

УДК 534.1

МЕТОД РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ С УПРУГИМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ

В. П. Павлов¹, Л. Р. Нусратуллина²

¹victor.pavlov.51@yandex.ru, ²mardliliya@yandex.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 15.07.2019

Аннотация. Представлен метод алгебраических полиномов пятой степени для решения дифференциального уравнения четвертого порядка, описывающего изгибные колебания упруго закрепленного стержня переменного сечения. Для изучения точности рассматриваемого метода рассмотрены тестовые задачи, имеющие точное аналитическое решение. Произведены расчеты для различных коэффициентов упругости закрепления и оценена погрешность численных расчетов. Показано, что при достаточно густой сетке метод позволяет определять частоты и формы собственных колебаний стержня переменного сечения с точностью до пяти значащих цифр.

Ключевые слова: стержни переменного сечения; поперечные колебания стержня; частоты собственных колебаний; собственные формы колебаний.

ВВЕДЕНИЕ

Стержни являются основными элементами многих современных конструкций. В качестве примера отметим, что рабочие и направляющие лопатки осевых компрессоров и турбин газотурбинных двигателей (ГТД) при анализе их статической и динамической прочности очень часто рассматривают как стержни переменного поперечного сечения. На этапе проектирования и доводки необходимо в обязательном порядке проводить отстройку основных форм собственных колебаний конструкции от форм колебаний, вызываемых внешними по отношению к стержню воздействиями. В связи с этим возникает актуальная задача определения собственных частот и собственных форм колебаний стержней с разнообразными формами переменных сечений.

Частоты собственных поперечных колебаний стержней обычно определяют при

аналитическом или численном решении дифференциального уравнения четвертого порядка следующего вида [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $w = w(x, t)$ – функция зависимости поперечных перемещений точек оси стержня от координаты x и времени t ; $\mu = \mu(x)$ – функция зависимости массы единицы длины стержня от x ; $E = \text{const}$ – модуль упругости материала стержня; $I = I(x)$ – функция зависимости осевого момента инерции поперечного сечения стержня от координаты x .

Большое количество аналитических решений уравнения (1) представлено в работе [1], где рассматривается прямой стержень постоянного поперечного сечения при различных комбинациях трех основных видов

закрепления его концов: жесткое закрепление, шарнирное закрепление и свободный конец стержня. Для такого стержня получены аналитические выражения, позволяющие определять все возможные частоты и формы собственных колебаний.

В реальных изделиях очень часто стержни имеют переменное по длине поперечное сечение. На сегодняшний день в литературе представлены аналитические решения для стержней только с функциями изменения погонной массы μ и осевого момента инерции I в экспоненциальной форме: $\mu = \mu_0 e^{\delta \frac{x}{l}}$ и $I = I_0 e^{\delta \frac{x}{l}}$, где x – координата точки на оси стержня, l – длина стержня, μ_0 , I_0 и δ – некоторые постоянные коэффициенты [2–5].

Данные решения получены для традиционных краевых условий: жесткое закрепление, шарнирное закрепление и свободный конец стержня. Точность решений в работах [1–5] в идеале не ограничена, но современные вычислительные средства обеспечивают точность на уровне не более 15-ти значащих цифр, что вполне достаточно для принятия данных решений в качестве эталона при оценке точности численных методов.

Создатели современной техники при расчете собственных частот и собственных форм колебаний стержней произвольного поперечного сечения широко применяют численные методы на основе метода конечных элементов (МКЭ) [6–7], реализованного в пакетах типа ANSYS, SolidWorks и др. [8].

При этом следует отметить, что стержни с переменным поперечным сечением требуют весьма густую конечно-элементную сетку с очень большим количеством конечных элементов, что может привести к весьма большой вычислительной погрешности расчетов, которая в ряде случаев может превысить погрешность расчетов других численных методов. Поэтому точность пакетов ANSYS, SolidWorks при определении собственных частот и форм колебаний должна быть тщательно изучена при различных размерах конечно-элементной сетки.

В [9] было проведено объективное исследование точности пакета ANSYS при расчете частот собственных колебаний прямого стержня с постоянным поперечным сечением при различном количестве конечных элементов. Показано, что при решении данной задачи пакет ANSYS демонстрирует весьма посредственные характеристики: максимальная точность для первой формы колебаний всего три значащие цифры, а для десятой формы – всего лишь одна значащая цифра. В связи с этим не стоит всегда надеяться на известные пакеты, а следует уделять определенное внимание и разработке более современных вычислительных программ.

В качестве альтернативы метода конечных элементов в работе [5] для описания колебаний стержня переменного сечения предлагается метод сплайнов степени 5 дефекта 1 [10, 11], на основе которого рассчитывались частоты собственных поперечных колебаний прямого стержня с поперечным сечением прямоугольной формы, имеющим постоянную высоту и переменную ширину, изменяющуюся вдоль стержня по экспоненциальному закону.

Точность данного метода [5] оценивалась сравнением результатов численных расчетов с точными аналитически полученными значениями частот собственных колебаний при различных показателях δ экспоненциальной функции для перечисленных выше простейших способов закрепления стержня. Показано, что данный метод обеспечил численное определение первых десяти собственных частот с точностью не менее шести значащих цифр.

Метод сплайнов степени 5 дефекта 1 весьма эффективен [11–13], но имеет определенное ограничение, связанное с тем, что он применяет функции, непрерывные до производных четвертого порядка. В ряде случаев необходимо это ограничение снять и допустить разрывы аппроксимирующих функций вплоть до производных второго порядка.

В связи с этим в данной работе предлагается численный метод определения собственных частот и форм колебаний для прямого стержня с переменным попереч-

ным сечением, базирующийся на аппроксимации функции перемещения в пределах участков стержня алгебраическими полиномами пятой степени без обязательного ограничения на разрывы производных выше первого порядка. При этом в зависимости от модификации метода, появляется возможность описывать формы собственных колебаний прямых стержней с разрывами всех производных, начиная со второго порядка.

Данный метод, далее называемый методом алгебраических полиномов (МАП), как показано ниже, позволяет достигать высокой точности расчетов, ограничением которой являются только технические характеристики компьютеров, связанные с точностью и быстротой выполнения ими арифметических вычислений.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ СТЕПЕНИ 5 ПРИ РАСЧЕТЕ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Запишем уравнение (1) в развернутом виде:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2E \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + E \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Решение дифференциального уравнения (2) будем искать в виде:

$$W(x, t) = W(x) \sin \omega t, \quad (3)$$

где $W(x)$ – форма колебаний; ω – круговая частота собственных колебаний.

После подстановки (3) в (2) и ряда преобразований получаем:

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2E \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + E \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \mu \omega^2 W = 0. \quad (4)$$

В итоге задача определения частот собственных колебаний сводится к решению однородного дифференциального уравнения (4).

