ISSN 1992-6502 (Print)
2019. Т. 23, № 1 (83). С. 104–109
Вестник УГАТУ
ISSN 2225-2789 (Online)
http://journal.ugatu.ac.ru

УДК 519.651

# Моделирование параметров расширенной функции Кобба–Дугласа в условиях неопределенности исходных данных

**О. Г. Кантор**[1], **С. И. Спивак**[2]

[1] o_kantor@mail.ru, [2] semen.spivak@mail.ru

[1] ФГБОУ ВО «Уфимский государственный нефтяной технический университет» (УГНТУ)
[2] ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (БГУ), Институт нефтехимии и катализа РАН (ИНК РАН)

*Поступила в редакцию 03.04.2019*

**Аннотация.** Построение производственных функций Кобба–Дугласа – одного из наиболее востребованных инструментов анализа взаимосвязи результирующих и объясняющих факторов производственно-экономической деятельности традиционно осуществляется с использованием математико-статистических методов. Проблемы идентификации моделей данного типа во многом обусловлены априорной неопределенностью имеющихся данных, в частности, их неточностью и недостаточной глубиной представления. Приводится описание разработанного метода параметрической идентификации расширенной производственной функции Кобба–Дугласа, нивелирующего данные виды неопределенности, который основан на использовании идеи Л. В. Канторовича для расчета интервальных оценок искомых параметров.

**Ключевые слова:** область неопределенности; предельно допустимые оценки параметров; неопределенность исходных данных; расширенная функция Кобба–Дугласа; подход Л. В. Канторовича.

## ВВЕДЕНИЕ

Производственные функции Кобба–Дугласа активно применяются в исследованиях для установления зависимости между результирующими показателями производственной деятельности ($Y$) и влияющими на них экзогенными факторами ($K$ – капитал и $L$ – труд) [1]:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}. \quad (1)$$

В силу прозрачности трактовки своих параметров классическая функция Кобба–Дугласа (1) получила широкое распространение в исследовательской практике [2–4]. Вместе с тем наблюдается и большое стремление увеличить сферу применения данного инструментария прикладного анализа за счет включения в модель (1) бóльшего числа факторов [2, 5]. Однако в силу ряда объективных причин расширенные функции Кобба–Дугласа на сегодняшний день остаются скорее желаемым, чем реальным инструментом изучения взаимосвязи производственных факторов.

К числу основных классов проблем, с которыми сталкиваются исследователи при построении расширенных производственных функций, относятся проблемы, связанные с неполнотой исходных данных, что объясняется ограниченностью имеющейся статистической информации, и с вычислительными сложностями, которые возникают в рамках применения математико-статистических методов – основного инструментария, используемого для определения оценок искомых параметров. В частности, возможности использования математико-статистических методов для построения моделей (2) существенно ограничиваются имеющимися «короткими» рядами данных, что априори не позволяет получать статистически значимые оценки параметров.

Таким образом, становится очевидным применение специальных походов к эмпирической проверке расширенной функции Кобба–Дугласа.

Будем рассматривать расширенную функцию Кобба–Дугласа следующего вида:

$$Y = \alpha_0 \cdot X_1^{\alpha_1} \cdot X_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot X_n^{\alpha_n}$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1, \qquad (2)$$
$$\alpha_j \geq 0, \ j = \overline{0,n},$$

где $X_1$, …, $X_n$ – экзогенные переменные модели; $Y$ – эндогенная; $\alpha_j$, $j = \overline{1,n}$, – параметры, являющиеся коэффициентами эластичности по соответствующим экзогенным факторам; $\alpha_0$ – параметр, характеризующий масштаб экономики в целом.

