9. **Норенков И. П.** Эвристики и их комбинации в генетических методах дискретной оптимизации // Информационные технологии. 1999. № 1. С. 2–7.


### ОБ АВТОРЕ

**Чиглинцев Артём Владимирович,** аспирант каф. вычислительной математики и кибернетики УГАТУ. Дипл. экономист-математик (УГАТУ, 2001). Готовит диссертацию в обл. алгоритмов оптимизации в задачах раскроя и упаковки прямоугольных предметов под рук. проф. Э. А. Мухачевой.


УДК 519.21

А. В. ЗАХАРОВ

# ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ КВАНТИЗАЦИИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В АППРОКСИМАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

Предлагается обобщенная модель квантизации множеств, раскрываются наиболее важные ее применения для задач аппроксимации. Решение же самой обобщенной задачи квантизации в различных условиях сводится к простейшим задачам вычислительной геометрии. *Дискретизация; квантизация; оценивание по значениям в точках; оптимальное расположение точек*

## 1. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ КВАНТИЗАЦИИ

Задача квантизации первоначально являлась задачей теории кодирования информации. Суть ее заключается в следующем ([1, 3, 6]). Пусть $T$ — некоторое односвязное подмножество $R^n$. Пусть $\{t_k\}_{k=1}^N$ — набор $N$ точек из $T$. Каждая точка множества $T$ кодируется какой-нибудь одной точкой из этого набора. Ошибка кодирования точки $t \in T$ точкой $t_k$ измеряется некоторой неотрицательной функцией $\rho(t, t_k)$, действующей из $T \times T$ в $R^1$. В качестве функции $\rho$ может выступать метрика в $R^n$, функция от метрики, возможны также более сложные варианты.

Пусть $\Delta_k$ — множество точек из $T$, которые кодируются точкой $t_k$, $k = 1, \ldots, N$. Так как кодируются все точки $T$, набор множеств $\{\Delta_k\}_{k=1}^N$ образует разбиение $T$. Ошибка кодирования точкой $t_k$ измеряется интегралом $\int\limits_{\Delta_k} \rho(t, t_k)\, dt$, $k = 1, \ldots, N$. Общая ошибка кодирования множества $T$ точками $\{t_k\}_{k=1}^N$ измеряется суммой

$$\varepsilon_N[T] = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\Delta_k} \rho(t, t_k)\, dt.$$

Задача квантизации состоит в том, чтобы найти набор точек $\{t_k\}_{k=1}^N$ и соответствующее им разбиение $\{\Delta_k\}_{k=1}^N$ такие, чтобы ошибка $\varepsilon$ была наименьшей.

**Определение.** Последовательность наборов $\{t_k^{*N}, \Delta_k^{*N}\}_{k=1}^N$ с ошибкой $\varepsilon_N^*[T]$, $N = 1, 2, \ldots$, называется асимптотически оптимальной, если для любой другой последовательности $\{t_k^N, \Delta_k^N\}_{k=1}^N$ с ошибкой $\varepsilon_N[T]$, $N = 1, 2, \ldots$, выполняется неравенство

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{\varepsilon_N^*[T]}{\varepsilon_N[T]} \leqslant 1.$$

Пусть $C$ — односвязное выпуклое множество в $R^n$, симметричное относительно какой-нибудь своей внутренней точки $O$. Пусть $s, t$ — произвольные точки $R^n$. При помощи параллельного переноса переместим множество $C$ так, чтобы его точка симметрии $O$ совпала с точкой $s$. Пусть луч, выходящий из точки $s$ и проходящий через точку $t$, пересекает границу этого выпуклого множества в точке $v$. Определим выпуклую метрику [4] между $s$ и $t$ следующим образом:

$$\rho^0(t, s) = \frac{\|t - s\|_2}{\|v - s\|_2},$$

где $\|.\|_2$ — евклидова метрика ($L_2$), т. е. в качестве $\rho_0(t, s)$ мы возьмем коэффициент, с которым мы должны увеличить множество $C$ гомотетично относительно точки $s$, чтобы его граница прошла через точку $t$.

**A.** $\rho(t, s) = \rho_0^\alpha(t, s) + o_s\left(\rho_0^\alpha(t, s)\right)$ при $t \to s$, где $\rho_0(t, s)$ — некоторая выпуклая метрика, порожденная множеством, в общем случае зависящим от $s$.