При реализации метода алгебраических полиномов степени 5 на отрезке $[a, b]$ формируется сетка Δ :

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b, \quad (5)$$

имеющая N узлов, с шагом $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{1, N-1}$.

В пределах каждого участка $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, N-1}$ рассматриваются функции $P_5^{(i)}(x)$, являющиеся полиномами пятой степени:

$$\begin{cases} P_5^{(i)}(x) = \sum_{\alpha=0}^5 a_{\alpha}^{(i)} (x - x_i)^{\alpha}, \\ x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{1, N-1}. \end{cases} \quad (6)$$

Полиномы $P_5^{(i)}(x)$ однозначно определяются коэффициентами $a_{\alpha}^{(i)}$, $\alpha = \overline{0, 5}$, $i = \overline{1, N-1}$, общее число которых равно $N_{\alpha} = 6(N-1)$.

Для удобства сведем искомые коэффициенты полиномов $P_5^{(i)}(x)$

$$\{a_{\alpha}^{(i)}\}, \quad \alpha = \overline{0, 5}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (7)$$

в вектор-столбец \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = (q_k, \quad k = \overline{1, 6(N-1)})^T. \quad (8)$$

На функции $P_5^{(i)}(x)$ и их производные до четвертого порядка включительно наложим условия непрерывности в узлах стыковки смежных отрезков x_i , $i = \overline{2, N-1}$:

$$\begin{cases} \frac{d^s P_5^{(i-1)}(x_i)}{dx^s} = \frac{d^s P_5^{(i)}(x_i)}{dx^s}, \\ s = \overline{0, 4}, \quad i = \overline{2, N-1}. \end{cases} \quad (9)$$

Для реализации данных условий рассматриваются два соседних отрезка сетки:

$[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$ при $i = \overline{2, N-1}$. На данных отрезках определяются многочлены $P_5^{(i-1)}(x)$, $P_5^{(i)}(x)$ и их производные. Затем в соответствие с (9) записываются в итоге алгебраические линейные уравнения, определяющие равенства значений полиномов и их производных в общих узлах $x_i, i = \overline{2, N-1}$.

Значения полиномов $P_5^{(i)}(x)$ и их производных в любой точке с координатой x из области определения $[a, b]$ определяются выражением:

$$\begin{cases} \frac{d^s P_5^{(i)}(x)}{dx^s} = \sum_{\alpha=s}^5 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_\alpha^{(i)} (x-x_i)^{\alpha-s}, \\ i = \overline{1, N-1}, \quad s = \overline{0, 4}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{cases} \quad (10)$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} \frac{d^s P_5^{(i)}(x)}{dx^s} = R_s^{(i)}(x), \\ i = \overline{1, N-1}, \quad s = \overline{0, 4}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \end{cases} \quad (11)$$

Тогда с учетом (11) из (10) получим:

$$\begin{cases} R_s^{(i-1)}(x_i) = \sum_{\alpha=s}^5 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_\alpha^{(i-1)} h_{i-1}^{\alpha-s}, \\ R_s^{(i)}(x_i) = s! a_s^{(i)}, \\ i = \overline{2, N-1}, \quad s = \overline{0, 4}, \\ h_{i-1} = x_i - x_{i-1}, \quad x_i \in \Delta. \end{cases} \quad (12)$$

Приравняв $R_s^{(i-1)}(x_i)$ и $R_s^{(i)}(x_i)$, получим $5(N-2)$ уравнения непрерывности во внутренних узлах сетки $x_i, i = \overline{2, N-1}$.

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=s}^5 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_\alpha^{(i-1)} h_i^{\alpha-s} - s! a_s^{(i)} = 0, \\ i = \overline{2, N-1}, \quad s = \overline{0, 4}. \end{cases} \quad (13)$$

На основе полиномов $P_5^{(i)}(x), i = \overline{1, N-1}$ построим функцию $P_5(x)$

$$\begin{cases} P_5(x) = P_5^{(i)}(x) \quad \text{при} \quad x \in [x_i, x_{i+1}), \\ i = \overline{1, N-1}, \\ P_5(x_N) = P_5^{(N-1)}(x_N) \quad \text{при} \quad x = x_N, \end{cases} \quad (14)$$

и ее производные:

$$R_s(x) = \frac{d^s P_5(x)}{dx^s}, \quad s = \overline{0, 4}. \quad (15)$$

Заменой в (4) искомой функции $W = W(x)$ аппроксимирующей функцией $P_5(x)$ с учетом (15) получим дискретный аналог уравнения (4), записанный по схеме метода коллокаций [14] в узлах $x_i, i = \overline{1, N-1}$:

$$\begin{aligned} EI(x_i) R_4(x_i) + 2E \frac{\partial I(x_i)}{\partial x} R_3(x_i) + \\ + E \frac{\partial I(x_i)}{\partial x} R_2(x_i) - \mu(x_i) \omega^2 R(x_i) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Для узлов сетки $x_i, i = \overline{1, N-1}$ уравнение (16) примет вид:

$$\begin{aligned} 24 EI(x_i) a_4^{(i)} + 12 E \frac{\partial I(x_i)}{\partial x} a_3^{(i)} + \\ + 2E \frac{\partial I(x_i)}{\partial x} a_2^{(i)} - \mu(x_i) \omega^2 a_0^{(i)} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Для узла x_N на правом конце отрезка $[a, b]$:

$$\begin{aligned} EI(x_N) \sum_{\alpha=4}^5 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_\alpha^{(N-1)} h_{N-1}^{\alpha-4} + \\ + 2E \frac{\partial I(x_N)}{\partial x} \sum_{\alpha=3}^5 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_\alpha^{(N-1)} h_{N-1}^{\alpha-3} + \\ + E \frac{\partial I(x_N)}{\partial x} \sum_{\alpha=2}^5 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_\alpha^{(N-1)} h_{N-1}^{\alpha-2} - \\ - \mu(x_N) \omega^2 \sum_{\alpha=0}^5 \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} a_\alpha^{(N-1)} h_{N-1}^{\alpha-s} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Коэффициенты линейных алгебраических уравнений (12), (17), (18) занесем в матрицу \mathbf{A} . В результате получим систему уравнений:

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = 0. \quad (19)$$

По соотношениям (17) и (18) формируется N уравнений связи между коэффициентами полиномов. С учетом уравнений непрерывности (13) получаем $5(N-2) + N$ уравнений. Для определения всех коэффициентов полиномов еще необходимо $6(N-1) - 5(N-2) - N = 4$ уравнений, которые определим из краевых условий.

При решении задачи на определение собственных частот конкретных стержней к системе (19) добавляются 4 уравнения краевых условия:

$$\mathbf{K}\mathbf{Q} = 0, \quad (20)$$

где \mathbf{K} – прямоугольная матрица размера $4 \times 6(N-1)$.