Исходная информация представляет собой наборы значений:

$$\left\{X_1^{(i)}, \ldots, X_n^{(i)}, Y^{(i)}\right\}, \ i = \overline{1,m}, \qquad (3)$$

относительно которых нельзя утверждать, что они являются абсолютно точными. Поэтому будем считать, что истинные значения исходных данных принадлежат некоторым, не всегда заранее известным, интервалам:

$$X_j^{(i)} \in \left[\underline{X}_j^{(i)}, \overline{X}_j^{(i)}\right], \ Y^{(i)} \in \left[\underline{Y}^{(i)}, \overline{Y}^{(i)}\right], \qquad (4)$$
$$i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}.$$

**Ключевые идеи.** По сути, сказанное выше означает, что параметры модели (2) имеют интервальную неопределенность. В этих условиях может оказаться нецелесообразным определение единственного набора значений параметров $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, так как в силу того, что для исходных данных характерна интервальная неопределенность, единственность параметров модели (2) будет означать, что получено точное решение на основании априори неточных данных. Поэтому более уместным может оказаться поиск интервалов значений параметров $\alpha_j \in \left[\underline{\alpha}_j, \overline{\alpha}_j\right]$, $j = \overline{0,n}$, обеспечивающих приемлемые значения с позиций введенного критерия оптимальности, характеризующего соответствие экспериментальных и расчетных значений переменной $Y$.

В настоящем исследовании для целей построения расширенных функций Кобба–Дугласа представлен метод, базирующийся на идее получения точных двусторонних границ для параметров моделей и областей расположения искомых и наблюдаемых величин, автором которой является выдающийся ученый Л. В. Канторович [6].

## ОПИСАНИЕ МЕТОДА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

Поясним суть предлагаемого метода на примере задачи параметрической идентификации произвольной функциональной зависимости

$$y = f\left(\overline{a}, \overline{x}\right), \qquad (5)$$

в которой определению подлежат параметры $\overline{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Исходная информация представляет собой наборы значений

$$\left\{\overline{x}^{(i)}, y^{(i)}\right\}, \ i = \overline{1,m}. \qquad (6)$$

Для оценки степени близости расчетных и экспериментальных данных при определении точного вида зависимостей (5) необходимо осуществлять их сопоставление. Для этого, традиционно, в рассмотрение вводятся величины невязок – разности между экспериментальными $\left(y^{(i)}\right)$ и расчетными $\left(\hat{y}^{(i)}\right)$ значениями переменной $y$:

$$\hat{y}^{(i)} - y^{(i)}, \ i = \overline{1,m}. \qquad (7)$$

Условие того, что модель (5) описывает экспериментальные данные (6) в пределах заданной для каждого наблюдения погрешности $\xi_t$, может быть сформулировано следующим образом:

$$\left|\hat{y}^{(i)} - y^{(i)}\right| \leq \xi_i, \ i = \overline{1,m}. \qquad (8)$$

Очевидно, что величины невязок зависят от значений параметров $\overline{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}$, определяющих точный вид модели (5). Для одной модели может существовать множество наборов параметров, одинаково хорошо описывающих наблюдения, и существенно различающихся между собой. Совокупность значений определяемых параметров по всем таким наборам, очевидно, задает область, вне которой ни одна точка не удовлетворяет экспериментальным данным с позиций обеспечения приемлемых значений невязок (5). Для совокупности таких значений параметров будем использовать обозначение $\Lambda^*$ и термин *«область неопределенности»*, в том смысле, что каждая точка этой области определяет набор параметров, который может быть использован для формирования окончательного вида модели (5).

Определим по каждому из параметров $\overline{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ *интервал неопределенности* как некоторый отрезок

$$a_j \in \left[\underline{a}_j, \overline{a}_j\right], \; j = \overline{1,n}, \tag{9}$$

вариация $a_j$ внутри которого сохраняет совместность системы (8).

Границы интервалов неопределенностей (9) по каждому из параметров будем называть *предельно допустимыми оценками* параметров идентифицируемой зависимости (5).

Постановка задач определения интервалов (9) при условии удовлетворения системы ограничений (8) не требует знания информации о статистических свойствах распределения погрешности измерений, ввиду того, что величины $\{\xi_i\}$ в системе неравенств (8) представляют характеристики абсолютных погрешностей аппроксимации наблюдаемых величин, информация о величине которых может присутствовать у исследователя (например, на основании технических характеристик используемых приборов). Определим наибольшее из величин $\{\xi_i\}$: $\xi = \max\limits_{i=\overline{1,m}}\{\xi_i\}$. Тогда выполнение условий (8) означает, что модель описывает наблюдения в пределах, обусловленных величиной $\xi$, для обозначения которой будем использовать термин «*предельно допустимая погрешность аппроксимации*».