**B.** Для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\rho(t, s) > \varepsilon$ при $\|t - s\|_2 > \delta$.

**Определение.** При фиксированной точке $s$ поверхность (линия) $\rho^0(t, s) = c_{\varphi, s}\|t - s\|_2 = 1$, $t \in$

$R^n$, вместе с показателем $\alpha$ называется (локальным) вариационным профилем функции $\rho(t,s)$ в точке $s$.

**Определение.** Если для всех $s$ из некоторого множества $T$ поверхности (линии) $\rho^0(t,s) = c_{\varphi,s}\,\|t-s\|_2 = 1$, $t \in R^n$, могут быть получены друг из друга при помощи параллельного переноса (вместе с точкой $s$) и показатели $\alpha$ для всех точек множества $T$ совпадают, поверхность (линия) $\rho^0(t,s) = 1$, $t \in R^n$ и показатель $\alpha$ называются вариационным профилем функции $\rho(t,s)$ на множестве $T$.

Заметим, что вариационный профиль полностью определяет функцию $\rho^0(t,s)$ и тем самым локальные асимптотические свойства функции $\rho(t,s)$.

**Определение.** Пусть $\{t_k\}_{k=1}^N$ — набор точек в $T$. Для каждой точки $t_k$ множеством Вороного в $T$ относительно метрики $\rho^0(t,s)$ называется множество $\Delta_k = \{t \in T : \rho^0(t,t_k) \le \rho^0(t,t_j), j = 1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,N\}$, т. е. множество точек из $T$, расстояние от которых до $t_k$ не больше, чем до остальных точек набора $\{t_k\}_{k=1}^N$.

**Определение.** Решеткой, порождаемой $n$-мерным невырожденным параллелепипедом, назовем решетку, построенную по базису направляющих векторов параллелепипеда.

**Теорема 1.** *Пусть для функции $\rho(t,s)$ выполнены условия $A$ и $B$ (или же вместо условия $B$ условие $\max\limits_{k=1,\ldots,N} diam\,\Delta_k^N \to 0$ при $N \to \infty$), причем выпуклое множество, порождающее метрику $\rho^0(t,s)$, не зависит от $s$. Пусть также граница множества $T$ кусочно-гладкая. Тогда в классе решетчатых расположений точек $\{t_k^N\}_{k=1}^N$ $(N = 1,2,\ldots)$ задача асимптотически оптимальной квантизации сводится к следующей задаче, которая имеет, по крайней мере, одно решение. Найти параллелепипед $P$, для которого значение*

$$C_1(P) = \frac{1}{|P|^{1+\alpha/n}} \sum_i \int\limits_{\Delta_i \cap P} (\rho_0(t,t_i))^\alpha\, dt$$

*минимально, где $t_i, i = 1,2,\ldots,$ — точки решетки, порожденной параллелепипедом $P$, $\Delta_i$, $i = 1,2,\ldots,$ — соответствующие им множества Вороного в метрике $\rho_0(t,s) = c_\varphi\|t-s\|$.*

*Если параллелепипед $P^*$ является решением этой задачи, тогда один из вариантов асимптотически оптимальной квантизации можно построить следующим образом.*

*1) Заполнить по возможности множество $T$ параллелепипедами $\left(\frac{|T|}{N|P^*|}\right)^{1/n} P^*$ (при этом некоторые параллелепипеды могут выходить за границу T и некоторые приграничные области могут остаться непокрытыми).*

*2)Расположить точки $\{t_k^N\}_{k=1}^N$ в вершинах параллелепипедов внутри $T$, оставшиеся точки расположить произвольно вдоль границы $T$.*

*3)В качестве множеств $\{\Delta_k^N\}_{k=1}^N$ взять любой из вариантов разбиения Вороного множества $T$ относительно точек $\{t_k^N\}_{k=1}^N$.*

*Для ошибки асимптотически оптимальной квантизации верно равенство*

$$\lim_{N\to\infty} N^{\alpha/n}\varepsilon_N[T] = C_{\text{реш}}|T|^{\alpha/n+1},$$

*где $C_{\text{реш}} = \inf\limits_P C_1(P)$ — константа, которая зависит от выпуклого множества, порождающего метрику $\rho^0(t,s)$, непрерывно.*

Непрерывность зависимости константы $C_{\text{реш}}$ от выпуклого множества, порождающего метрику, может быть использована для доказательства соответствующей теоремы для случая, когда в каждой точке $s \in T$ метрика $\rho^0(t,s)$, приближающая функцию $\rho(t,s)$, разная.

