx < \infty,$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{H^m} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{[-\pi;\pi]^m} |\hat{a}(x+iy)|^2 dx \right\} \times$$
$$\times\, e^{-2\tilde{h}(y)} \rho_{\tilde{h}}(y)\, d\tilde{h}'(y) =$$
$$= \int\limits_{H^m} \left\{ \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{2(y,n)} \right\} e^{-2\tilde{h}(y)} \rho_{\tilde{h}}(y)\, d\tilde{h}'(y) =$$
$$= \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \int\limits_{H^m} \exp\{2(y,n) - 2\tilde{h}(y)\} \rho_{\tilde{h}}(y)\, d\tilde{h}'(y).$$

Применяя лемму к правой части последнего равенства и полагая $a_n = \bar{c}_n e^{2h(n)}$, получим

$$\sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \int\limits_{H^m} \exp\{2(y,n) - 2\tilde{h}(y)\} \rho_{\tilde{h}}(y) d\tilde{h}'(y) \geqslant$$
$$\geqslant e^{-2m} \sum_{|n|=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{2\tilde{\tilde{h}}(n)} = e^{-2m} \|\vec{a}\|_m^2,$$

откуда следует, что последовательность $\vec{a} = \{a_n\}_{|n|=-\infty}^{\infty} \in l_m^2(h)$, что и завершает доказательство теоремы.

Таким образом, пространство обобщенных преобразований Фурье–Лапласа последовательностей из $l_m^2(h)$ изоморфно и «почти изометрично» пространству $l_m^2(h)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вахрамеева А. В.** Описание пространства, сопряженного к индуктивному пределу гильбертовых пространств последовательностей // Матер. VI Казанск. междунар. летней шк.-конф. Казань: Казанск. матем. общ-во, 2003. С. 46–47.
2. **Левин Б. Я.** Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
3. **Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С.** Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 5. С. 80–87.
4. **Напалков В. В.** Преобразование Фурье и продолжение аналитических функций // Исследование по теории приближений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1988. С. 86-91.
5. **Напалков В. В., Зайцева А. В.** Теорема Пэли–Винера для пространств последовательностей // Докл. РАН. 2000. Т. 374, № 2. С. 157–159.
6. **Эдвардс Р.** Ряды Фурье в современном изложении. Т. 1. М.: Мир, 1985.

ОБ АВТОРЕ

Вахрамеева Анна Владимировна, ст. преподаватель кафедры спец. глав математики УГАТУ. Дипл. инж.-математик по прикладной математике и информатике (УГАТУ, 1998). Исследования в области комплексного анализа (преобразования Фурье и уравнения свертки).

УДК 517.958+533

В. Г. ВОЛКОВ

ПОДМОДЕЛИ СПЕЦИАЛЬНО СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА ДВУХМЕРНЫХ ПОДАЛГЕБРАХ

Рассмотрены двухмерные подалгебры из оптимальной системы алгебры Ли L_{13}, допускаемой уравнениями газовой динамики. Для них вычислены инварианты и построены инвариантные подмодели, которые приведены к одному из двух канонических типов: эволюционному либо стационарному. *Уравнения газовой динамики; инвариантные решения; подалгебра; алгебра Ли; инвариантные подмодели; канонические типы*

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения газовой динамики (УГД)

$$D = \partial_t + \mathbf{u}\nabla, \quad D\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0, \qquad \text{(В.1)}$$
$$D\rho + \rho\,\mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \quad DS = 0,$$

где $\mathbf{u}$ — скорость, ρ — плотность, p — давление, S — энтропия, с уравнением состояния $p = f(\rho, S)$ допускают 11-параметрическую алгебру Ли L_{11} операторов. В декартовой системе координат (D) базис L_{11} имеет вид [1, 2]:

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,$$

$$X_4 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_5 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_6 = t\partial_z + \partial_w,$$
$$X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v,$$
$$X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w,$$
$$X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u,$$
$$X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z.$$

Рассматривается уравнение состояния вида

$$p = \pm\rho^\gamma + F(S), \qquad (B.2)$$

где $+\rho^\gamma$ при $\gamma > 0$ и $-\rho^\gamma$ при $\gamma < 0$, γ — параметр, $F(S)$ — произвольная функция энтропии. Оно согласуется с фиксированным уравнением состояния для жидкости при больших давлениях и высоких температурах.

УГД с уравнением состояния (B.2) допускают дополнительные операторы:

• растяжение

$$X_{12} = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - (\overline{\gamma} - 2)\rho\partial_\rho - \overline{\gamma}p\partial_p,$$

• перенос $X_{13} = \partial_p$,

где $\overline{\gamma} = 2\gamma/(\gamma - 1)$, $\gamma \neq 1$. Вместе с L_{11} они образуют алгебру Ли L_{13}.

В цилиндрических координатах (C) $\mathbf{x} = (x, r, \theta)$, $\mathbf{u} = (U, V, W)$, $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, $u = U$, $v = V\cos\theta - W\sin\theta$, $w = V\sin\theta + W\cos\theta$ базис алгебры L_{13} таков [3]:

$$\begin{aligned}
&X_1 = \partial_x,\\
&X_2 = \cos\theta\partial_r - \sin\theta r^{-1}(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W),\\
&X_3 = \sin\theta\partial_r + \cos\theta r^{-1}(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W),\\
&X_4 = t\partial_x + \partial_U,\\
&X_5 = \cos\theta(t\partial_r - \partial_V) -\\
&\quad - \sin\theta r^{-1}t(\partial_\theta + W\partial_V - (V - rt^{-1})\partial_W),\\
&X_6 = \sin\theta(t\partial_r + \partial_V) +\\
&\quad + \cos\theta r^{-1}t(\partial_\theta + W\partial_V - (V - rt^{-1})\partial_W),\\
&X_7 = \partial_\theta,\\
&X_8 = \sin\theta(r\partial_x - x\partial_r + V\partial_U - U\partial_V) +\\
&\quad + \cos\theta(W\partial_U - U\partial_W - xr^{-1}(\partial_\theta + W\partial_r - V\partial_W)),\\
&X_9 = -\cos\theta(r\partial_x - x\partial_r + V\partial_U - U\partial_V) +\\
&\quad + \sin\theta(W\partial_U - U\partial_W - xr^{-1}(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W)),\\
&X_{10} = \partial_t,\\
&X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r,\\
&X_{12} = t\partial_t - U\partial_U - V\partial_V - W\partial_W - (\overline{\gamma} - 2)\rho\partial_\rho - \overline{\gamma}p\partial_p,\\
&X_{13} = \partial_p.
\end{aligned}$$

