6. **Гюнтер Н. М.** Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. Л.–М.: ГТТИ, 1934. 359 с.
7. **Хабиров С. В.** Приведение инвариантной подмодели газовой динамики к каноническому виду // Математические заметки. 1999. Т. 66, вып. 3. С. 439–444.

ОБ АВТОРЕ

Волков Владимир Григорьевич, мл. науч. сотр. каф. математики УГАТУ. Дипл. преподаватель физики и математики (БГПУ, 2002). Исследования в области группового анализа дифференциальных уравнений.

УДК 517.958: 531.72

В. А. КРАСНОВ, Р. А. ХАБИБУЛЛИН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОПРОВОДНОСТИ НЕФТЯНОГО ПЛАСТА ПРИ ПОСТРОЕНИИ ПОЛЕЙ ПЛАСТОВЫХ ДАВЛЕНИЙ В РАМКАХ МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Проблема определения фильтрационных свойств нефтяного пласта является одной из актуальнейших в процессе планирования, разработки и управления нефтяным пластом. В статье предложен алгоритм оценки поля гидропроводности нефтяного пласта. Алгоритм базируется на методе полуаналитических решений для модели стационарной фильтрации однородной жидкости в неоднородном пласте. Использование поля гидропроводности пласта, определенного при помощи алгоритма, позволяет добиться разумного согласования между расчетными и фактическими данными при моделировании процессов нефтедобычи, а также повысить точность расчета распределения пластовых давлений в нефтяном пласте. *Моделирование процессов нефтедобычи; фильтрация однородной жидкости; стационарная модель*

ВВЕДЕНИЕ

Исходной задачей является получение распределения давления в неоднородном нефтяном пласте переменной толщины, из которого производится отбор пластовой жидкости добывающими скважинами и в который производится закачка воды нагнетательными скважинами. В используемых для решения указанной задачи математических моделях геофизические свойства пласта (проницаемость k и толщина h) и коэффициент динамической вязкости пластовой жидкости μ оказываются связанными в единый комплекс kh/μ — гидропроводность пласта. Структура получаемого в ходе решения задачи распределения давления в пласте оказывается такова, что давление в любой точке пласта зависит от значений гидропроводности в окрестности каждой скважины и дебита этой скважины. Поэтому точность получаемого решения напрямую зависит от того, насколько точно известны значения гидропроводности, а также от точности замеров дебитов каждой скважины. Однако, как показывает практика, точность определения геофизических параметров пласта не очень высока – погрешность может составлять не только десятки, но и сотню процентов. Более высокую точность имеют замеры дебитов скважин, однако и в данном случае погрешность достигает нескольких десятков процентов, особенно на нагнетательных скважинах. Поэтому получаемые в результате прямых расчетов значения давления в пласте оказываются нереальными в случае, когда в качестве исходной информации используются непосредственно экспериментально измеренные значения параметров. Естественно, возникает необходимость улучшения процесса решения. Достичь этого можно, во-первых, путем улучшения качества входной информации и, во-вторых, корректировкой расчетной модели, заключающейся в увеличении ее степеней свободы путем введения некоторых дополнительных управляющих факторов.

Представляется рациональным провести корректировку экспериментально определенных величин в рамках используемых моделей путем введения поправочных множителей α к значениям гидропроводности [1]. Эти поправочные множители и играют роль факторов, управляющих процессом решения. Чем больше от единицы отличается значение α, тем сильнее управляющее воздействие. Очевидно, что чем точнее произведены измерения, тем ближе к единице должно быть численное значение α. Численные значения корректирующих множителей могут непосредственно задаваться пользователем на основании проводимых им экспертных оценок либо определяться в результате расчета на основании некоторых вычислительных алгоритмов. Следовательно, возникает задача: составить вычислительный алгоритм для определения, в рамках выбранной математической модели, численных значений поправочных множителей α для приближенно известных значений гидропроводности пласта, исходя из условия получения распределения давления в пласте, соответствующего с заданной степенью точности фактическим данным о значениях давления в некоторых точках пласта в определенные моменты времени. В статье предлагается решение этой задачи в рамках модели стационарной фильтрации однородной жидкости. Построен алгоритм, реализующий методику нахождения временного ряда корректирующих множителей, и проведены расчеты на данных некоторых месторождений Западной Сибири, которые показали, что использование корректировки гидропроводности пласта позволяет с достаточной степенью точности согласовывать весь комплекс промысловых параметров. Это резко увеличивает достоверность расчетов.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОПРОВОДНОСТИ ПЛАСТА НА ОСНОВЕ ФОРМУЛЫ ДЮПЮИ