Рассмотрим случай квантизации неравномерного источника, при котором поверхность (линия) вариационного профиля в различных точках $T$ может быть разной как по размерам, так и по форме. Используемый в данной работе метод построения асимптотически оптимальной квантизации существенно использует локальную однородность источника, т. е. то предположение, что поверхность (линия) вариационного профиля функции $\rho(t,s)$ в точке $s$ меняется непрерывно в зависимости от $s$ (это обеспечивается непрерывностью коэффициента $c_{s,\varphi}$ из условия $A$ по $s$). Отсюда следует, что на любом подмножестве $T$ достаточно малого диаметра вариационный профиль функции $\rho(t,s)$ можно приближенно считать неизменным, и к каждому такому подмножеству можно применить результаты теорем, аналогичных теореме 1. Разбиение $T$ на такие подмножества будем производить в соответствии со следующей схемой.

### Схема разбиения T на подмножества

Пусть $m(N)$ — положительная целочисленная функция от $N$, удовлетворяющая следующему условию:

**C.** $m(N) \to \infty$, $m(N)/N \to 0$ при $N \to \infty$.

Например, в качестве $m(N)$ можно взять целую часть от $\sqrt{N}$.

На каждом шаге $N$ разобьем $T$ на $m(N)$ непересекающихся подмножеств $T_{1,m(N)}^N, T_{2,m(N)}^N, \ldots T_{m(N),m(N)}^N$ с кусочно-гладкими границами:

$$T_{k,m(N)}^N \cap T_{j,m(N)}^N = \emptyset, \text{ если } k \ne j,$$

$$\bigcup_{k=1}^{m(N)} T_{k,m(N)}^N = T,$$

таких, что $\max\limits_{k=1,\ldots,m(N)} \operatorname{diam} T_{k,m(N)}^N \to 0$ при $N \to \infty$ и среди множеств $T_{k,m(N)}^N$, $k = 1,\ldots,m(N)$ не существует двух множеств $T_{k,m(N)}^N, T_{j,m(N)}^N$, для которых $|T_{k,m(N)}^N| = o(|T_{j,m(N)}^N|)$ при $N \to \infty$.

В частности, из последнего условия следует, что $|T_{k,m(N)}^N| \to 0$ при $N \to \infty$, $k = 1,\ldots,m(N)$.

В случае неоднородного источника (коэффициент $c_{s,\varphi}$ в условии $A$ существенно зависит от $s$) вариационный профиль в каждой точке $s \in T$, вообще говоря, разный. Поверхность (линия) вариационного профиля в точке $s$, задаваемая уравнением $c_{s,\varphi}||t-s||_2 = 1, t \in R^n$, существенно зависит от $s$.

Выберем произвольную точку $s \in T$ и зафиксируем вариационный профиль в ней. Предположим теперь, что на некотором множестве $T^*$ вариационный профиль функции $\rho(t,s)$ всюду совпадает с зафиксированным вариационным профилем (в точке $s \in T$). Тогда в условиях теоремы 1 существует асимптотически оптимальная квантизация с ошибкой $\varepsilon_N[T^*]$, для которой верно равенство

$$\lim_{N\to\infty} N^{\alpha/n}\varepsilon_N[T^*] = C^0|T^*|^{\alpha/n+1},$$

где константа $C^0$ зависит только от вариационного профиля. Таким образом, теорема 1 ставит в соответствие любому вариационному профилю константу $C^0$, которая зависит только от вариационного профиля. Так как в рассматриваемом случае мы выбрали в качестве вариационного профиля на $T^*$ вариационный профиль функции $\rho(t,s)$ в точке $s \in T$, константа $C^0$ в приведенном выше равенстве зависит от $s$.