Для алгебры L_{13} перечислены все подалгебры [4] причем при $\gamma = -1, 1/3$ подалгебр больше чем для произвольного γ. Рассмотрим двухмерные неподобные подалгебры из оптимальной системы для L_{13}, появляющиеся только при $\gamma = -1$, $1/3$:

B.1′. $X_1 + X_2$, $aX_4 + X_{13}$, $a(\overline{\gamma} - 1) = 0$;
B.2′. X_{12}, $aX_4 + X_{13}$, $a \neq 0$;
B.3′. $X_1 + X_{12}$, $aX_4 + bX_5 + X_{13}$;
B.4′. $-X_{11} + X_{12}$, $X_1 + aX_5 + X_{13}$, $a \neq 0$;
B.1″. $aX_1 + X_{12}$, $X_{10} + X_{13}$, $a \neq 0$;
B.5′. $aX_7 - bX_{11} + X_{12}$, $X_1 + X_{13}$, $a \neq 0$;
B.6′. $aX_7 + bX_{11} + X_{12}$, $cX_4 + X_{13}$, $c^2 + (b+1)^2 \neq 0 \vee a^2 + c^2 \neq 0, c(\overline{\gamma} - 1) = 0$;
B.7′. $aX_7 + X_{12}$, $bX_4 + X_{13}$, $a \neq 0, b(\overline{\gamma} - 1) = 0$;
B.8′. $aX_7 + X_{10} - X_{11} + X_{12}$, $bX_1 + X_{13}$, $b \neq 0$;
B.2″. $bX_1 + aX_7 + X_{12}$, $X_{10} + X_{13}$, $b \neq 0$;

(B.3)

для подалгебр B.1″ и B.2″, $\overline{\gamma} = -1 \Rightarrow \gamma = 1/3$, для остальных подалгебр $\overline{\gamma} = 1 \Rightarrow \gamma = -1$, здесь параметры a и b задают серии неподобных подалгебр.

1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ О СОГЛАСОВАНИИ УРАВНЕНИЯ (B.2) С ФИКСИРОВАННЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

Уравнение (B.2) согласуется с фиксированным уравнением состояния [5]

$$p = \Phi(\rho^{-1}) + Tf(\rho^{-1}) \qquad (1.1)$$

при определенных значениях $F(S)$, $\Phi(\rho^{-1})$, $Tf(\rho^{-1})$. Здесь $\Phi(\rho^{-1})$ — потенциальная компонента давления, $Tf(\rho^{-1})$ — тепловая компонента давления, ρ^{-1} — удельный объем. Уравнение (1.1) описывает поведение реальных сред, которые по своим свойствам приближаются к твердым или жидким телам. Это возможно при больших давлениях (порядка 10^9кг/см^2) и высоких температурах (порядка $10^6 K$). Найдем значения $F(S)$, $\Phi(\rho^{-1})$, $Tf(\rho^{-1})$.

Сравнивая p в (B.2), (1.1) и исключая T по первому началу термодинамики (ρ, S — независимые параметры), получаем тождество:

$$\pm\rho^\gamma + F(S) = \Phi(\rho^{-1}) + (G'_S - F'_S\rho^{-1})f(\rho^{-1}), \qquad (1.2)$$

где $G(S)$ — определяется дополнительным опытом.

Дифференцируем (1.2) по S, получим

$$0 = -F'_S - F''_{SS}Vf(V) + G''_{SS}f(V), \qquad (1.3)$$

где $V = \rho^{-1}$.

1⁰. Пусть $F \neq 0$, тогда

$$\frac{F'_S}{F''_{SS}} = -Vf(V) + \frac{G''_{SS}}{F''_{SS}}f(V). \qquad (1.4)$$

Еще раз дифференцируем по S, получим $(\frac{F'_S}{F''_{SS}})' = (\frac{G''_{SS}}{F''_{SS}})'f(V)$. Если $\frac{G''_{SS}}{F''_{SS}} \neq 0$, то, разделяя переменные, имеем $f = \text{const} = f_0$ и после интегрирования подставляем в (1.4). Получается противоречие ($V \neq \text{const}$) с тем, что ρ, S — независимые параметры. Значит, $\frac{G''_{SS}}{F''_{SS}} = 0$, т. е.

$$G''_{SS} = k_0F''_{SS}, F'_S = k_1F''SS, \qquad (1.5)$$

а из (1.4) следует $k_1 = -Vf(V) + k_0F(V)$.

Интегрирование (1.5) при $k_1 \neq 0$ и подстановка в (1.2) дают:

$$F(S) = k_1k_2e^{\frac{S}{k_1}} + k_3,$$

$$\Phi(\rho^{-1}) = \pm\rho^\gamma + k_3 - \frac{k_4k_1}{k_0 - \rho^{-1}}, \qquad (1.6)$$

$$f(\rho^{-1}) = \frac{\rho k_1}{\rho k_0 - 1},$$

$$G(S) = k_0 k_1 k_2 e^{\frac{S}{k_1}} + k_4 S + k_5,$$

где k_j — постоянные интегрирования.