В качестве объекта для применения метода алгебраических полиномов рассмотрим поперечные изгибные колебания прямого упругого стержня, имеющего упругое закрепление на одном из концов и отсутствие ограничений для перемещения другого конца (рис. 1).

Деформированная ось стержня в процессе колебаний представлена на рис. 1. Угол поворота поперечного сечения φ показан в положительном направлении.

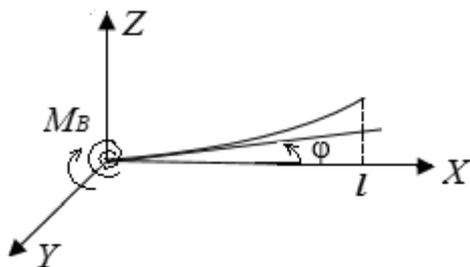


Рис. 1. Изгибная деформация стержня, упруго закрепленного при $x=0$ и свободного при $x=l$

Для стержня, упруго закрепленного на левом конце ($x=0$) и свободного на правом конце ($x=l$), краевые условия задаются выражениями:

$$\begin{cases} W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} - k \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad \text{при } x=0, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0, \quad \text{при } x=l, \end{cases} \quad (21)$$

где величина производной от функции изгиба стержня $\frac{\partial W}{\partial x}$ равна углу поворота сечения стержня φ , вторая производная $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{M}{EI}$, где M – внутренний изгибающий момент, k – коэффициент податливости упругой опоры, который определяет угол поворота поперечного сечения стержня в месте закрепления в зависимости от действия в данном сечении внутреннего изгибающего момента M .

Объединяя уравнения краевых условий (21) и уравнения (19), получим однородную систему из $6(N-1)$ линейных уравнений с $6(N-1)$ неизвестными:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{Q} = 0, \\ \mathbf{K}\mathbf{Q} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Объединим уравнения системы (22) в единую систему уравнений:

$$\mathbf{D}\mathbf{Q} = 0. \quad (23)$$

Частоты собственных колебаний ω определяются из условия равенства нулю определителя матрицы $\mathbf{D}[0]$:

$$\det \mathbf{D} = 0. \quad (24)$$

Таким образом, задача нахождения собственных частот колебаний стержня сводится к задаче нахождения собственных значений матрицы \mathbf{D} .

Для решения уравнения (24) воспользуемся методом перебора [16]. В зависимости от необходимого количества собственных частот (5, 10 и т.д.) определяется отрезок $[c, d]$. На данном отрезке строится равномерная сетка $c = \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_m = d$. В каждом узле сетки проверяется выполнение следующего условия:

$$\det D(\omega_i) \cdot \det D(\overline{\omega_{i+1}}) < 0, \quad i = \overline{1, m-1}. \quad (25)$$

При выполнении условия (25) на отрезке $[\omega_i, \overline{\omega_{i+1}}]$ производится уточнение методом половинного деления [17] с необходимой точностью ε . Перебор для (24) продолжается до тех пор, пока не определится необходимое количество собственных частот.

Зная собственные частоты ω_i , можно перейти к решению уравнений (23). Подставив одно из найденных ω_i в (23), получим систему из линейных однородных уравнений, определитель которой равен нулю. Отбросив одно уравнение системы (23) и задав перемещение в одной из точек рассматриваемого отрезка $[a, b]$, равным какому-то ненулевому значению, получим систему линейных неоднородных уравнений.

Решение данной системы определит собственную форму колебаний стержня, соответствующей собственной частоте ω_i .

ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА, ИМЕЮЩАЯ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ, ДЛЯ СТЕРЖНЯ С ПОСТОЯННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Для оценки точности предлагаемого метода алгебраических полиномов рассмотрим прямой стержень, имеющий длину $l = 1$ м, прямоугольное поперечное сечение шириной $b = 0,03$ м и высотой $h = 0,02$ м. При этих данных у сечения стержня площадь $A = bh = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ и осевой момент инерции $I = bh^3/12 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$. Стержень стальной с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и плотностью $\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

При постоянных значениях модуля упругости $E = \text{const}$, осевого момента инерции $I = \text{const}$ и постоянном сечении уравнение (4) записывается в виде [1]:

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \mu \omega^2 W = 0. \quad (26)$$

При обозначении

$$a^4 = \frac{\mu \omega^2}{EI} \quad (27)$$

уравнение (26) примет вид:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - a^4 W = 0. \quad (28)$$

Согласно [1] общее решение уравнения (28) имеет вид:

$$W = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + C_3 e^{ax} + C_4 e^{-ax}, \quad (29)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные, определяемые из краевых условий.

Для данного стержня рассмотрим краевые условия (21) при $k = 0$:

$$\begin{cases} W = 0, \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \text{ при } x = 0, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0, \text{ при } x = l. \end{cases} \quad (30)$$

При $k = 0$ краевые условия есть условия того, что на левом конце при $x = 0$ стержень жестко закреплен, на правом конце при $x = l$ стержень свободен.

Задача о собственных колебаниях стержня с краевыми условиями (30) достаточно подробно изучена в работах [1–5], где представлены конечные результаты. Это позволяет нам сопоставить наши результаты с результатами данных авторов.

При условиях (30) значения a_m параметра a являются [1] решением трансцендентного уравнения:

$$\cos(al)ch(al) + 1 = 0.$$

Введем обозначение

$$al = \xi,$$

на основе которого получим уравнение:

$$\cos \xi ch \xi + 1 = 0. \quad (31)$$

Решив [16] уравнение (31) и подставив $a_m = \frac{\xi_m}{l}$, $m = 1, 2, \dots$ в (27), получим формулу для вычисления частот собственных

колебаний для различных форм колебаний:

$$\omega_m = a_m^2 \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}} = \frac{\xi_m^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\rho A}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (32)$$

Точность численных расчетов предлагаемым методом алгебраических полиномов оценим десятичным логарифмом абсолютного значения относительной ошибки

$$\lg|\delta\omega| = \lg\left|\frac{\omega_T - \omega_P}{\omega_T}\right|, \quad (33)$$

где ω_T – точное значение собственной частоты, определяемое по формуле (32), ω_P – расчетное значение, найденное методом алгебраических полиномов.

Результаты численных расчетов приведены на рис. 2 графиком зависимости $\lg|\delta\omega|$ от десятичного логарифма $\lg M$, где M – число отрезков сетки Δ , определяемое формулой $M = N - 1$.

Расчеты проводились для $N = 5, 11, 21, 51, 101, 201, 501, 1001$. При решении уравнения (24) точность ε нахождения ω_i задавалась равной 10^{-6} .



Рис. 2. Погрешность расчета собственных частот стержня постоянного поперечного сечения

Вид зависимости $\lg|\delta\omega| \sim \lg|M|$ на рис. 2 показывает, что реализованный метод алгебраических полиномов характеризуется вторым порядком сходимости.