В дальнейшем для удобства обозначения функцию $C^0(t)$ будем везде обозначать как $c(t)$; $(c(t) \equiv C^0(t), t \in T)$.

**Теорема 2.** *Пусть для функции $\rho(t,s)$ выполнены условия A и B (или же вместо условия B условие $\max\limits_{k=1,\dots,N} diam\,\Delta_k^N \to 0$ при $N \to \infty$). Пусть также поверхность (линия) локального вариационного профиля функции $\rho(t,s)$ непрерывно зависит от точки $s \in T$ (коэффициент $c_{s,\varphi}$ в условии $A$ при любом фиксированном $\varphi$ непрерывно зависит от $s \in T$). Предположим также, что граница множества $T$ кусочно-гладкая. Тогда один из вариантов асимптотически оптимальной квантизации может быть построен следующим образом.*

*1. Построим разбиение множества $T$ на подмножества $T^N_{k,m(N)}$, $k = 1,\dots,m(N)$, согласно приведенной выше схеме.*

*2. В каждом из множеств $T^N_{k,m(N)}$, $k = 1,\dots,m(N)$, выберем по одной точке $t_k^{*N}$, $k = 1,\dots,m(N)$. По вариационному профилю в каждой из точек $t_k^{*N}$ вычислим значение $c(t_k^{*N}) = C^0(t_k^{*N})$, $k = 1,\dots,m(N)$.*

*3. Введем функцию плотности*

$$g_0(t) = \frac{(c(t))^{1/(1+\alpha/n)}}{\int\limits_T (c(t))^{1/(1+\alpha/n)}\,dt}.$$

*Пусть*

$$g_0^N(t) = \frac{\left(c(t_k^{*N})\right)^{1/(1+\alpha/n)} \chi_{T^N_{k,m(N)}}(t)}{\sum\limits_{k=1}^{m(N)} \left(c(t_k^{*N})\right)^{1/(1+\alpha/n)} |T^N_{k,m(N)}|}$$

*является приближением функции плотности, построенным по произвольным точкам $t_k^{*N} \in T^N_{k,m(N)}$, в которых было вычислено значение функции $c(t) = C^0(t), t \in T$.*

*4. В каждом множестве $T^N_{k,m(N)}$ расположим $n_{k,N} = \left[N g_0^N(t_k^{*N})|T^N_{k,m(N)}|\right]$ точек оптимальным образом, как для оптимальной квантизации с равномерным источником для вариационного профиля, совпадающего с вариационным профилем функции $\rho(t,s)$ в точке $t_k^{*N}$. Здесь [.] — целая часть числа.*

*Построенное расположение точек будет асимптотически оптимальным, и для погрешности соответствующей квантизации верно равенство*

$$\lim_{N\to\infty} N^{\alpha/n}\varepsilon_N^0[T] = \int\limits_T \frac{c(t)}{g_0^{\alpha/n}(t)}\,dt.$$

Более подробное описание результатов обобщенной теории квантизации можно найти в монографии автора [1].

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ КВАНТИЗАЦИИ

### 2.1. Ступенчатая аппроксимация неслучайной функции $n$ переменных

Рассмотрим аппроксимацию неслучайной функции $m(t)$, $t \in T \subset R^n$, ступенчатой функцией $m_t^N = m_{t_k^N}\chi_{\Delta_k^N}(t)$, $t \in T$, где, как обычно, $\{\Delta_k^N\}_{k=1}^N$ - разбиение множества $T$ на $N$ множеств, $\{t_k^N\}_{k=1}^N$ — точки множества $T$, соответствующие множествам разбиения. В качестве ошибки выберем среднюю взвешенную в метрике $L_p$, $p \geqslant 1$:

$$\varepsilon^p = \int\limits_T |m_t - m_t^N|^p n_t\,dt = \sum_{k=1}^N \int\limits_{\Delta_k^N} |m_t - m_{t_k^N}|^p n_t\,dt,$$

где $n_t$, $t \in T$, — весовая функция.

Пусть функция $\rho(t,s) = |m_t - m_s|^p n_t$ удовлетворяет условию $A$ (имеет вариационный профиль). Тогда для нахождения асимптотически оптимальной ступенчатой аппроксимации достаточно найти асимптотически оптимальную квантизацию для соответствующего вариационного профиля функции $\rho(t,s)$.