Очевидно, что область неопределенности $\Lambda^*$ идентифицируемой зависимости находится внутри множества неопределенности $\Lambda$, задаваемого прямым произведением интервалов (9):

$$\Lambda = \left[\underline{a}_1, \overline{a}_1\right] \times \ldots \times \left[\underline{a}_n, \overline{a}_n\right]. \tag{10}$$

Исследователю может быть доступна информация, уточняющая значения идентифицируемой зависимости, причем относиться она может к временным интервалам как ретроспективного, так и перспективного анализа. Такая информация приводит к сужению множества $\Lambda$.

Предельно допустимые оценки параметров позволяют получить оценку степени неопределенности решения задачи параметрической идентификации [7]. Действительно, в силу того, что справедлива вложенность множеств $\Lambda^* \subset \Lambda$, неопределенность предполагаемого решения может быть оценена на основе анализа диаметра множества неопределенности (10):

$$diam\,\Lambda^* = diam\,\Lambda = \max_{j=\overline{1,n}}\left(\underline{a}_j - \overline{a}_j\right). \tag{11}$$

## МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ РАСШИРЕННОЙ ФУНКЦИИ КОББА–ДУГЛАСА

Применение описанного выше подхода к определению параметров расширенной функции Кобба–Дугласа (2) сводится к реализации трех этапов.

1. Линеаризация модели (2):

$$\begin{gathered} \ln Y = \ln\alpha_0 + \alpha_1 \ln X_1 + \ldots + \alpha_n \ln X_n \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1, \\ \alpha_j \ge 0, \; j = \overline{0,n}. \end{gathered} \tag{12}$$

2. Расчет предельно допустимой погрешности аппроксимации $\xi^*$, что осуществляется на основе решения задачи:

$$\begin{gathered} \xi \to \min \\ \left|\ln Y^{(i)} - \ln \hat{Y}^{(i)}\right| \le \xi, \; i = \overline{1,m}, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1, \\ \alpha_j \ge 0, \; j = \overline{0,n}. \end{gathered} \tag{13}$$

Результатом численной реализации модели (13) является предельно допустимая погрешность аппроксимации $\xi^*$ и точечные оценки параметров $\alpha_j^*$, $j = \overline{0,n}$.

3. Расчет по каждому из параметров модели (2) интервалов $\left[\underline{\alpha}_j, \overline{\alpha}_j\right]$, $j = \overline{0,n}$,

вариация значений внутри которых обеспечивает заданный уровень точности модели $\xi^*(1+\delta)$, где $\delta \geq 0$ – параметр, характеризующий приемлемый уровень вариации значений предельно допустимой погрешности аппроксимации.

Для выявления интервалов $\left[\underline{\alpha}_j, \overline{\alpha}_j\right]$, $j=\overline{0,n}$ необходимо решить $2n$+2 задач следующего вида

$$\alpha_j \to \min(\max),\ j=\overline{0,n}$$

$$\left|\ln Y^{(i)} - \ln \hat{Y}^{(i)}\right| \leq \xi^*(1+\delta),\ i=\overline{1,m},$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1, \tag{14}$$

$$\alpha_j \geq 0,\ j=\overline{0,n}.$$

Введение параметра δ обусловлено необходимостью учета априорной неопределенности исходных данных (3). Следствием принятия за основу интервального типа этой неопределенности (4) является и то, что достигнутая точность полученного решения не должна мериться единственной величиной, а должна задаваться некоторым диапазоном приемлемых значений.

Оценка точности соответствия фактических и рассчитанных по модели (2) значений переменной $Y$ будем проводить на основе средней ошибки аппроксимации:

$$\overline{A}=\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}\left|\frac{Y^{(i)}-\hat{Y}^{(i)}}{Y^{(i)}}\right|\cdot 100\,\%. \tag{15}$$

## ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Численная реализация представленного подхода проводилась на примере построения расширенной функции Кобба–Дугласа в рамках анализа влияния уровней образования занятых в Республике Башкортостан на ключевой макроэкономический параметр – валовой региональный продукт (ВРП) в 2001–2014 гг. Перечень используемых в модели переменных приведен в табл. 1.