При поперечных колебаниях форма оси стержня определяется выражением (29):

$$W = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + C_3 e^{ax} + C_4 e^{-ax}.$$

Подставив (29) в краевые условия (30), имеем:

$$\begin{cases} C_3 = -\frac{1}{2}(C_1 + C_2), \\ C_4 = \frac{1}{2}(C_1 - C_2). \end{cases} \quad (34)$$

С учетом (34) из (29) и получим

$$W = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax - \frac{1}{2}(C_1 + C_2)e^{ax} + \frac{1}{2}(C_1 - C_2)e^{-ax}, \quad (35)$$

или

$$W = C_1 \left(\sin ax - \frac{1}{2}e^{ax} + \frac{1}{2}e^{-ax} \right) + C_2 \left(\cos ax - \frac{1}{2}e^{ax} - \frac{1}{2}e^{-ax} \right). \quad (36)$$

При $x=l$ выражение (36) примет вид:

$$C_1(2 \sin al - e^{al} + e^{-al}) + C_2(2 \cos al - e^{al} - e^{-al}) = 0. \quad (37)$$

Из (37) определим:

$$C_2 = C_1 \frac{2 \sin al - e^{al} + e^{-al}}{-2 \cos al + e^{al} + e^{-al}}. \quad (38)$$

Сделав замену $al = \xi$, приведем (38) к виду:

$$C_2 = C_1 \frac{2 \sin \xi - e^{\xi} + e^{-\xi}}{-2 \cos \xi + e^{\xi} + e^{-\xi}}. \quad (39)$$

Для каждой формы колебаний m существует свое значение ξ_m , следовательно, выбрав форму колебаний, можно при заданном значении постоянной C_1 по формуле (39) рассчитать соответствующее значение постоянной C_{2m} , $m = 1, 2, \dots$:

$$\begin{cases} C_{2m} = C_1 \frac{2 \sin \xi_m - e^{\xi_m} + e^{-\xi_m}}{-2 \cos \xi_m + e^{\xi_m} + e^{-\xi_m}} \\ m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (40)$$

Введем обозначение:

$$\begin{cases} K_m = \frac{2 \sin \xi_m - e^{\xi_m} + e^{-\xi_m}}{-2 \cos \xi_m + e^{\xi_m} + e^{-\xi_m}} \\ m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (41)$$

и на его основе представим (40) в виде:

$$C_{2m} = C_1 K_m, \quad m = 1, 2, K. \quad (42)$$

В итоге получим выражение для форм собственных колебаний;

$$W_m = C_1 \left(\sin ax - \frac{1}{2} e^{ax} + \frac{1}{2} e^{-ax} \right) + C_1 K_m \left(\cos ax - \frac{1}{2} e^{ax} - \frac{1}{2} e^{-ax} \right), \quad m = 1, 2, \dots \quad (43)$$

Координаты точек оси стержня в процессе колебаний описываются выражением:

$$\begin{cases} v_m = W_m(x) \sin \omega t, \quad m = 1, 2, \dots \\ \omega = \frac{\xi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\rho A}} \end{cases} \quad (44)$$

Первые три формы, определяемые аналитическими соотношениями (43), представлены линиями, а формы, рассчитанные численным методом алгебраических полиномов, показаны точками (рис. 3).

Видно, что точные формы и формы, полученные численным методом на всем отрезке $[0, 1]$, практически совпадают.

ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ, УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОГО НА ЛЕВОМ КОНЦЕ И СВОБОДНОГО НА ПРАВОМ

При построении точного аналитического решения дифференциального уравнения (4) при переменном поперечном сечении выражения для погонной массы стержня μ и осевого момента инерции I выберем в экспоненциальной форме:

$$\mu = \mu_0 e^{\frac{\delta x}{l}}, \quad I = I_0 e^{\frac{\delta x}{l}}, \quad (45)$$

где l – длина балки, μ_0, I_0 и δ – некоторые постоянные.

Подставив (45) в дифференциальное уравнение (4), получим:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\delta \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \delta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \omega^2 W = 0. \quad (46)$$

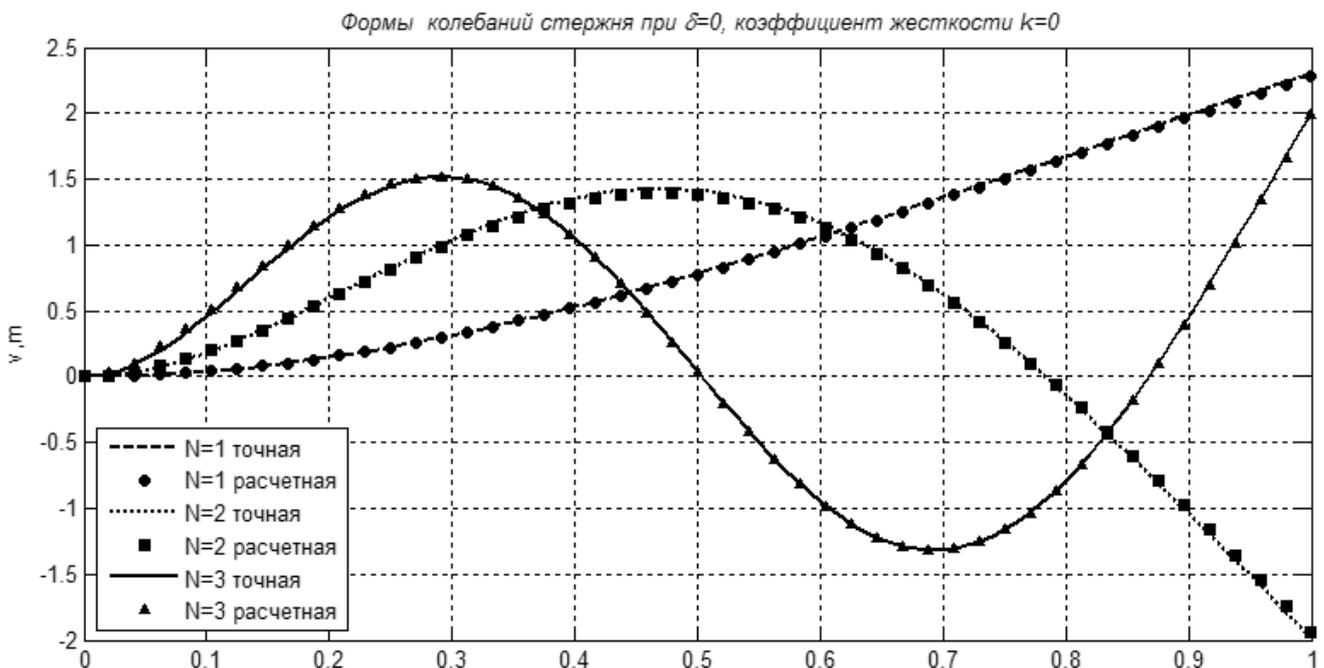


Рис. 3. Первые три формы собственных колебаний стержня, построенные по аналитическому решению и методом алгебраических полиномов