Простейшей стационарной моделью, которая может быть использована в задаче определения гидропроводности пласта, является модель, основанная на формуле Дюпюи:

$$p(r) = p_{\text{к}} + \frac{\mu_i}{2\pi k_i h_i} Q_i \ln\frac{r}{R_{\text{к}}}.$$

Здесь p — давление в пласте на расстоянии r от скважины i с дебитом Q_i, $p_{\text{к}}$ — давление на внешнем контуре радиуса $R_{\text{к}}$. Таким образом, считается, что поле давления в окрестности скважины определяется только характеристиками самой скважины и геологией пласта.

Несмотря на очевидные недостатки, данная модель может использоваться для получения первых приближений искомых значений управляющих факторов α и позволяет судить об их порядках. Кроме того, данная модель оказывается весьма эффективна для обработки экспериментальных данных, выполняемой в блоке отбраковки.

Пусть r_c и $r_{\text{пл}}$ — расстояния от скважины, которым соответствуют фактические данные о величине забойного $p^{\text{з}}$ и пластового $p^{\text{пл}}$ давлений соответственно. Тогда с учетом поправочного коэффициента α_i для i-й скважины из формулы Дюпюи имеем

$$\begin{aligned} p_i^{\text{з}} &= p_{\text{к}} + \alpha_i \frac{\mu_i}{2\pi k_i h_i} Q_i \ln\frac{r_c}{R_{\text{к}}}, \\ p_i^{\text{пл}} &= p_{\text{к}} + \alpha_i \frac{\mu_i}{2\pi k_i h_i} Q_i \ln\frac{r_{\text{пл}}}{R_{\text{к}}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Если значения контурного давления и радиуса контура известны, то при наличии замера забойного либо пластового давления значения α_i могут быть рассчитаны явно:

$$\alpha_i = \frac{p_i^{\text{з}} - p_{\text{к}}}{\frac{\mu_i}{2\pi k_i h_i} Q_i \ln\frac{r_c}{R_{\text{к}}}}, \quad \alpha_i = \frac{p_i^{\text{пл}} - p_{\text{к}}}{\frac{\mu_i}{2\pi k_i h_i} Q_i \ln\frac{r_{\text{пл}}}{R_{\text{к}}}}. \tag{2}$$

Если имеется несколько замеров давлений в одном месяце, то по каждому из них на основании формул (2) рассчитываются свои значения α_i, а за окончательное α_i выбирается среднее арифметическое всех найденных.

Сложность практического использования формул (2) состоит в том, что в них входят значения радиуса внешнего контура и давления на нем, которые, как правило, неизвестны и сами подлежат определению. Ситуация значительно упрощается, если в одном месяце одновременно существуют замеры как пластового, так и забойного давлений. В этом случае получаем систему уравнений (1), из которой неизвестные контурные параметры могут быть легко исключены:

$$p_i^{\text{пл}} - p_i^{\text{з}} = \alpha_i \frac{\mu_i}{2\pi k_i h_i} Q_i \ln\frac{r_{\text{пл}}}{r_c}.$$

Отсюда для искомых коэффициентов α_i получаем

$$\alpha_i = \frac{p_i^{\text{пл}} - p_i^{\text{з}}}{\frac{\mu_i}{2\pi k_i h_i} Q_i \ln\frac{r_{\text{пл}}}{r_c}}. \tag{3}$$

В общем случае значения поправочных коэффициентов α_i могут изменяться с течением времени, что обусловлено как изменением со временем свойств пластовой жидкости, так и переменной точностью определения дебитов. Подставляя в (3) значения замеров давления и дебитов в различные моменты времени, получаем временной ряд значений α_i, который в дальнейшем при необходимости может быть подвергнут дополнительной статистической обработке. Часто с достаточной для практических целей точностью можно полагать, что значения α_i остаются неизменными в течение некоторого промежутка времени. Тогда получающийся по (3) временной ряд α_i может быть аппроксимирован кусочно-постоянной функцией.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОПРОВОДНОСТИ ПЛАСТА С УЧЕТОМ ВЗАИМОВЛИЯНИЯ СКВАЖИН

Теперь рассмотрим задачу определения гидропроводности пласта в рамках стационарной модели с учетом влияния всех скважин месторождения на давление в любой точке пласта. При этом будем полагать, что пласт всюду проницаем для пластовой жидкости.