2^0. Пусть $F_{SS} = 0$ (равносильно $k_1 = 0$). Тогда $F(S) = k_1 S + k_0$ и из (1.3) получим (при $G''_{SS} \neq 0$) $\frac{k_1}{G''_{SS}} = f(V) = \text{const} = f_0$. Тогда из (1.2) следует:

$$\Phi(\rho^{-1}) = k_1 \rho^{-1} f_0 + k_0 - k_2 f_0 \pm \rho^{\gamma},$$

$$f(\rho^{-1}) = f_0, \qquad (1.7)$$

$$G(S) = \frac{k_1}{2f_0} S^2 + G_1(S) + G_0,$$

где $G_0, G_1 = \text{const}$.

3^0. Пусть $F_{SS} = 0, G_{SS} = 0$. Из (1.4) следует $F_S = 0, F(S) = F_0$. Из (1.2) получим:

$$\Phi(\rho^{-1}) = \pm \rho^{\gamma} + F_0 - G_1 f(\rho^{-1}),$$

$$G(S) = G_1(S) + G_0, \qquad (1.8)$$

где F_0, G_0, G_1 — постоянные.

Таким образом, уравнение (B.2) согласуется с (1.1), если функции $F(S)$, $f(\rho^{-1})$, $\Phi(\rho^{-1})$ представлены в одном из видов: (1.6), (1.7), (1.8).

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ

Для построения подмодели специально сжимаемой жидкости необходимо вычислить инварианты подалгебр [2, 1].

Алгоритм вычисления инвариантов заключается в следующем:

1. Подбираем систему координат, в которой будут вычислены инварианты. Если подалгебра содержит оператор вращения X_7, то удобно выбрать цилиндрические координаты; если оператора вращения нет, то удобны декартовы координаты.
2. Выписываем операторы подалгебры в удобной системе координат из списка (B.3).
3. Вводим функцию h, зависящую от 9 переменных $(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \rho, p)$, в качестве искомых инвариантов.
4. Функция h является инвариантом подалгебры $L = \langle Y_1, Y_2 \rangle$ тогда и только тогда, когда любой оператор Y подалгебры, действуя на инвариантную функцию, зануляет ее. А именно, $Y \cdot h = 0$, $Y \in L$. Подействуем оператором Y_1 базиса подалгебры L на инвариантную функцию. В результате получаем линейное однородное уравнение с частными производными 1-го порядка. Для этого уравнения записываем характеристическое уравнение, систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Предположим, что находится явно полный набор функционально независимых инвариантов (интегралов) $I^k(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \rho, \mathbf{p})$, $k = 1..8$.
5. Записываем второй оператор базиса через полученные инварианты по правилу
$$Y_2 = \xi^j \partial_{x^j} = \xi_j \frac{\partial I^k}{\partial x^j} \partial_{I^k}. \qquad (2.1)$$
6. Подействуем оставшимся оператором Y_2 на инвариантную функцию $h(I^k)$. Получаем линейное однородное уравнение с частными производными 1-го порядка. Записываем для него уравнение характеристик. Находим полный набор функционально независимых инвариантов.
7. Переходим к первоначальным переменным.

Инварианты, полученные для подалгебр из (B.3) сведены в таблицу (см. Приложение).

Пример.

В качестве примера рассмотрим подалгебру B.7′ из (B.3):

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + aX_7 + X_{12} = \\ &+ a\partial_\theta + t\partial_t - U\partial_U - V\partial_V - W\partial_W + \rho\partial_\rho - p\partial_p, \\ Y_2 &= bX_4 + X_{13} = bt\partial_x + b\partial_U + \partial_p. \end{aligned}$$

Введем инвариантную функцию $h(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \rho, p)$, $\mathbf{x} = (x, r, \theta)$, $\mathbf{u} = (U, V, W)$, удовлетворяющую уравнениям $Y_1 \cdot h = 0, Y_2 \cdot h = 0$. Второе уравнение имеет вид $bth_x + bh_U + h_p = 0$.

Запишем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{bt} = \frac{dU}{b} = \frac{dp}{1} = \frac{dr}{0} = \frac{d\theta}{0} = \frac{dV}{0} = \frac{dW}{0} = \frac{d\rho}{0} = \frac{dt}{0}.$$

Находим интегралы, которые образуют полный набор функционально независимых инвариантов: $t; \rho; W; V; \theta; r; U_1 = U - xt^{-1}; p_1 = p - x(bt)^{-1}$.

Записав второе уравнение через полученные инварианты по правилу (2.1), получим $h_{1x} = 0$. Значит, $h = h_1(t, r, \theta, V, W, \rho, p_1, U_1)$.

Первое уравнение в новых инвариантах для известных уравнений переменных имеет вид

$$\begin{aligned} &ah_{1\theta} + th_{1t} + (-U + xt^{-1})h_{1U_1} - Vh_{1V} - \\ &\quad - Wh_{1W} + \rho h_{1\rho} + (-p + x(bt)^{-1})h_{1p_1} = 0. \end{aligned}$$

Записав характеристическое уравнение и вычислив интегралы, получаем полный набор функционально независимых инвариантов, которые в первоначальных переменных имеют вид

$$r; \theta - a\ln|t|; Ut - x; Vt; Wt; \rho t^{-1}; pt - xb^{-1}. \quad (2.2)$$

3. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДМОДЕЛИ РАНГА 2

Двухмерная подалгебра имеет 5 инвариантов. Если из выражений для инвариантов определяются все искомые функции, то существует инвариантное решение. Для этого эти инварианты назначаются новыми функциями от остальных инвариантов. Остальные инварианты обязательно будут функциями независимых переменных [2].