Значения переменных $Y$ и $X_1$ были приведены к сопоставимому виду с использованием индексов–дефляторов физического объема ВРП и цен производителей в строительстве соответственно (рис. 1).

Таблица 1

**Переменные модели (2)**

| *Обозначение переменной* | *Наименование показателя* |
|---|---|
| $Y$ | ВРП (в ценах 2001 г.), млрд руб. |
| $X_1$ | Стоимость основных фондов (в ценах 2001 г.), млрд руб. |
| | Среднегодовая численность занятых в экономике, тыс. чел |
| $X_2$ | – с высшим образованием; |
| $X_3$ | – со средним профессиональным образованием; |
| $X_4$ | – с начальным профессиональным образованием; |
| $X_5$ | – со средним полным образованием; |
| $X_6$ | – с основным общим образованием; |
| $X_7$ | – не имеющих основного общего образования |

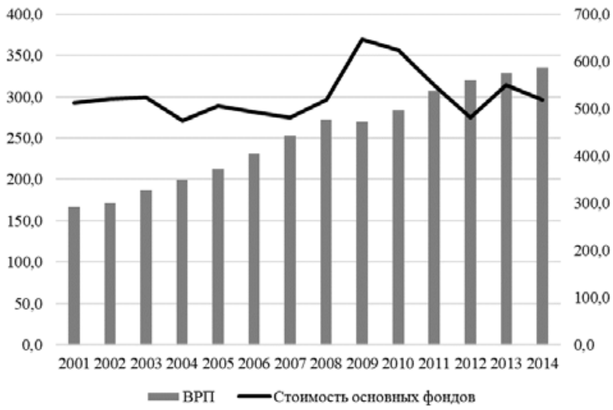


**Рис. 1.** Динамика стоимостных показателей модели (2)

Данные о среднегодовой численности занятых в экономике региона (рис. 2) формировались на основе официальных статистических источников [8].

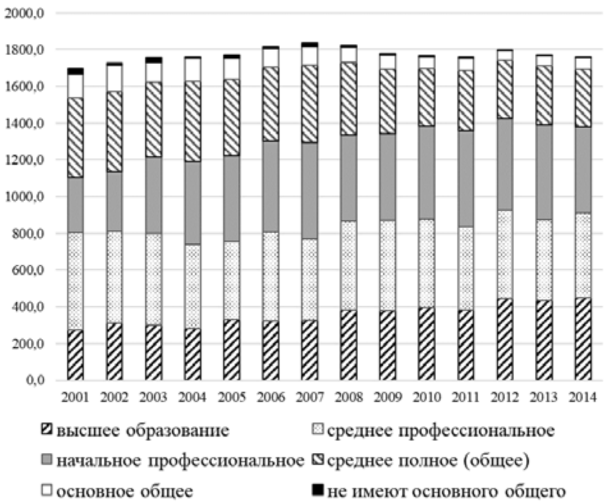


**Рис. 2.** Динамика среднегодовой численности занятых в экономике Республики Башкортостан

Результаты проведенных расчетов по модели (13) позволили идентифицировать расширенную функцию Кобба–Дугласа:

$$Y = X_2^{0,842} \cdot X_4^{0,046} \cdot X_7^{0,111}. \qquad (16)$$

Средняя ошибка аппроксимации исходных данных производственной функцией (16) составляет 13,8 %, значение предельной абсолютной погрешности аппроксимации – $\xi^* = 0{,}249$.

Вид модели (16) позволяет сделать следующие выводы:

- в определяющей степени на результирующую переменную $Y$ оказывает влияние переменная $X_2$ – среднегодовая численность занятых в экономике с высшим образованием (соответствующий коэффициент эластичности равен 0,842);
- влияние переменной $X_1$, характеризующей стоимость основных фондов, на ВРП незначимо;
- в целом экономика региона характеризуется постоянным масштабом (коэффициент $\alpha_0$=1,0).

В соответствии с описанной выше концепцией отображения интервальной неопределенности исходных данных на основе решения задач (14) были получены интервальные оценки параметров расширенной функции Кобба–Дугласа (табл. 2). Приемлемый диапазон вариации значений предельно допустимой погрешности аппроксимации был принят на уровне 5 % $(\delta = 0{,}05)$.