В этом случае забойное и пластовое давления для i-й скважины в текущий момент времени будут определяться соответственно по следующим формулам:

$$\begin{aligned} p_i^{\text{з}} = p_{\text{к}} &+ \alpha_i \frac{\mu_i}{2\pi k_i h_i} Q_i \left(\ln\frac{r_c}{R_{\text{к}}} - S_i\right) + \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \alpha_j \frac{\mu_j}{2\pi k_j h_j} Q_j \ln\frac{r_{ij}}{R_{\text{к}}}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$p_i^{\text{пл}} = p_{\text{к}} + \alpha_i \frac{\mu_i}{2\pi k_i h_i} Q_i \ln \frac{r_{\text{пл}}}{R_{\text{к}}} + \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \alpha_j \frac{\mu_j}{2\pi k_j h_j} Q_j \ln \frac{r_{ij}}{R_{\text{к}}}. \quad (5)$$

Здесь N — общее количество скважин на пласте, $p_{\text{к}}$ и $R_{\text{к}}$ — как и ранее, давление на внешнем контуре и радиус этого контура, Q_i — дебит i-й скважины в данный момент времени, r_{ij} — расстояние между скважинами i и j, S_i — скин i-й скважины, учитывающий отличие геофизических свойств пласта в непосредственной близости от скважины.

Неизвестными величинами являются значения управляющих факторов α_i, скин-факторы S_i и значение контурного давления $p_{\text{к}}$. При этом величина радиуса контура $R_{\text{к}}$ считается известной. Таким образом, общее число неизвестных равно $2N+1$ и, соответственно, для их определения требуется построить систему не менее чем из $2N+1$ уравнений. Эта система будет состоять из уравнений вида (4) и (5). Процесс формирования исходной системы сводится к следующему.

1) Задается момент времени τ, в который необходимо знать значения искомых величин α_i, S_i, $p_{\text{к}}$, и ширина временного интервала $\Delta\tau$. На интервале $(\tau - \Delta\tau/2, \tau + \Delta\tau/2)$ величины α_i, S_i, p_k считаются постоянными.

2) Для выбранного интервала определяется общее количество измерений давления на всех скважинах M_Σ. Если $M_\Sigma < 2N+1$, то имеющейся информации оказывается недостаточно для определения всех неизвестных. В этом случае временной интервал должен быть изменен (например, расширен за счет увеличения $\Delta\tau$).

3) На пласте существуют скважины двух типов: добывающие и нагнетательные. На каждой скважине могут быть сделаны замеры пластового и забойного давлений. Обозначим через M_m ($m = 1, 2, 3, 4$) общее количество замеров данного вида давления на всех скважинах определенного типа в выбранный интервал времени. Правило соответствия индексов приведено в таблице.

Таблица

	Добывающие скважины	Нагнетательные скважины
$p^{з}$	M_1	M_3
$p^{\text{пл}}$	M_2	M_4

Очевидно, что

$$\sum_{m=1}^{4} M_i = M_\Sigma.$$

4) На основании уравнений (4) и (5) формируется следующая система 4-х матричных уравнений (каждое из уравнений соответствует определенной группе замеров таблицы):

$$\begin{aligned} A_1 z = Y_1, \quad A_2 z = Y_2, \\ A_3 z = Y_3, \quad A_4 z = Y_4. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь z — вектор-столбец неизвестных размерности $((2N+1) \times 1)$, имеющий структуру

$$z = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{N_{\text{д}}}, \alpha_{N_{\text{д}}+1}, ..., \alpha_N, \\ \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{N_{\text{д}}}, \beta_{N_{\text{д}}+1}, ..., \beta_N, p_{\text{к}})^T,$$

где $\beta_i = \alpha_i S_i$, $i = 1, \ldots, N$, $N_{\text{д}}$ — общее количество добывающих скважин.