В частности, если функция $m_t$ дифференцируема и

$$m_t - m_s = m_s^{t\to s}||t-s||_2(1+o(1)) \text{ при } t \to s,$$

где $m_s^{t\to s}$ — производная Гато функции $m_s$ в точке $s$ по направлению от $t$ к $s$ (по прямой), тогда выполнено равенство условия $A$:

$$\rho(t,s) = (c_{\varphi,s}||t-s||_2)^\alpha(1+o(1)),$$

где $c_{\varphi,s} = n_t^{1/p} m_s^{t\to s}$, а $\alpha = p$ ($\varphi$ — обобщенный угол, задающий направление от $s$ к $t$). Для того чтобы функция $\rho(t,s)$ удовлетворяла условию $A$, необходимо, чтобы уравнение $m_s^{t\to s}\|t-s\|_2$, $t \in T$, при фиксированном $s$ задавало поверхность (линию), ограничивающую выпуклое множество. Также необходимо, чтобы эта поверхность (линия) была симметрична (для функций $m_t$ с гладким графиком это так, производные Гато с противоположных направлений совпадают аналогично совпадению значений правой и левой производных для гладкой функции одной переменной). Например, это имеет место, если при достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение $m_t - m_s = \varepsilon$, $t \in T$, задает поверхность (линию), ограничивающую выпукое множество, и функция $m_t$ — гладкая.

Для применния методов теории квантизации в этом случае необходимо, чтобы производная Гато ни в какой точке $T$ ни по какому направлению не была равна нулю (в той области, где она равна нулю, применение методов квантизации не имеет смысла, так как там, где функция не изменяется, достаточно знать ее значение в одной точке).

### 2.2. Оценивание $n$-мерных случайных полей

Пусть $\xi_t, t \in T, T \subset R^n$, — $n$-мерное случайное поле со значениями в $R^1$. Пусть мы имеем возможность наблюдать $\xi_t$ только в конечном числе точек $\{t_k\}_{k=1}^N \subset T$. Возникает необходимость расположить точки $\{t_k\}_{k=1}^N$ таким образом, чтобы как можно точней оценить значение поля во всех остальных точках множества $T$. Для решения этой задачи применим следующий стандартный подход. Разобьем множество $T$ на $N$ подмножеств $\{\Delta_k\}_{k=1}^N$ и разместим точки $\{t_k\}_{k=1}^N$ так, чтобы $t_k \in \Delta_k$ для $k = 1,\dots,N$. Каждое значение поля $\xi_t$ при $t \in \Delta_k$ будем аппроксимировать значением поля $\xi_t$ в точке $t_k$ для всех $k = 1,\dots,N$ (т. е. будем аппроксимировать поле $\xi_t$ при $t \in T$ ступенчатым случайным полем $\xi_t^N = \sum_{k=1}^N \xi(t_k)\chi_{\Delta_k}(t)$, где $\chi_{\Delta_k}(.)$ — характеристическая функция множества $\Delta_k$). Точки $\{t_k\}_{k=1}^N$ при этом будут представлять соответствующие множества $\{\Delta_k\}_{k=1}^N$. В качестве погрешности дискретизации (ступенчатой аппроксимации) обычно выбирают ошибку наименьших квадратов:

$$\varepsilon^2 = \mathsf{E}\int_T \left(\xi_t - \xi_t^N\right)^2 dt = \sum_{k=1}^N \int_{\Delta_k} \mathsf{E}\left(\xi_t - \xi_{t_k}\right)^2 dt,$$

где $\mathsf{E}$ — знак математического ожидания.

Эту ошибку можно минимизировать по $\{t_k\}_{k=1}^N$ и $\{\Delta_k\}_{k=1}^N$ (найти оптимальную ступенчатую аппроксимацию). Точки оптимальной дискретизации поля $\xi_t$ при этом будут соответствовать полученным точкам оптимальной ступенчатой аппроксимации.

Если функция $\rho(t,s) = \mathsf{E}\left(\xi_t - \xi_s\right)^2$, $t,s \in T$, удовлетворяет условиям $A$ и $B$, задача нахождения асимптотически оптимальной ступенчатой аппроксимации поля сводится к задаче поиска асимптотически оптимальной квантизации.