Таблица 2

**Результаты численной реализации модели (14)**

| *Параметры* | *Интервал значений параметра* | *Диапазон вариации средней ошибки аппроксимации* |
|---|---|---|
| $\alpha_0$ | [1,000; 1,037] | [14,40; 14,45] |
| $\alpha_1$ | [0,000; 0,037] | [14,42; 14,50] |
| $\alpha_2$ | [0,536; 0,894] | [13,54; 16,77] |
| $\alpha_3$ | [0,000; 0,029] | [13,98; 14,45] |
| $\alpha_4$ | [0,000; 0,329] | [14,50; 15,76] |
| $\alpha_5$ | [0,000; 0,032] | [14,00; 14,52] |
| $\alpha_6$ | [0,000; 0,064] | [14,08; 16,62] |
| $\alpha_7$ | [0,095; 0,128] | [15,71; 16,62] |

Как следует из представленных результатов:

- определяющее влияние на результирующую переменную $Y$ оказывают переменные $X_2$ и $X_7$ (диапазоны значений соответствующих параметров снизу ограничены существенно отличной от нуля величиной);
- влияние переменной $X_4$ требует более детального изучения ввиду того, что в заданном диапазоне точности модели соответствующий коэффициент эластичности может принимать как значения, близкие к нулю, так и существенно от него отличные;
- влияние всех остальных экзогенных переменных на фактор $Y$ является мало значимым;
- экономика региона в период 2001–2014 гг. характеризуется неизменным масштабом, о чем свидетельствует интервал значений параметра $\alpha_0$.

Таким образом, рассчитанные интервальные оценки параметров позволили получить более емкие и обоснованные выводы в рамках исследованной расширенной функции Кобба–Дугласа.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен метод определения параметров расширенной функции Кобба–Дугласа, *отличительной* особенностью которого является получение интервальных оценок значений по каждому из параметров. Показано, что данный подход целесообразно использовать в условиях неопределенности исходных данных, обусловленной их неточностью и неполнотой.

Для представленного подхода *разработано* необходимое математическое обеспечение, согласно которому проблема идентификации расширенной функции Кобба–Дугласа сводится к последовательному решению задач линейного программирования двух типов: (13) и (14). По результатам численного решения задачи (13) устанавливается величина наилучшего приближения имеющихся данных – предельная абсолютная погрешность аппроксимации, по результатам решения задач (14) рассчитываются предельно допустимые оценки параметров модели, которые задают диапазоны вариации значений для каждого из параметров и позволяют оценить степень неопределенности полученного решения.

Важным *преимуществом* представленного метода является возможность проводить исследования на данных, для которых характерно отсутствие большого количества наблюдений.

Возможности представленного метода показаны на примере исследования зависимости ВРП Республики Башкортостан от стоимости основных фондов и среднегодовой численности занятых в экономике региона в разрезе уровней образования, проводимого при помощи семифакторной функции Кобба–Дугласа на основе данных за 2001–2014 гг.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Чечулин В. Л.** О месте модели Кобба–Дугласа в иерархии моделей // Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika. 2013. № 1 (13). С. 46–49. **[** V. L. Chechulin, “The place of the Cobb-Douglas model in the hierarchy of models”, (in Russian), in *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika,* no. 1 (13), pp. 46-49, 2013. **]**

2. **Корицкий А. В.** Динамика частных и социальных норм отдачи образования в России // Вопросы инновационной экономики. 2011. № 1. С. 11–29. **[** A. V. Koritskiy, “Dynamics of private and social rates of return to education in Russia”, (in Russian), in *Voprosy innovacionnoj ehkonomiki*, no. 1, pp. 11-29, 2011. **]**

3. **Гафарова Е. А.** Моделирование регионального развития на основе производственных функций // Интернет-журнал Науковедение. 2013. № 3 (16). С. 10. **[** E. A. Gafarova, “Regional development modeling based on production functions”, (in Russian), in *Internet-zhurnal Naukovedenie*, no. 3 (16), p. 10, 2013. **]**