При обозначениях

$$\begin{cases} x = l\tilde{x}, & x \in [0,1], \\ W = W_0\tilde{w}, & \tilde{w} \in [0,1], \end{cases} \quad (47)$$

где W_0 – масштабный коэффициент с размерностью перемещения, уравнение (47) приводится к безразмерному виду:

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} + 2\delta \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3} + \delta^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\mu_0 l^4}{EI_0} \omega^2 \tilde{w} = 0. \quad (48)$$

Введем обозначение

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{\mu_0 l^4}{EI_0} \omega^2 \quad (49)$$

и представим (48) в виде:

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} + 2\delta \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3} + \delta^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} - \tilde{\omega}^2 \tilde{w} = 0. \quad (50)$$

Точное решение уравнения (50) имеет вид [5]:

$$\tilde{w} = e^{-\frac{\delta}{2}\tilde{x}} (C_1 e^{\lambda_1 \tilde{x}} + C_2 e^{-\lambda_1 \tilde{x}} + C_3 \sin(\lambda_2 \tilde{x}) + C_4 \cos(\lambda_2 \tilde{x})), \quad (51)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования, определяемые из краевых условий, а величины λ_1 и λ_2 определяются выражениями:

$$\lambda_1 = \sqrt{\tilde{\omega} + \frac{\delta^2}{4}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\tilde{\omega} - \frac{\delta^2}{4}}. \quad (52)$$

Краевые условия (21) в безразмерном виде примут вид:

$$\begin{cases} \tilde{w} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} - k \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \quad \text{при } \tilde{x} = 0, \\ \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \text{при } \tilde{x} = 1. \end{cases} \quad (53)$$

Подставим (51) в (53) и получим систему из четырех нелинейных уравнений:

$$\tilde{w}(0) = C_1 + C_2 + C_4 = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}(0)}{\partial \tilde{x}} - k \frac{\partial^2 \tilde{w}(0)}{\partial \tilde{x}^2} &= -\frac{\delta}{2}(C_1 + C_2 + C_4) + \\ &+ (C_1 \lambda_1 - C_2 \lambda_1 + C_3 \lambda_2) - k \left[\frac{\delta^2}{4}(C_1 + C_2 + C_4) - \right. \\ &- \delta(C_1 \lambda_1 - C_2 \lambda_1 + C_3 \lambda_2) + C_1 \lambda_1^2 + C_2 \lambda_1^2 - \\ &\left. - C_4 \lambda_2^2 \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{w}(1)}{\partial \tilde{x}^2} &= \frac{\delta^2}{4} [C_1 e^{\lambda_1} + C_2 e^{-\lambda_1} + C_3 \sin(\lambda_2) + \\ &+ C_4 \cos(\lambda_2)] - \delta [C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1} - C_2 \lambda_1 e^{-\lambda_1} + \\ &+ C_3 \lambda_2 \cos(\lambda_2) - C_4 \lambda_2 \sin(\lambda_2)] + C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1} + \\ &+ C_2 \lambda_1^2 e^{-\lambda_1} - C_3 \lambda_2^2 \sin(\lambda_2) - C_4 \lambda_2^2 \cos(\lambda_2) = 0, \\ \frac{\partial^3 \tilde{w}(1)}{\partial \tilde{x}^3} &= -\frac{\delta^3}{8} [C_1 e^{\lambda_1} + C_2 e^{-\lambda_1} + C_3 \sin(\lambda_2) + \\ &+ C_4 \cos(\lambda_2)] + \frac{3\delta^2}{4} [C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1} - C_2 \lambda_1 e^{-\lambda_1} + \\ &+ C_3 \lambda_2 \cos(\lambda_2) - C_4 \lambda_2 \sin(\lambda_2)] - \\ &- \frac{3\delta}{2} [C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1} + C_2 \lambda_1^2 e^{-\lambda_1} - C_3 \lambda_2^2 \sin(\lambda_2) - \\ &- C_4 \lambda_2^2 \cos(\lambda_2)] + C_1 \lambda_1^3 e^{\lambda_1} - C_2 \lambda_1^3 e^{-\lambda_1} - \\ &- C_3 \lambda_2^3 \cos(\lambda_2) + C_4 \lambda_2^3 \sin(\lambda_2) = 0. \end{aligned}$$

Решениями данных уравнений являются точные значения $\tilde{\omega}_{T_m}$ $m=1, 2, \dots$ частот собственных колебаний стержня.

Методом алгебраических полиномов были найдены расчетные значения первых пяти собственных частот $\tilde{\omega}_p$ при $\delta = -1, \delta = 1$ и $M = 1001$ при различных значениях коэффициента k . В табл. 1, 2 сопоставлены точные и расчетные значения частот собственных колебаний для рассматриваемого стержня. Данные таблицы позволяют оценить точность описываемого в статье численного метода и в то же время являются базой точных результатов, которые могут

в дальнейшем использоваться для оценки точности существующих и вновь разрабатываемых численных методов.

Для наглядности результаты численных расчетов частот собственных колебаний при $\delta = -1$, $k = 0,001; 0,01; 10; 100$ и $M = N - 1$ при $N = 11, 21, 51, 101, 201, 501, 1001$ представлены на рис. 4–7 графиками зависимости десятичного логарифма относительной погрешности $\lg|\delta\tilde{\omega}|$, рассчитанной по формуле (33), от десятичного логарифма числа отрезков сетки $\lg(M)$. Видно (рис. 4–7), что для первых пяти форм колебаний имеет место второй порядок сходимости, и при числе узлов $N = 1001$ гарантированно обеспечивается точность расчетов с 4-мя 5-ю значащими цифрами. Также из рис. 4–7 видно,

что с дальнейшим увеличением количества узлов $N > 1001$ имеется возможность получать еще более точные результаты.

На рис. 8–9 показаны графики зависимости частоты собственных колебаний стержня от коэффициента податливости упругой опоры k для значений $\delta = -1$ и $\delta = 1$. Видно (рис. 8–9), что частоты собственных колебаний монотонно убывают с ростом коэффициента k .

Графики первых трех форм собственных колебаний стержня с упругим закреплением на левом конце, рассчитанные методом алгебраических полиномов для $\delta = -1$, $\delta = 1$ и $k = 0,001; 0,01; 0,1; 1; 10$ приведены на рис. 10–15. Из рис. 10–15 видно, что при первой форме колебаний с опорой высокой податливости $k = 10$ форма колеблющегося стержня является практически прямой.