Для оценивания случайных полей по значениям в точках необходимо знать ковариационную функцию, которая может быть получена или эмпирически в случае многократных наблюдений поля (что имеет место, например, в метеорологии), или же задана a priori в рамках рассматриваемой модели.

Метод квантизации может быть также применен в случае взвешенной среднеквадратической ошибки

$$\varepsilon^2 = \mathsf{E}\int_T \left(\xi_t - \xi_t^N\right)^2 n_t\, dt = \sum_{k=1}^N \int_{\Delta_k} \mathsf{E}\left(\xi_t - \xi_{t_k}\right)^2 n_t\, dt$$

где $n_t$ — весовая функция. Для этого достаточно умножить функцию $c_{s,\varphi}$ на $n_s^{1/\alpha}$ в условии $A$, где $\alpha$ — показатель степени вариационного профиля функции $\rho(t,s)$. Если весовая функция не является константой, то источник для соответствующей квантизации будет неоднородным, даже если поле $\xi_t$ однородное.

### 2.3. Оценивание локально однородного $n$-мерного случайного поля с нулевым средним

Сначала предположим, что поле $\xi_t$ является центрированным ($\mathsf{E}\xi_t = 0$). В этом случае

$$\varepsilon^2 = \sum_{k=1}^N \int_{\Delta_k} \Big( (R(t,t) - R(t_k,t)) + \\ + (R(t_k,t_k) - R(t,t_k)) \Big)\, dt,$$

где $R(t,s) = \mathsf{E}(\xi_t - \mathsf{E}\xi_t)(\xi_s - \mathsf{E}\xi_s)$, $t,s \in T$, — ковариационная функция случайного поля $\xi_t$.

Введем функцию $\rho(t,s) = R(s,s) - R(t,s)$. Для применения разработанной выше теории достаточно выполнения следующего условия:

**D.** Функция $\rho(t,s) = R(s,s) - R(t,s)$ удовлетворяет условию $A$ с функцией $c_{\varphi,s}$, непрерывной по $s$ и условию $B$.

Заметим, что для выполнения условия $D$ недостаточно дифференцируемости по каждому направлению от $t$ к $s$ функции $R(t,s)$ по $t$ с положительной производной, так как это обеспечивает лишь существование поверхности (линии) вариационного профиля. Для выполнения условия $D$ необходимо также, чтобы эта поверхность (линия) ограничивала симметричное выпуклое множество (симметричность этого множества может быть обеспечена, например, гладкостью функции $\rho(t,s) = R(s,s) - R(t,s)$ по $t \in T$ при фиксированном $s$).

При выполнении этого условия

$$\varepsilon^2 = \sum_{k=1}^N \int_{\Delta_k} \left(\rho(t_k,t) + \rho(t,t_k)\right) dt,$$

где $\rho(t,s) = (c_{\varphi,s}\|t-s\|_2)^\alpha + o((\|t-s\|_2)^\alpha)$. Так как функция $c_{\varphi,s}$ непрерывна по $s$, $\rho(t,s) = \rho(s,t)\,(1+o(1))$ при $t \to s$. Поэтому

$$\varepsilon^2 = 2\sum_{k=1}^{N}\int_{\Delta_k}\rho^1(t,t_k)\,dt,$$

где $\rho^1(t,s) = (\rho(s,t)+\rho(t,s))/2 = (c_{\varphi,s}\|t-s\|_2)^\alpha + o((\|t-s\|_2)^\alpha)$ удовлетворяет условиям $A$ и $B$. Так как решение задачи оптимальной квантизации зависит только от вариационного профиля функции $\rho^1(t,s)$, а ее вариационный профиль совпадает с вариационным профилем функции $\rho(t,s)$, при выполнении условия $D$ задача нахождения асимптотически оптимальной ступенчатой аппроксимации эквивалентна задаче нахождения асимптотически оптимальной квантизации с ошибкой

$$\varepsilon_N^2 = 2\sum_{k=1}^{N}\int_{\Delta_k}\rho(t,t_k)\,dt,$$

где $\rho(t,s) = R(s,s) - R(t,s)$.