4. **Малых О. Е., Гафарова Е. А.** Высокотехнологичные отрасли российской экономики: возможности и ресурсы развития // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Экономика и менеджмент. 2018. Т. 12. № 4. С. 70–78. **[** O. E. Malykh, E. A. Gafarova, “High-tech branches of the Russian economy: opportunities and development resources”, (in Russian), in *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta.* Seriya: ehkonomika i menedzhment, vol. 12, no. 4, pp. 70-78, 2018. **]**

5. **Буравлев А. И.** Трехфакторная производственная модель Кобба–Дугласа // Экономика и управление: проблемы, решения. 2012. № 3. С. 13–19. **[** A. I. Buravlev, “Three-factor the production model of the Cobb-Douglas”, (in Russian), in *EHkonomika i upravlenie: problemy, resheniya*, no. 13, pp. 13-19, 2012. **]**

6. **Канторович Л. В.** О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал. 1962. Т.3. № 5. С. 701–709. **[** L. V. Kantorovich, “Some new approaches to computational methods and observation processing”, (in Russian), in *Sibirskij matematicheskij zhurnal,* vol. 3, no. 5, pp. 701-709, 1962. **]**

7. **Спивак С. И., Тимошенко В. И., Слинько М. Г.** Методы построения кинетических моделей стационарных реакций // Химическая промышленность сегодня. 1979. № 3. С. 33–36. **[** S. I. Spivak, V. I. Tymoshenko, M. G. Slinko, “Methods of construction of kinetic models of stationary reactions”, (in Russian), in *Himicheskaya promyshlennost' segodnya*, no. 3, pp.33-36, 1979. **]**

8. **Информационный** портал занятости населения Министерства семьи и труда [Электронный ресурс]. URL: http://www.bashzan.ru/posts/86389 (дата обращения 02.03.2019). **[** Information portal of employment of the Ministry of family and labor [Online], (in Russian). Available: http://www.bashzan.ru/posts/86389 **]**


## ОБ АВТОРАХ


**КАНТОР Ольга Геннадиевна**, доц. каф. БУА. Дипл. математик (Моск. гос. ун-т, 1993). Канд. физ.-мат. наук по прим. выч. техн., мат. мод. и мат. мет. в научн. исслед. (БГУ, 1999). Иссл. в обл. мат. обработки эксп. данных.

**СПИВАК Семен Израилевич**, проф., зав. каф. математического моделирования, Институт нефтехимии и катализа РАН (ИНК РАН). Дипл. математик (Новосиб. гос. ун-т, 1967). Д-р физ.-мат. наук по физ. химии (ИХФ АН СССР, 1985). Иссл. в обл. мат. обработки эксп. данных.


## METADATA

**Title:** The modelling of the extended Cobb-Douglas production function under uncertainty of initial data.


**Authors:** O. G. Kantor [1], S. I. Spivak [2]

**Affiliation:**

[1] Ufa State Petroleum Technical University (UGNTU), Russia.

[2] Bashkir State University (BSU), Russia.

**Email:** [1] o_kantor@mail.ru, [2] semen.spivak@mail.ru,



**Language:** Russian.

**Source:** Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 23, no. 1 (83), pp. 104-109, 2019. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).



**Abstract:** Cobb-Douglas function – one of the most popular tools for analyzing the relationship of the resulting and explaining factors of production and economic activity. It construction traditionally carried out using mathematical and statistical methods. The problems of identification of this type models are largely due to the a priori uncertainty of the available data, in particular, their inaccuracy and insufficient depth of presentation. The article describes the developed method of parametric identification of the extended Cobb-Douglas function, leveling these types of uncertainty. The method is based on the use of the idea of L. V. Kantorovich to calculate the interval estimates of the required parameters.



**Key words:** uncertainty range; the maximum permissible parameter estimates; uncertainty of raw data; extended model of Cobb-Douglas; the approach of L. V. Kantorovich.



**About authors:**

**KANTOR, Olga Gennagievna**, Associate Professor, Dept. BUA. Dipl. Mathematician (Moscow State Univ., 1993). PhD in Physics and Mathematics (BSU, 1999).

**SPIVAK, Semen Israilevich**, Prof., Dept. of Mathematical Modelling. Chief Researcher, Institute of Petrochemistry and Catalysis RAS. Dipl. Mathematician (Novosibirsk State Univ., 1967). Dr. of Physics and Mathematics (ICF RAS USSR, 1985).