Таблица

№	С. К.	Тип	Инварианты: $x_1, y_1, u_2, v_2, w_2, \rho_1, S_1$ t, s — для E	Подмодель (3.2) или (3.3) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b, b_1, b_2$
B.1′	D	S	$y, z, tv, tw,$ $tu - x + \ln \mid t \mid, \rho t^{-1},$ $tS - xa^{-1} + a^{-1} \ln \mid t \mid$	$a_1 = u_2, a_2 = v_2, a_3 = 1 - (a\rho_1)^{-1},$ $a_4 = -2\rho_1, a_5 = S_1 + a^{-1}(1 - w_2),$ $b_1 = b_2 = 1$
B.2′	D	S	$y, z, tv, tw,$ $tu - x, \rho t^{-1},$ $tS - xa^{-1}$	$a_1 = u_2, a_2 = v_2, a_3 = -(a\rho_1)^{-1},$ $a_4 = -2\rho_1, a_5 = S_1 - a^{-1}w_2,$ $b_1 = b_2 = 1$
B.3′	D	S	$x - ayb^{-1} - \ln \mid t \mid, z,$ $tu - ab^{-1}tv - 1, tw,$ $ab^{-1}(tu - ayb^{-1} - 1) + tv - y,$ $\rho t^{-1}, tS - ya^{-1}$	$a_1 = u_2 + a(b^2\rho_1)^{-1} + 1, a_2 = v_2\rho_1,$ $a_3 = ab^{-1}(u_2 + 1) - (b\rho_1)^{-1},$ $a_4 = -3\rho_1, a_5 = S_1 - ba^{-2}w_2 + a^{-1}u_2,$ $b_1 = a^2b^{-2} + 1, b_2 = 1$
B.4′	D	E	$t, z^{-1}(y - atx),$ $z^{-1}(v - ax - atu - sw),$ $z^{-1}[(a^2t^2 + s^2)\times$ $\times(v - ax) + atu + sw],$ $z^{-1}((a^2t^2 + s^2)w+$ $+s(v - ax) - atsu),$ $\rho z, z^{-1}(S - x)$	$a_1 = -2(1 + a^2t^2 + S^2)^{-1}[u_2(a^2t^2 - stu_2)+$ $+w_2(tu_2 - s)] = at(\rho_1)^{-1} - sp_1(\rho_1)^{-1},$ $a_2 = (1 + a^2t^2 + s^2)^{-1}[2av_2 - u_2a^3t^2-$ $-2asw_2 + (v_2 + u_2)(2a^2t + su_2)-$ $-w_2v_2 + sv_2u_2 + w_2u_2+$ $+s(u_2)^2] + at(\rho_1)^{-1} - sp_1(\rho_1)^{-1},$ $a_3 = (\rho_1)^{-1}(p_1(1 + a^2t^2 + ats)+)$ $+(1 + a^2t^2 + s^2)^{-1}[2a^2t^2w_2 - (w_2-$ $-su_2)^2t - 2sv_2 + as^2w_2] + (u_2)^2,$ $a_4 = -2\rho((w_2 - su_2)(1 + a^2t^2 + s^2))^{-1},$ $a_5 = [w_2(S_1 - s) + v_2-$ $-u_2(a^2t + S_1s)](1 + a^2t^2 + s^2)^{-1},$ $b = (1 + a^2t^2 + s^2),$ $p_1 = \rho_1{}^{-1} + S_1$
B.5′	C	E	$t, \theta + a \ln \mid t \mid,$ $r^{-1}(aV + W), r^{-1}U,$ $ar^{-1}(Wa - V), pr,$ $r^{-1}(S - x)$	$a_1 = -a(\rho_1)^{-1}(S_1 + (\rho_1)^{-1})+$ $(a(a^2 + 1))^{-1}(w_2{}^2 - a^2u_2{}^2+$ $+2u_2w_2),$ $a_2 = -(\rho_1)^{-1} - v_2(a(a^2 + 1))^{-1}\times$ $\times(au_2 - w_2),$ $a_4 = -\rho_1(a(a^2+))^{-1}(a_2u_2 - w_2),$ $a_5 = -v_2, b = a^2 + 1$

Из полученных равенств определяются все неизвестные функции. Таким образом, получается представление инвариантного решения, которое и подставляется в УГД. В результате подстановки по теореме о представлении инвариантного многообразия [6] получится система уравнений, связывающая только инварианты и новые инвариантные функции. Уравнения для инвариантов называются инвариантной подмоделью.

Для рассмотренного примера запишем инвариантную подмодель. Из инвариантов (2.2) составим равенства:

$$\theta - a\ln|t| = \theta_1,$$
$$Ut - x = U_1(r, \theta_1), \quad Vt = V_1(r, \theta_1),$$
$$Wt = W_1(r, \theta_1), \quad \rho t^{-1} = \rho_1(r, \theta_1).$$

Из этих равенств определяется представление инвариантного решения:

$$U = (U_1 + x)t^{-1}; \; V = V_1t^{-1}; \; W = W_1t^{-1};$$
$$\rho = \rho_1 t; \; p = p_1t^{-1} + x(bt)^{-1}.$$

Представление инвариантного решения для S можно получить из уравнения состояния

$$p = \pm\rho^{-1} + S \Rightarrow S = t^{-1}(x(b^{-1}) + S_1),$$

где $S_1 = p_1 - \rho^{-1}$ заменяет уравнение состояния в инвариантной подмодели.

Подстановка в УГД приводит к инвариантной подмодели:

$$D_1 = (W_1r^{-1} - a)\partial_{\theta_1} + V_1\partial_r,$$
$$D_1U_1 = -(\rho_1 b)^{-1},$$
$$D_1V_1 + p_{1r}\rho_1{}^{-1} = W_1{}^2r^{-1} + V_1,$$
$$D_1W_1 + p_{1\theta_1}(\rho_1 r)^{-1} = W_1 - V_1W_1r^{-1}, \qquad (3.1)$$

Продолжение табл.