Таблица 1

Значения $\tilde{\omega}$ для стержня, упруго закрепленного на левом конце и свободного на правом для $\delta = -1$ и различных коэффициентов упругости k

m	$k = 0$		$k = 0,001$		$k = 0,01$		$k = 0,1$	
	$\tilde{\omega}_p$	$\tilde{\omega}_T$	$\tilde{\omega}_p$	$\tilde{\omega}_T$	$\tilde{\omega}_p$	$\tilde{\omega}_T$	$\tilde{\omega}_p$	$\tilde{\omega}_T$
1	4,73490524	4,73490580	4,72682114	4,72682208	4,65576096	4,65576143	4,07974930	4,07975076
2	24,20181808	24,20181238	24,15593338	24,15592896	23,76456833	23,76456285	21,26230698	21,26230325
3	63,86459122	63,86448943	63,74025784	63,74015709	62,71017170	62,71007425	57,32597713	57,32589269
4	123,09837437	123,09790783	122,85737076	122,85690779	120,91901932	120,91856897	112,45235519	112,45194990
5	202,07014456	202,06876764	201,67426802	201,67289756	198,58242277	198,58109157	187,03113611	187,02991204

Окончание табл. 1

m	$k = 1$		$k = 10$		$k = 100$	
	$\tilde{\omega}_p$	$\tilde{\omega}_T$	$\tilde{\omega}_p$	$\tilde{\omega}_T$	$\tilde{\omega}_p$	$\tilde{\omega}_T$
1	2,21669235	2,21669227	0,77884045	0,77884073	0,24920101	0,24919990
2	17,54749222	17,54749045	16,62820206	16,62820056	16,52331161	16,52330980
3	52,15866299	52,15858811	51,21563435	51,21555949	51,11407547	51,11400141
4	106,46313553	106,46275545	105,53132401	105,53094558	105,43332138	105,43294346
5	180,49594835	180,49477060	179,57016138	179,56898922	179,47397367	179,47280077

Таблица 2

Значения $\tilde{\omega}$ для стержня, упруго закрепленного на левом конце и свободного на правом для $\delta = 1$ и различных коэффициентов упругости k

m	$k = 0$		$k = 0,001$		$k = 0,01$		$k = 0,1$	
	$\tilde{\omega}_P$	$\tilde{\omega}_T$	$\tilde{\omega}_P$	$\tilde{\omega}_T$	$\tilde{\omega}_P$	$\tilde{\omega}_T$	$\tilde{\omega}_P$	$\tilde{\omega}_T$
1	2,56534195	2,56534278	2,55940084	2,55940089	2,50768672	2,50768686	2,11779529	2,11779540
2	20,03836057	20,03837919	19,99667238	19,99667604	19,64650497	19,64649489	17,60845354	17,60846258
3	59,87046921	59,87084876	59,75064717	59,75068477	58,77074538	58,77088404	54,03934862	54,03947611
4	119,09911728	119,09862699	118,86182978	118,86200810	116,98967514	116,98920211	109,34321870	109,34366082
5	198,06824551	198,06964058	197,67809369	197,67843111	194,67007118	194,67113883	184,06738686	184,06839635

Окончание табл. 2

m	$k = 1$		$k = 10$		$k = 100$	
	$\tilde{\omega}_P$	$\tilde{\omega}_T$	$\tilde{\omega}_P$	$\tilde{\omega}_T$	$\tilde{\omega}_P$	$\tilde{\omega}_T$
1	1,07325516	1,07325928	0,36930008	0,36930224	0,11786880	0,11786741
2	15,03553696	15,03553021	14,45150528	14,45149822	14,38570023	14,38569364
3	49,92122589	49,92113654	49,19330475	49,19321713	49,11511871	49,11503306
4	104,2872185	104,2868096	103,51279984	103,51239503	103,43143234	103,43102780
5	178,3581385	178,3569153	177,55616226	177,55494523	177,47287827	177,47166136