Из того, что ошибка дискретизации зависит в данном случае исключительно от вида ковариационной функции и от $\{t_k\}_{k=1}^N$ и $\{\Delta_k\}_{k=1}^N$, следует, что оптимальное расположение точек зависит также исключительно от вида ковариационной функции.

Зависимость коэффициента $c_{\varphi,s}$ в условии $A$ от $\varphi$ отражает возможную неизотропность поля, а зависимость от $s$ — его возможную неоднородность. Для изотропного поля $\xi_t$ $c_{\varphi,s}$ не зависит от $\varphi$, для однородного поля $\xi_t$ $c_{\varphi,s}$ не зависит от $s$ (и от $t$). Рассмотрим различные частные случаи. Везде ниже предполагается выполнение условия $D$.

**Однородное поле.** По определению, рассматриваемое нами центрированное поле $\xi_t$, $t \in T$, будет однородным, если $R(t,s) = R(t-s)$. В этом случае $\rho(t,s) = \rho(t-s) = R(0) - R(t-s)$ и функция $c_{s,\varphi}$ в условии $A$ не зависит от $s$. В соответствующей задаче квантизации источник — однородный.

**Однородное изотропное поле.** По определению, центрированное случайное поле будет однородным и изотропным, если $R(t,s) = R(\|t-s\|_2)$. В этом случае $\rho(t,s) = \rho(\|t-s\|_2) = R(0) - R(\|t-s\|_2)$ и функция $c_{s,\varphi}$ в условии $A$ не зависит ни от $s$, ни от $\varphi$ (является константой).

В случае однородного изотропного поля поверхность (линия) вариационного профиля будет обычной сферой (окружностью) в евклидовой метрике ($L_2$). Этот случай наиболее всего изучен, и для него получено множество результатов — как теоретических, так и численных (см., например, [3]).

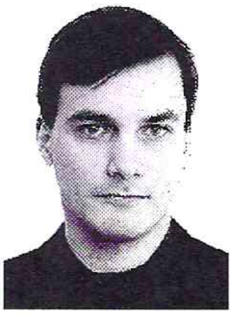
**Локально-однородное поле.** Будем называть центрированное поле локально-однородным, если на множестве достаточно малого диаметра его ковариационная функция может быть приближена ковариационной функцией однородного поля. Нахождению асимптотически оптимального расположения точек для локально однородного поля посвящена теорема 2. Этот случай достаточно хорошо изучен в работе [5] для двухмерных полей, для которых функция $\rho_0(t,s)$ локально может быть приближена метриками $L_2$ и $L_1$ (т. е. ковариационная функция локально может быть приближена ковариационной функцией од нородного изотропного поля и ковариационной функцией поля Орнштейна–Уленбека [2] соответственно). В этой работе линия вариационного профиля функции $\rho(t,s)$ гомотетична по всему множеству $T$.

Таким образом, построенное обобщение теории квантизации позволяет решать целый ряд задач оптимальной аппроксимации и кубатуризации случайных и обычных функций. Эта теория является некоторой общей моделью для целой группы аппроксимационных задач и может быть использована для оптимизации расположения точек оценивания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Захаров А. В.** Одно обобщение теории квантизации и его применение в задачах оценивания полей по значениям в точках. Уфа: Гилем, 2003. 108 с.
2. **Скороход А. В.** Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1986. 320 с.
3. **Gray R. M., Neuhoff D. L.** Quantization // IEEE Trans. on Information Theory. October, 1998. V. 44, No. 6. 2325–2384. (Commemorative Issue, 1948–1998).
4. **Ma L.** Bisectors and Voronoi Diagrams for Convex Distance Functions: Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) von Dipl.-Math. Tag der mündlichen Prüfung: 5 April 2000.
5. **Su Y.** Estimation of random fields by piecewise constant estimators // Stoch. Proc. Appl. 1997. 71. P. 145–163.
6. **Su Y. C.** On the asymptotics of quantizers in two dimension // J. Multivariate Anal. 1997. 61 (1). P. 67–85.


## ОБ АВТОРЕ



**Захаров Андрей Владимирович,** ст. преп. кафедры математики УГАТУ. Дипл. математик-инженер (УГАТУ, 1999). Исследования в области проблем дискретизации непрерывных данных, оценивания случайных и неслучайных функций, кубатурных формул.