№	С. К.	Тип	Инварианты: $x_1, y_1, u_2, v_2, w_2, \rho_1, S_1$ t, s — для E	Подмодель (3.2) или (3.3) $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b, b_1, b_2$
B.6′	C	S	$rt^{-\frac{b}{b+1}}, \theta - a(b+1)\ln\mid t\mid,$ $Vt^{\frac{b}{b+1}} - b(b+1)^{-1}x_1,$ $Wt^{\frac{b}{b+1}}(x_1)^{-1} - a(b+1)^{-1},$ $(U - xt^{-1})t^{\frac{1}{b+1}}, \rho t^{-\frac{1}{b+1}},$ $(S - x(ct)^{-1})t^{\frac{1}{b+1}}$	$a_1 = (v_2(2ax_1 - b) + u_2)(b+1)^{-1} +$ $+ {v_2}^2 x_1 + x_1(b + a^2)(b+1)^{-2},$ $a_2 = (v_2(b+1)^{-1} + a(b+1)^{-2})(1-b),$ $a_3 = w_2((b+1)^{-1} - 1) - (\rho_1 c)^{-1},$ $a_4 = -\rho_1(3b+2)(b+1)^{-1} - \rho_1 u_2(x_1)^{-1},$ $a_5 = S_1(b+1)^{-1} - w_2 c^{-1},$ $b_1 = 1, b_2 = (x_1)^{-2}$
B.7′	C	S	$r, \theta - a\ln\mid t\mid, tV,$ $tW(x_1)^{-1} - a, Ut - x,$ $\rho t^{-1}, St - xb^{-1}$	$a_1 = u_2 + x_1(v_2 + a)^2,$ $a_2 = (v_2 + a)(1 - 2u_2(x_1)^{-1}),$ $a_3 = -(\rho_1 b)^{-1}, a_4 = -\rho_1(u_2){x_1}^{-1} + 2,$ $a_5 = -w_2 b^{-1}, b_1 = 1, b_2 = (x_1)^{-2}$
B.8′	C	S	$re^t, \theta - at, Ve^t + x_1,$ $tW(x_1)^{-1} - a, Ue^t, \rho e^t,$ $(S - x(b)^{-1})e^t$	$a_1 = 2u_2 + 2x_1(v_2 + a)^2 - x_1,$ $a_2 = v_2 - a + au_2(x_1)^{-1} + u_2 v_2,$ $a_3 = w_2 - (\rho_1 b)^{-1},$ $a_4 = -\rho_1(u_2 - x_1)(x_1)^{-1},$ $a_5 = S_1 - w_2 b^{-1}, b_1 = 1, b_2 = (x_1)^{-2}$
B.1″ $a \neq 0$	D	S	$y, z, ve^{\frac{x}{a}}, we^{\frac{x}{a}}, ue^{\frac{x}{a}},$ $\rho e^{-\frac{3x}{a}}, (S - t)e^{-\frac{x}{a}}$	$a_1 = a^{-1}u_2 w_2, a_2 = a^{-1}v_2 w_2,$ $a_3 = a^{-1}({w_2}^2 - S_1(\rho_1)^{-1} - (\rho_1)^{-2}),$ $a_4 = -2a^{-1}w_2\rho_1, a_5 = -1 - a^{-1}w_2 S_1,$ $b_1 = b_2 = 1$
B.1″ $a = 0$	D	S	$x, y, z,$ $u\rho^{\frac{1}{3}}, v\rho^{\frac{1}{3}}, w\rho^{\frac{1}{3}},$ $(p - t)\rho^{-\frac{1}{3}}$	$\rho = t^3\rho_1(x, y, z),$ $\mathbf{u} = t^{-1}\mathbf{u_1}(x, y, z),$ $p = tp_1(x, y, z),$ (4.9)
B.2″	C	S	$x - ba^{-1}\theta, r,$ $Ue^{\frac{\theta}{a}} - bWe^{\frac{\theta}{a}}(y_1 a)^{-1},$ $Ve^{\frac{\theta}{a}},$ $We^{\frac{\theta}{a}} + Ue^{\frac{\theta}{a}}b(y_1 a)^{-1},$ $\rho e^{-\frac{3\theta}{a}}, (S - t)e^{-\frac{\theta}{a}}$	$a_1 = u_2(w_2 - u_2 b(y_1 a)^{-1})\times$ $\times(y_1 a(b^2 + (y_1 a)^2)^{-1}) -$ $-bp_1(y_1 a)^{-2}(\rho_1)^{-1},$ $a_2 = (w_2 - u_2 b(y_1 a)^{-1})\times$ $\times((y_1 a)^2(b^2 + (y_1 a)^2)^{-1})((y_1)^{-1}(w_2 -$ $-u_2 b(y_1 a)^{-1})((y_1 a)^2(b^2 +$ $+(y_1 a)^2)^{-1}) + v_2(y_1 a)^{-1},$ $a_3 = (w_2 - u_2 b(y_1 a)^{-1})((y_1 a)^{-1} -$ $-(b^2 + (y_1 a)^2)^{-1}(v_2(3b^2 + (y_1 a)^2)) -$ $-p_1(y_1 a\rho_1)^{-1}(b^2(y_1 a)^{-2} + 1),$ $a_4 = -\rho_1 v_2 {y_1}^{-1} - 2\rho_1(w_2 - u_2 b\times$ $\times(y_1 a)^{-1})(y_1 a(b^2 + (y_1 a)^2)^{-1}),$ $a_5 = -1 - y_1 a(b^2 + (y_1 a)^2)^{-1}(w_2 -$ $-u_2 b(y_1 a)^{-1})S_1,$ $b_1 = b^2(y_1 a)^{-2} + 1,$ $b_2 = 1, p_1 = s_1 + \rho^{\frac{1}{3}}.$

$$D_1\rho_1 + \rho_1(V_{1r} + r^{-1}W_{1\theta_1}) = -\rho_1(2 + V_1 r^{-1}),$$

$$D_1 S_1 = -U_1 b^{-1}.$$

Любую инвариантную подмодель можно привести выбором инвариантов к одному из двух канонических типов [7]:

• эволюционному (время — t инвариант подалгебры)

$$D = \partial_t + u_2\partial_s,$$

$$\begin{gathered} Du_2 + b{\rho_1}^{-1}p_{1s} = a_1, \\ Dv_2 = a_2, \\ Dw_2 = a_3, \\ D\rho_1 + \rho_1 u_{2s} = a_4 \\ DS_1 = a_5, \\ b > 0; \end{gathered} \qquad (3.2$$

• стационарному

$$
\begin{gathered}
D = u_2\partial_{x_1} + v_2\partial y_1,\\
Du_2 + b_1{\rho_1}^{-1}p_{1x_1} = a_1,\\
Dv_2 + b_2{\rho_1}^{-1}p_{1y_1} = a_2,\\
Dw_2 = a_3,\\
D\rho_1 + \rho_1(u_{2x_1} + v_{2y_1}) = a_4,\\
DS_1 = a_5,\\
b_1 > 0,\ b_2 > 0;
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

здесь a_i, b, b_i — называются коэффициентами канонических типов.

Из рассмотренных подалгебр (B.3) получилось 2 подмодели эволюционного типа, а из остальных подалгебр получилось 10 подмоделей стационарного типа.

Канонические типы инвариантных подмоделей сведены в таблицу (см. Приложение), где

- 1-й столбец — номер подалгебры,
- 2-й столбец — основная система координат, в которой рассматриваются УГД,
- 3-й столбец — канонический тип: S — стационарный, E — эволюционный,
- в 4-м столбце приведены инварианты,
- в 5-м столбике записаны коэффициенты канонического типа.

(3.1) приводится к стационарному каноническому типу заменой

$$
\begin{gathered}
r = x_1, \quad \theta - a\ln|t|, \quad u_2 = V_1,\\
v_2 = (x_1)^{-1}W_1 + a, \quad w_2 = U_1.
\end{gathered}
$$

При этом получим следующие коэффициенты канонического типа:

$$
\begin{gathered}
a_1 = u_2 + x_1(v_2 + a), \quad a_2 = (v_2 - a)(1 - 2u_2(x_1)^{-1}),\\
a_3 = 1 - (\rho b)^{-1}, \quad a_4 = -\rho_1(u_2x_1^{-1} + 2),\\
a_5 = (1 + w_2)b^{-1} + S_1,\\
b_1 = 1, \quad b_2 = x_1^{-2}.
\end{gathered}
$$

Пример приведения подалгебры B.9' к каноническому типу

Операторы подалгебры таковы:

$$
\begin{gathered}
Y_1 = aX_7 - 2X_{11} + X_{12},\\
Y_2 = bx_4 + X_{10} + X_{13},\\
b(\overline{\gamma}) = 0,\ \overline{\gamma} \neq -1.
\end{gathered}
$$

Инварианты из независимых переменных имеют вид

$$
x_1 = (x - b2^{-1}t^2)r^{-1}, \quad y_1 = \theta + a2^{-1}\ln|r|.
$$

Представление инвариантного решения записывается через новые инвариантные функции так:

$$
V = V_1 r^{\frac{1}{2}}, \quad W = W_1 r^{\frac{1}{2}},
$$

$$
\rho = \rho_1 r^{-\frac{1}{2}}, \quad p = p_1 r^{\frac{1}{2}} + t,
$$

$$
U = U_1 r^{\frac{1}{2}} + bt,
$$

где V_1, W_1, ρ, p_1, U_1 зависят от x_1, y_1.

Из уравнения состояния определяется представление решения для энтропии $S = S_1 r^{\frac{1}{2}} + t$, где $S_1 = p_1 - \rho_1{}^{-1}$.

Подстановка в УГД приводит к следующей инвариантной подмодели:

$$
\begin{aligned}
&D_1 = (U_1 - x_1V_1)\partial_{x_1} + (W_1 + a2^{-1}V_1)\partial_{y_1},\\
&D_1U_1 + {\rho_1}^{-1} = -b - 2^{-1}V_1U_1,\\
&D_1V_1 + {\rho_1}^{-1}(p_{1y_1}a2^{-1} - p_{1x_1}x_1) =\\
&\qquad = W_1^2 - p_1(2\rho_1)^{-1} - 2^{-1}V_1^2,\\
&D_1W_1 + {\rho_1}^{-1}p_{1y_1} = W_1V_1,\\
&D_1\rho_1 + \rho_1(U_{1x_1} - V_{1x_1}x_1 + V_{1y_1}a(2r)^{-1} + W_{1y_1}) =\\
&\qquad = -3V_1\rho_1 2^{-1},\\
&D_1S_1 = -1 - V_1S_1 2^{-1}.
\end{aligned}
$$

Вводятся новые инвариантные скорости по выражению для D_1:

$$
U_1 - x_1V_1 = u_2, \quad a2^{-1}V_1 + W_1 = v_2,
$$

$$
W_1 - 2a^{-1}V_1 - x_1U_1 2a^{-1},
$$

с которыми по теореме 1 из [7] получается замена:

$$
x_2 = {x_1}^2 - ay_1,\ y_2 = y_1 + 2^{-1}a\ln|x_1|,
$$

$$
u_3 = 2x_1u_2 - av_2,\ v_3 = (2x_1)^{-1}au_2 + v_2,
$$

из которой следует система (3.3), где:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -2x_2b - V_1(x_2U_1 + 2x_2(U_1 - x_1V_1) - aW_1 +\\
&\quad + V_1x_2(\rho)^{-1}) + (2x_2 - a)(W_1^2 - p_1(2\rho_1)^{-1} -\\
&\quad - 2^{-1}V_1^2) + 2(U_1 - x_1V_1)^2,\\
a_2 &= (a(2x_2)^{-1} + 1)({W_1}^2 - p_1(2\rho_1)^{-1} - 2^{-1}{V_1}^2) -\\
&\quad - ab(2x_2)^{-1} - aV_1U_1(4x_2)^{-1} +\\
&\quad + (2x_2)^{-1}a(U_1 - x_1V_1)V_1 - 2^{-1}a{x_2}^{-2} + W_1V_1,\\
a_3 &= W_1V_1 - 2a^{-1}({W_1}^2 - p_1(2\rho)^{-1} - 2^{-1}{V_1}^2) +\\
&\quad + 2x_2a^{-1}(-b - 2^{-1}V_1U_1) + 2a^{-1}(U_1 - x_1V_1)U_1,\\
a_4 &= -\frac{5}{2}\rho_1V_1,\\
a_5 &= -1 - 2^{-1}V_1S_1,\\
b_1 &= (2{x_2}^2 2^{-1}a^2)^2 + 1 + 4{x_2}^2,\\
b_2 &= \frac{a^2}{4{x_2}^2} + 1,\\
p_1 &= {\rho_1}^{-1} + S_1.
\end{aligned}
$$

4. ИНВАРИАНТНАЯ ПОДМОДЕЛЬ РАНГА 3

Для подалгебры В.1$''$ из оптимальной системы (В.3) при $a = 0$ выражения для инвариантов определяют скорость и давление, но невозможно определить плотность (см. Приложение). В этом случае можно строить регулярную частично инвариантную подмодель.

Дадим определение регулярным частично инвариантным решениям в общем случае.

Пусть для подалгебры H имеется $I_1, .., I_k$ инвариантов из независимых переменных и $J_1, .., J_l$ инвариантов из зависимых и независимых переменных. Если из инвариантов $J_1, .., J_l$ определяются все зависимые переменные, то можно строить инвариантную подмодель ранга k, назначая инварианты J_j функциями от $(I_1, .., I_k)$, т. е.

$$J_j = J_j(I_1, .., I_k), j = 1, .., l. \qquad (4.1)$$

Если же невозможно определить все независимые переменные из инвариантов J_j, то (4.1) дает представление регулярного частично инвариантного решения ранга k, дефекта σ, который равен числу неопределяемых независимых переменных, т. е. $\sigma = m - l$, где m — число зависимых переменных.

Для подалгебры В.1$''$ ранг равен 3, дефект равен 1. Рассмотрим подробнее подалгебру В.1$''$. Операторы базиса таковы:

$$Y_1 = \partial_t + \partial_p,$$

$$Y_2 = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w + 3\rho\partial_\rho + p\partial_p.$$

Инварианты из независимых переменных: x, y, z. Из остальных инвариантов, указанных в таблице (см. Приложение), получаем представление регулярного частично инвариантного решения

$$\mathbf{u} = \rho^{\frac{1}{3}}\mathbf{u_1}(x, y, z), \quad p = t + \rho^{\frac{1}{3}}p_1(x, y, z),$$
$$\rho = \rho(t, x, y, z). \qquad (4.2)$$

Подстановка в УГД дает:

$$-\frac{1}{3}\mathbf{u_1}(\rho_t + \rho^{-\frac{1}{3}}\mathbf{u_1}\cdot\nabla\rho) + \rho^{\frac{2}{3}}[(\mathbf{u_1}\cdot\nabla)\mathbf{u_1} + \nabla p_1] + \frac{1}{3}\rho^{-\frac{1}{3}}p_1\cdot\nabla\rho = 0, \quad (4.3)$$

$$\rho_t + \frac{2}{3}\rho^{-\frac{1}{3}}\mathbf{u_1}\cdot\nabla\rho + \rho^{\frac{2}{3}}\mathrm{div}\mathbf{u_1} = 0. \qquad (4.4)$$

Из уравнения состояния получим представление для энтропии.

$$S = t + \rho^{\frac{1}{3}}S_1,$$

где $S_1 = p_1 - 1$. Подстановка в $DS = 0$ дает

$$\frac{1}{3}S_1\rho^{-\frac{2}{3}}(\rho_t + \rho^{-\frac{1}{3}}\mathbf{u_1}\cdot\nabla\rho) + \mathbf{u_1}\cdot\nabla S_1 + 1 = 0. \quad (4.5)$$

Из (4.4) и (4.5) следует:

$$\frac{\mathbf{u_1}\cdot\nabla\rho}{\rho} = -9\frac{(1 + \mathbf{u_1}\cdot\nabla S_1)}{S_1} + 3\,\mathrm{div}\,\mathbf{u_1}. \qquad (4.6)$$

Тогда из (4.5) можно найти ρ_t:

$$\frac{1}{\rho}\rho_t = 3\rho^{-\frac{1}{3}}[-\,\mathrm{div}\,\mathbf{u_1} + 2S_1^{-1}(\mathbf{u_1}\cdot\nabla S_1 + 1)] \equiv \rho^{-\frac{1}{3}}B(\mathbf{x}). \quad (4.7)$$

Заменяя p_1 на $S_1 + 1$ и подставляя (4.7), (4.6) в (4.3), получим

$$\frac{1}{\rho}\cdot\nabla\rho = [-\frac{1}{S_1}\mathbf{u_1}(1 + \mathbf{u_1}\cdot\nabla S_1) - \nabla S_1 - (\mathbf{u_1}\cdot\nabla)\mathbf{u_1}]\frac{3}{S_1 + 1} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (4.8)$$

Подстановкой (4.8) в (4.6), исключаем ρ:

$$\left(\frac{\mathbf{u_1}^2}{S_1 + 1} - 3\right)(\mathbf{u_1}\cdot\nabla S_1 + 1) + \frac{S_1}{S_1 + 1}(\mathbf{u_1}\cdot\nabla)\left(S_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u_1}^2\right) = 0.$$

Приравнивая смешанные производные функции $\ln\rho$ из (4.7), (4.8), получим $\nabla B = \frac{1}{3}B\mathbf{A}$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = 0$. Из последнего равенства следует, что $\mathbf{A} = \nabla\varphi$ и $\nabla(3\ln B - \varphi) = 0 \Rightarrow 3\ln B - \varphi = 0 \Rightarrow B = e^{\frac{1}{3}\varphi}$. Из (4.8) следует $\rho = b(t)e^{\varphi}$. Тогда из (4.5) получим $b' = b^{\frac{2}{3}}$.