Рис. 4



Рис. 5

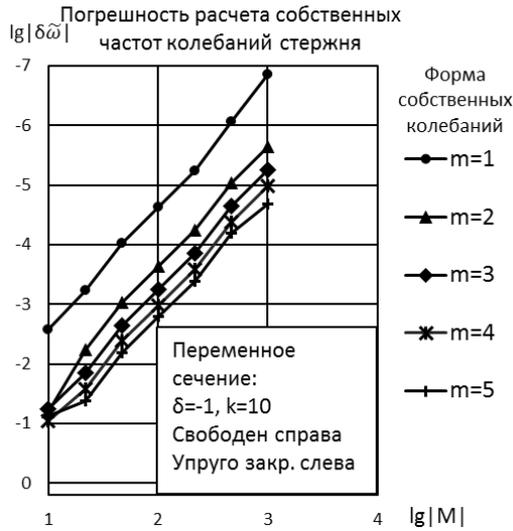


Рис. 6



Рис. 7

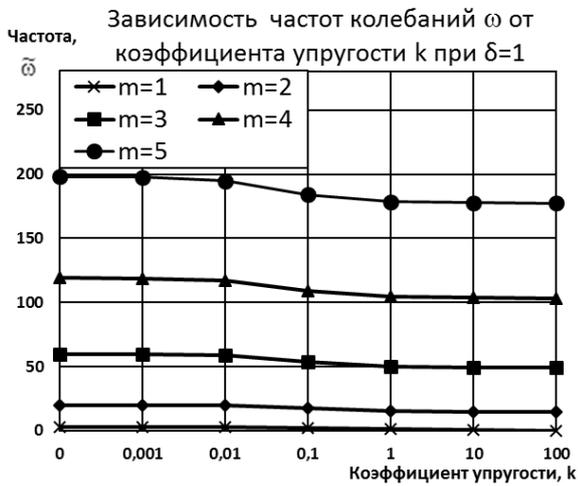


Рис. 8

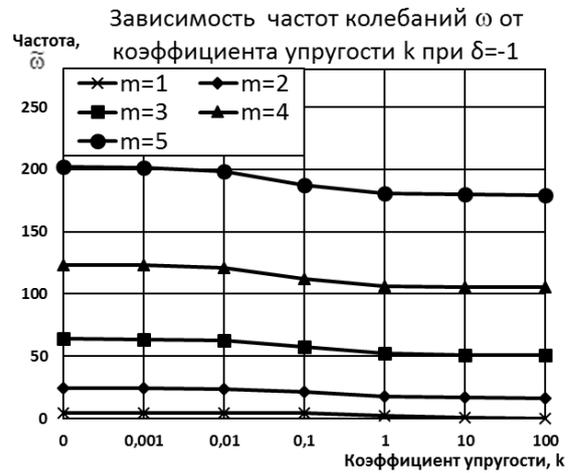


Рис. 9

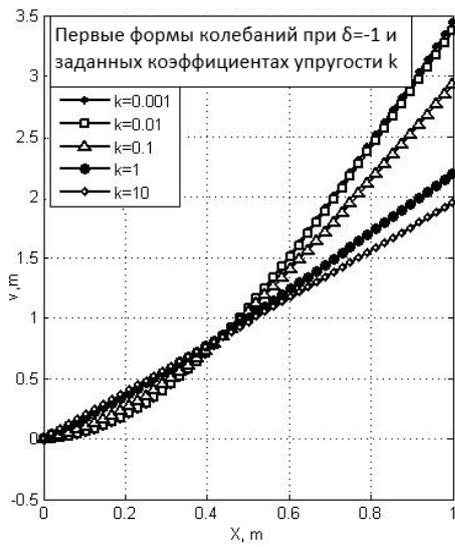


Рис. 10

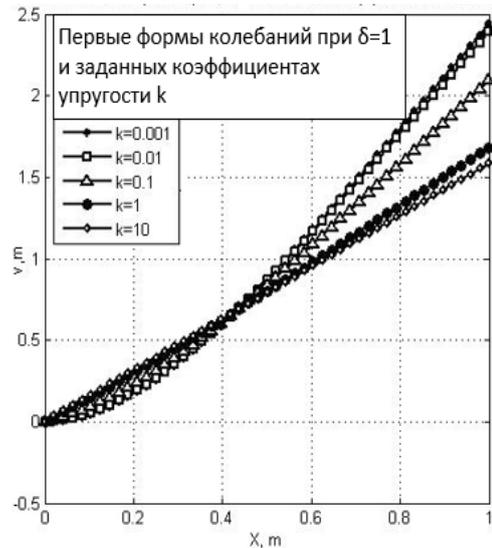


Рис. 11

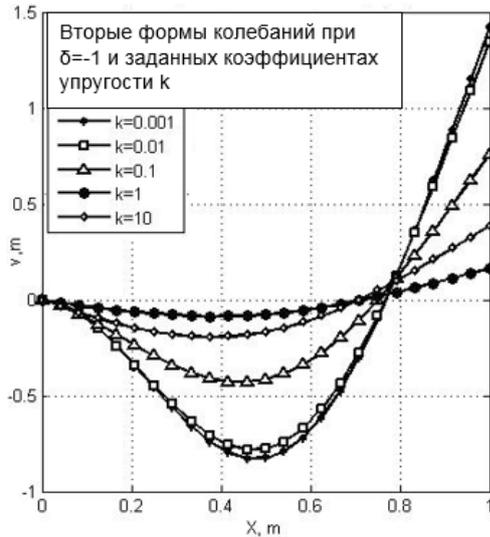


Рис. 12

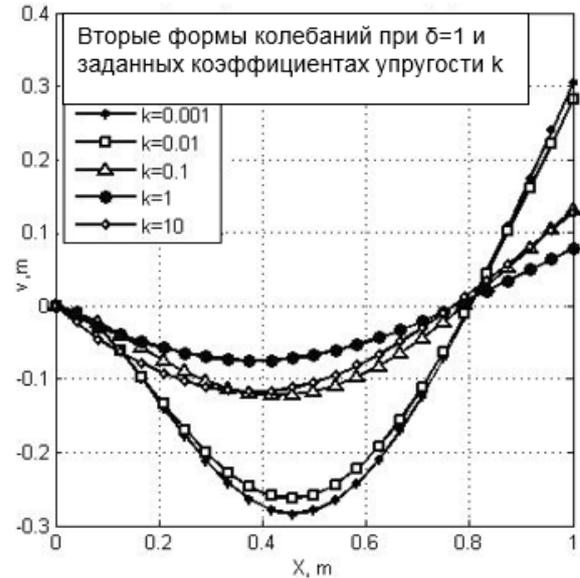


Рис. 13

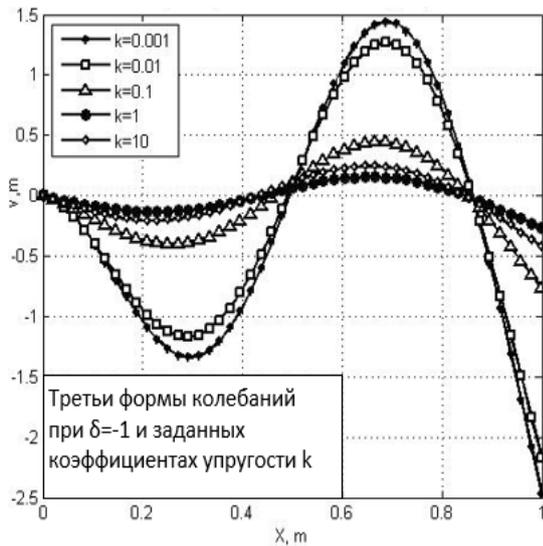


Рис. 14

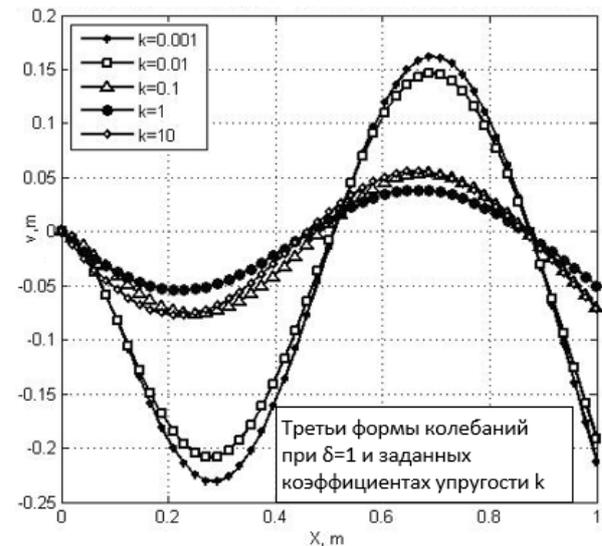


Рис. 15

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В статье излагается численный метод алгебраических полиномов, позволяющий рассчитывать частоты и формы собственных колебаний стержней переменного сечения с упругими закреплениями их концов.

2. Проведено детальное тестирование метода алгебраических полиномов при решении задач об изгибных колебаниях стержней с постоянными и переменными поперечными сечениями, имеющих точное аналитическое решение.

3. Выяснено, что метод характеризуется вторым порядком точности при увеличении числа узлов по длине стержня.

4. Показано, что при сетке с числом узлов $N = 1001$ обеспечивается точность расчетов первых трех собственных частот и форм колебаний с относительной погрешностью, не превышающей 10^{-5} .

5. Дальнейшие исследования планируется продолжить в направлении изучения возможностей метода для расчета частот и форм собственных колебаний рабочих и направляющих композиционных лопаток осевых компрессоров газотурбинных двигателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с. [I.M. Babakov, *Oscillation theory*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1965.]

2. **Tong X., Tabarrok B.** Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section // *Journal of Sound and Vibration*. 1995. № 186 (5). P. 821–835. [X. Tong, B. Tabarrok, "Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section", in *Journal of Sound and Vibration*, no. 186 (5), pp. 821-835, 1995.]