При построении матриц предполагается, что номера всех скважин упорядочены по группам: сначала идут все добывающие и им соответствующие номера от 1 до $N_{\text{д}}$, а затем все нагнетательные, которым соответствуют номера от $N_{\text{д}+1}$ до N. В системе (6) матрицы A_m имеют размерность $(M_m \times (2N+1))$, а вектор-столбцы Y_m — $(M_m \times 1)$ $(m = 1, 2, 3, 4)$.

В (6) вектор-столбцы Y_m содержат измерения давлений: Y_1 состоит из замеров забойных давлений $p^{з}$ на добывающих скважинах в рассматриваемый временной интервал $(\tau - \Delta\tau/2, \tau + \Delta\tau/2)$, Y_2 – из замеров $p^{\text{пл}}$ на добывающих скважинах, Y_3 — из $p^{з}$ на нагнетательных и Y_4 — из $p^{\text{пл}}$ на нагнетательных.

Каждая из матриц A_m имеет следующую блочную структуру:

$$A_m = \left.\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} | & & | \\ | & C_m & | \\ | & & | \end{matrix}}_{N\text{столбцов}} & \underbrace{\begin{matrix} & B_m & | \end{matrix}}_{N\text{столбцов}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}}_{1} \end{pmatrix}\right\} M_m \text{ строк}$$

Пусть k_m — текущий номер замера типа m $(m = 1, 2, 3, 4)$. Элементами матриц C_m являются комплексы $c_{k_m j} = \frac{\mu_j}{2\pi k_j h_j} Q_j^{k_m} \ln \frac{r_{ij}}{R_{\text{к}}}$ ($r_{ii} = r_c$ при $m = 1{,}3$ и $r_{ii} = r_{\text{пл}}$ при $m = 2{,}4$): $C_m = \{c_{k_m j}\}, k_m = 1, \ldots, M_m; j = 1, \ldots, N$, где i — номер скважины, на которой произведен замер с номером k_m, $Q_j^{k_m}$ — дебит j-й скважины в тот месяц, когда выполнен замер с номером k_m.

Матрицы B_2 и B_4 — нулевые, поскольку уравнения (5) для пластовых давлений не содержат скин-факторов.

Матрицы B_1 и B_3 имеют структуру следующего вида: каждая строка b_{k_m} этих матриц содержит лишь один ненулевой элемент

$$b_{k_m} = \left(0 \ldots 0 \; -\frac{\mu_i}{2\pi k_i h_i} Q_i^{k_m} \; 0 \ldots 0\right), \quad m = 1, 3.$$

Построенная таким образом система уравнений (6) является исходной для определения искомых величин α_i, S_i, $p_{\text{к}}$, объединенных теперь в вектор z. В дальнейшем через L_1 обозначим число оставшихся для идентификации значений α_i на добывающих скважинах, L_2 — число оставшихся для идентификации значений α_i на нагнетательных скважинах, L_3 — число оставшихся для идентификации значений β_i на добывающих скважинах, L_4 — число оставшихся для идентификации значений β_i на нагнетательных скважинах. Таким образом, $L = 1 + \sum_{m=1}^{4} L_m$.

Теперь перейдем непосредственно к нахождению решения системы (6). В общем случае эта система будет переопределенной и, как правило, несовместной. Поэтому для ее решения необходимо применять статистический подход. Кроме того, для получения устойчивого решения будем использовать метод регуляризации [2].

Пусть каждый замер давления обладает своим весовым коэффициентом ρ_{k_m} ($k_m = 1, ..., M_m$, $m = 1, 2, 3, 4$), характеризующим степень доверия к данному замеру. Пусть, кроме того, имеется некоторая априорная информация в виде первых приближений искомых величин — вектор-столбец $z_0 = (\alpha_{1_0}, ..., \alpha_{N_0}, \beta_{1_0}, ..., \beta_{N_0}, p_{k_0})$(индекс «0» обозначает начальное приближение).