Интегрирование дает $b = (\frac{t}{3})^3$, где постоянная интегрирования сделана нулем с помощью переноса по t и по p, допускаемого УГД.

Итак, определяется плотность в виде $\rho = t^3\rho_1(x, y, z)$. Тогда представление (4.2) можно записать в виде $\mathbf{u} = t\mathbf{u_1}(x, y, z)$, $p = tp_1(x, y, z)$, т. е. является представлением инвариантного решения для одномерной подалгебры Y_2.

Таким образом, происходит редукция частично инвариантного решения к инвариантному:

$$(\mathbf{u_1}\cdot\nabla)\mathbf{u_1} + {\rho_1}^{-1}\cdot p_1 = \mathbf{u_1},$$
$$\mathbf{u_1}\cdot\nabla\rho_1 + \rho_1\mathrm{div}\mathbf{u_1} = -3\rho_1, \qquad (4.9)$$
$$\mathbf{u_1}\cdot S_1 = -S_1,$$

где $S_1 = p_1 - {\rho_1}^{\frac{1}{3}}$, $S = tS_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: СО АН СССР, 1962. 240 с.
2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. **Хабиров С. В.** Инвариантные решения ранга 1 в газовой динамике // Моделирование, вычисление, проектирование в условиях неопределенности – 2000: Тр. междунар. конф. Уфа: УГАТУ, 2000. С. 104–115.
4. **Хабиров С. В.** Оптимальные системы подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики. Уфа: Ин-т механики УНЦ РАН, 1998. 33 с.
5. **Станюкович К. П.** Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: ГИТТЛ, 1955. 804 с.

6. **Гюнтер Н. М.** Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. Л.–М.: ГТТИ, 1934. 359 с.
7. **Хабиров С. В.** Приведение инвариантной подмодели газовой динамики к каноническому виду // Математические заметки. 1999. Т. 66, вып. 3. С. 439–444.

ОБ АВТОРЕ

Волков Владимир Григорьевич, мл. науч. сотр. каф. математики УГАТУ. Дипл. преподаватель физики и математики (БГПУ, 2002). Исследования в области группового анализа дифференциальных уравнений.

УДК 517.958: 531.72

В. А. КРАСНОВ, Р. А. ХАБИБУЛЛИН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОПРОВОДНОСТИ НЕФТЯНОГО ПЛАСТА ПРИ ПОСТРОЕНИИ ПОЛЕЙ ПЛАСТОВЫХ ДАВЛЕНИЙ В РАМКАХ МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Проблема определения фильтрационных свойств нефтяного пласта является одной из актуальнейших в процессе планирования, разработки и управления нефтяным пластом. В статье предложен алгоритм оценки поля гидропроводности нефтяного пласта. Алгоритм базируется на методе полуаналитических решений для модели стационарной фильтрации однородной жидкости в неоднородном пласте. Использование поля гидропроводности пласта, определенного при помощи алгоритма, позволяет добиться разумного согласования между расчетными и фактическими данными при моделировании процессов нефтедобычи, а также повысить точность расчета распределения пластовых давлений в нефтяном пласте. *Моделирование процессов нефтедобычи; фильтрация однородной жидкости; стационарная модель*

ВВЕДЕНИЕ

Исходной задачей является получение распределения давления в неоднородном нефтяном пласте переменной толщины, из которого производится отбор пластовой жидкости добывающими скважинами и в который производится закачка воды нагнетательными скважинами. В используемых для решения указанной задачи математических моделях геофизические свойства пласта (проницаемость k и толщина h) и коэффициент динамической вязкости пластовой жидкости μ оказываются связанными в единый комплекс kh/μ — гидропроводность пласта. Структура получаемого в ходе решения задачи распределения давления в пласте оказывается такова, что давление в любой точке пласта зависит от значений гидропроводности в окрестности каждой скважины и дебита этой скважины. Поэтому точность получаемого решения напрямую зависит от того, насколько точно известны значения гидропроводности, а также от точности замеров дебитов каждой скважины. Однако, как показывает практика, точность определения геофизических параметров пласта не очень высока – погрешность может составлять не только десятки, но и сотню процентов. Более высокую точность имеют замеры дебитов скважин, однако и в данном случае погрешность достигает нескольких десятков процентов, особенно на нагнетательных скважинах. Поэтому получаемые в результате прямых расчетов значения давления в пласте оказываются нереальными в случае, когда в качестве исходной информации используются непосредственно экспериментально измеренные значения параметров. Естественно, возникает необходимость улучшения процесса решения. Достичь этого можно, во-первых, путем улучшения качества входной информации и, во-вторых, корректировкой расчетной модели, заключающейся в увеличении ее степеней свободы путем введения некоторых дополнительных управляющих факторов.

Представляется рациональным провести корректировку экспериментально определенных величин в рамках используемых моделей путем введения поправочных множителей α к значениям гидропроводности [1]. Эти поправочные множители и играют роль факторов, управляющих процессом решения. Чем больше от единицы отличается значение α, тем сильнее управляющее воздействие. Очевидно, что чем точнее произведены измерения, тем ближе к единице должно быть численное значение α. Численные значения корректирующих множителей могут непосредственно задаваться пользователем на основании проводимых им экспертных оценок либо определяться в результате расчета на основании некоторых вычислительных алгоритмов. Следовательно, возникает задача: составить вычислительный алгоритм для определения, в рамках выбранной мате-