3. **Ece M. C., Aydogdu M., Taskin V.** Vibration of a variable cross-section beam // *Mechanics Research Communications*. 2007. No. 34. P. 78–84. [M. C. Ece, M. Aydogdu, V. Taskin, "Vibration of variable cross-section beam", in *Mechanics Research Communications*, no. 34, pp. 78-84, 2007.]

4. **Cranch E. T., Adler A. A.** Bending vibration of variable section beams // *Journal of Applied Mechanics, American Society of Mechanical Engineers*. 1956. No. 23 (1). P. 103–108. [E. T. Cranch, A. A. Adler, "Bending vibration of variable section beams", in *Journal of Applied Mechanics, American Society of Mechanical Engineers*, no. 23 (1), pp. 103-108, 1956.]

5. **Павлов В. П.** Поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и вычисление его собственных частот методом сплайнов // *Вестник УГАТУ*. 2017. Т. 21, № 2 (76). С. 3–16. [V. P. Pavlov, "Transverse vibrations of a rod with variable cross sections and calculation of its eigenfrequencies by the method of splines," (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 21, no. 2 (76), pp. 3-16, 2017.]

6. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 543 с. [O. Zenkevich, *Finite element method in engineering*, (in Russian). Moscow: Mir, 1975.]

7. **Павлов В. П., Кудоярова В. М.** Возможности метода сплайнов и метода конечных элементов в задаче о больших перемещениях тонкого упругого стержня // *Вестник УГАТУ*. 2018. Т. 22, № 4 (82). С. 30–40. [V. P. Pavlov, "Spline-functions method for solving thermal conductivity problems," (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 22, no. 4 (82), pp. 30-40, 2018.]

8. **Басов К. А.** CATIA и ANSYS. Твердотельное моделирование. М.: ДМК-Пресс, 2011. 240 с. [K. A. Basov, *ANSYS and CATIA. Solid modeling*, (in Russian). Moscow: DMK-Press, 2011.]

9. **Павлов В. П.** Анализ спектра частот собственных колебаний стержня методом сплайнов // *Вестник УГАТУ*. 2016. Т. 20, № 4 (74). С. 16–22. [V. P. Pavlov, "Analysis of the spectrum of frequencies of own fluctuations of a rod by the method of splines," (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 20, no. 4 (74), pp. 16-22, 2016.]

10. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Метод сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с. [Yu. S. Zavalov, B. I. Kvasov, V. L. Miroshnichenko, *Method of spline-functions*, (in Russian). M.: Nauka, 1980.]

11. **Павлов В. П., Абдрахманова А. А., Абдрахманова Р. П.** Задача расчета стержней одномерным сплайном пятой степени дефекта два // *Математические заметки ЯГУ*. 2013. Т. 20, вып. 1. С. 50–59. [V. P. Pavlov, A. A. Abdrakhmanova, R. P. Abdrakhmanova, "The task of calculating the one-dimensional rods with a spline of the fifth degree of the defect two", (in Russian), in *Matematicheskie zapiski IGU*, vol. 20, issue. 1, pp. 50-59, 2013.]

12. **Павлов В. П.** Интегральный метод сплайнов для расчета частот собственных колебаний стержня и его возможности // *Вестник УГАТУ*. 2017. Т. 21, № 4 (78). С. 41–49. [V. P. Pavlov, "The integral method of splines for calculation of the natural frequencies of the rod and its capabilities",

(in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 21, no. 4 (78), pp. 41-49, 2017.]

13. **Zhernakov V. S., Pavlov V. P., Kudoyarova V. M.** The Spline-Method for Numerical Calculation of the Natural-Vibration Frequency of a Beam with Variable Cross-Section // *Proc. Engineering*. 2017. Vol. 206C. Pp. 710–715. [V. S. Zhernakov, V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, "The Spline-Method for Numerical Calculation of the Natural-Vibration Frequency of a Beam with Variable Cross-Section", in *Proc. Engineering*, vol. 206C, pp. 710-715, 2017.]

14. **Челомей В. Н.** Вибрации в технике: справочник. М.: Машиностроение, 1978. 352 с. [V. N. Chelomey. *Vibration in engineering: Reference book*, (in Russian). Moscow: Machine Engineering, 1978.]

15. **Письменный Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис-пресс, 2011. 608 с. [D. T. Pismenii, *Lecture notes on higher mathematics*, (in Russian). Moscow: Irispress, 2011.]

16. **Бахвалов Н. С.** Численные методы. Решения задач и упражнения: учебное пособие / Н. С. Бахвалов. М.: Бином, 2016. 352 с. [N. S. Bakhvalov, *Numerical methods. The solution of problems and exercises*, (in Russian). Moscow: Binom, 2016.]

17. **Пирумов У. Г.** Численные методы. М.: Юрайт, 2015. 422 с. [U. G. Pirumov, *Numerical method*, (in Russian). Moscow: Yurayt, 2015.]

ОБ АВТОРАХ

ПАВЛОВ Виктор Павлович, проф. каф. сопротивления материалов. Дипл. инж. по авиац. двигателям (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по динамике и прочности (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. динамики и прочности конструкций из композиционных материалов.

НУСРАТУЛЛИНА Лилия Ринатовна, ст. преп. каф. математики, дипл. математик (БашГУ, 2003). Готовит дис. о колебаниях упруго закрепленных стержней с переменным сечением.

METADATA

Title: The method of calculating natural frequencies and forms the transverse vibrations of a rod variable cross-section with elastic securing.

Authors: V. P. Pavlov¹, L. R. Nusratullina²

Affiliation:

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: ¹victor.pavlov.51@yandex.ru, ²mardliliya@yandex.ru

Language: Russian.

Source: *Vestnik UGATU* (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 23, no. 3 (85), pp. 24-38, 2019. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The paper presents a method of algebraic polynomials of the fifth degree to solve the differential equation of the fourth order, describing the bending vibrations of the elastically fixed rod of variable cross-section. To study the accuracy of the considered method, test problems with an accurate analytical solution are considered. The calculations are made for different coefficients of elasticity consolidate and estimated errors of the numerical calculations. It is shown that with a sufficiently dense grid, the method makes it possible to determine the frequencies

and shapes of the natural oscillations of a variable-section rod with an accuracy of five significant digits.

Key words: rods of variable cross-section; Fluctuations; Frequencies of natural oscillations; math modeling; forms of natural oscillations.

About authors:

PAVLOV, Victor Pavlovich, Prof., Dept. of Strength of Materials. Dipl. Engineer for Aircraft Engines (Ufa Aviation Inst., 1973). Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2005).

NUSRATULLINA, Liliya Rinatovna, Senior teacher of the chair Mathematics, specialist in mathematics (BSU, 2003).