Тогда сглаживающий функционал метода регуляризации для системы (6) будет иметь вид

$$\Phi(z) = \delta_1 \|A_1 z - Y_1\|^2_{R_1} + \delta_2 \|A_2 z - Y_2\|^2_{R_2} + \\ + \delta_3 \|A_3 z - Y_3\|^2_{R_3} + \delta_4 \|A_4 z - Y_4\|^2_{R_4} + \\ + \gamma_1 \|z - z_0\|^2_{\text{доб.}} + \gamma_2 \|z - z_0\|^2_{\text{нагн.}}, \quad (7)$$

где

$$\|A_m z - Y_m\|^2_{R_m} = \sum_{k_m=1}^{M_m} \rho_{k_m} \left(y_{k_m} - \sum_{j=1}^{L} a^m_{ij} z_j \right)^2,$$

$$Y_m = \{y_{k_m}\}, \quad k_m = 1, \dots, M_m, \quad A_m = \{a^m_{ij}\}, \\ i = 1, \dots, M_m, \quad j = 1, \dots, L, \quad m = 1, 2, 3, 4;$$

$R_m = \operatorname{diag}\{\rho_{k_m}\}$ — диагональная матрица весов, δ_m ($m = 1, 2, 3, 4$) — весовые коэффициенты групп измерений, γ_1 и γ_2 — параметры регуляризации для добывающих и нагнетательных типов скважин.

Минимизация функционала (7) приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$Az = Y, \quad (8)$$

где

$$A = \delta_1 A_1^T R_1 A_1 + \delta_2 A_2^T R_2 A_2 + \\ + \delta_3 A_3^T R_3 A_3 + \delta_4 A_4^T R_4 A_4 + \Gamma,$$

$$Y = \delta_1 A_1^T R_1 Y_1 + \delta_2 A_2^T R_2 Y_2 + \\ + \delta_3 A_3^T R_3 Y_3 + \delta_4 A_4^T R_4 Y_4 + \Gamma z_0,$$

$$\Gamma = \operatorname{diag}\Big(\underbrace{\gamma_1, \gamma_1, ..., \gamma_1}_{L_1}, \underbrace{\gamma_2, \gamma_2, ..., \gamma_2}_{L_2}, \\ \underbrace{\gamma_1, \gamma_1, ..., \gamma_1}_{L_3}, \underbrace{\gamma_2, \gamma_2, ..., \gamma_2}_{L_4}, \underbrace{0}_{1}\Big).$$

Здесь матрица A имеет размерность ($L \times L$), а вектор-столбец Y — ($L \times 1$). Отметим, что по построению матрица A является симметричной.

Решение системы (8) далее может быть найдено с помощью любого метода решения систем линейных алгебраических уравнений. Поиск ее решения может оказаться итерационным относительно значений параметров регуляризации: как правило, проводится решение системы (8) для различных значений параметров регуляризации γ_1 и γ_2 и затем в качестве окончательного выбирается то, которое удовлетворяет принципу невязки.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОПРОВОДНОСТИ ПЛАСТА НА ОСНОВАНИИ ДАННЫХ О ЗНАЧЕНИЯХ ПЛАСТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

На практике часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда необходимо в первую очередь согласовать значения пластовых давлений, а для согласования забойных использовать скин-фактор. В этом случае поправочные множители α_i определяются только по замерам пластовых давлений и соответствующая система строится на основании зависимости (5).

Процедура построения системы полностью аналогична описанной в предыдущем пункте. В данном случае неизвестными являются значения поправочных коэффициентов α_i и значение контурного давления p_k. Общее число неизвестных равно, таким образом, $N + 1$.

Искомая система может быть получена как частный случай системы (6), в которой остаются лишь второе и четвертое уравнения:

$$\begin{cases} A_2 z = Y_2, \\ A_4 z = Y_4, \end{cases}$$

где вектор-столбец неизвестных принимает теперь вид $z = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{N_д}, \alpha_{N_д+1}, ..., \alpha_N, p_к)^T$, а матрицы A_mимеют размерность ($M_m \times L$), $L = L_1 + L_2 + 1$.

Функционал (7) преобразуется теперь к виду

$$\Phi(z) = \delta_2 \|A_2 z - Y_2\|^2_{R_2} + \delta_4 \|A_4 z - Y_4\|^2_{R_4} + \\ + \gamma_1 \|z - z_0\|^2_{\text{доб.}} + \gamma_2 \|z - z_0\|^2_{\text{нагн.}}, \quad (9)$$

где вектор начального приближения имеет вид $z_0 = (\alpha_{1_0}, ..., \alpha_{N_0}, p_{к_0})$.

Минимизация (9) приводит к системе вида (8), в которой

$$A = \delta_2 A_2^T R_2 A_2 + \delta_4 A_4^T R_4 A_4 + \Gamma, \\ Y = \delta_2 A_2^T R_2 Y_2 + \delta_4 A_4^T R_4 Y_4 + \Gamma z_0, \\ \Gamma = \operatorname{diag}\Big(\underbrace{\gamma_1, \gamma_1, ..., \gamma_1}_{L_1}, \underbrace{\gamma_2, \gamma_2, ..., \gamma_2}_{L_2}, \underbrace{0}_{1}\Big).$$

После того как решением системы (8) найдены значения поправочных коэффициентов α_i и контурного давления $p_{\text{к}}$, из формулы (4) по известным замерам забойных давлений могут быть явным образом найдены значения скин-факторов:

$$S_i = \ln\frac{r_c}{R_{\text{к}}} + \frac{p_{\text{к}} - p_i^{\text{з}} + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \alpha_j \frac{\mu_j}{2\pi k_j h_j} Q_j \ln\frac{r_{ij}}{R_{\text{к}}}}{\alpha_i \frac{\mu_i}{2\pi k_i h_i} Q_i}\,.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемый алгоритм для определения гидропроводности нефтяного пласта из условия получения распределения давления в пласте, соответствующего с заданной степенью точности фактическим данным о значениях давления в некоторых точках пласта в определенные моменты времени, позволяет проводить корректировку текущих фильтрационно-емкостных свойств пласта. Это резко увеличивает достоверность расчетов при нахождении полей давлений в пласте. Расчеты, проведенные для некоторых месторождений Западной Сибири, показали эффективность предлагаемого алгоритма. Кроме того, его использование значительно упрощает адаптацию модели к истории разработки месторождения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Краснов В. А., Хабибуллин Р. А.** Решение обратной задачи о восстановлении фильтрационно-емкостных свойств нефтяного пласта по истории замеров давления и истории эксплуатации скважин // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2002. № 1 (9). С. 214–215.
2. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.

ОБ АВТОРАХ

Краснов Виталий Александрович, мл. науч. сотр. каф. математики УГАТУ. Дипл. инж.-математик по прикладной математике (УГАТУ, 2000). Исследования в области группового анализа дифференциальных уравнений, гидродинамического моделирования нефтяных резервуаров.

Хабибуллин Ринат Альфредович, аспирант той же кафедры. Дипл. инж.-математик по прикладной математике (УГАТУ, 2000). Работает над диссертацией в области математического моделирования процессов нефтедобычи.

УДК 519.8

А. В. ЧИГЛИНЦЕВ

АЛГОРИТМЫ УПАКОВКИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПРЕДМЕТОВ НА ЛИСТЫ

Рассматривается задача упаковки прямоугольных предметов на прямоугольные листы заданной длины и ширины (*2D Bin Packing Problem*, 2D BPP). Предложен способ формирования блочной структуры упаковки. Она использовалась нами ранее при разработке генетического алгоритма решения задачи упаковки в полубесконечную полосу, 1.5D BPP [1]. Приведены другие эвристические алгоритмы. *Исследование операций; NP-трудные задачи; генетический алгоритм; прямоугольная упаковка*

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача ортогональной упаковки прямоугольных предметов на прямоугольные листы заданных размеров. Задачи прямоугольной упаковки являются NP-трудными. Поэтому для их решения применяются эвристические алгоритмы полиномиальной сложности, что позволяет получать рациональные упаковки за приемлемое время. Задача имеет многочисленные приложения: негильотинный прямоугольный раскрой в машиностроении; размещение элементов электронных схем; загрузки транспорта; распределение двухмерного производственного ресурса; ряд задач планирования занятости и другие.

Постановка задачи. Имеется неограниченное количество прямоугольных листов заданной ширины W и длины L, а также набор из m прямоугольных предметов (элементов) заданных размеров (w_i, l_i) $(i = 1..m)$. Повороты прямоугольников запрещены. Требуется упаковать (разместить) предметы на листы при следующих условиях:

• ребра упакованных предметов параллельны ребрам листов;

• упакованные предметы не пересекаются друг с другом;

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 01-01-00510