УДК 519.2

Ф. С. НАСЫРОВ, Е. В. ГАПЕЧКИНА

О КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЕ ИТО ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ИТОВСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Из обобщенной формулы Ито получена классическая формула Ито. Построена формула, связывающая расширенный симметричный и симметричный интегралы. *Формула Ито, локальное время, стохастический интеграл Ито, обобщенный итовский интеграл, стохастический интеграл Стратоновича, симметричный интеграл, расширенный симметричный интеграл*

ВВЕДЕНИЕ

Одним из ключевых понятий современного стохастического исчисления является интеграл Ито. Теория стохастического интегрирования начиналась с интегрирования по броуновскому движению. Ито в 40-х гг. прошлого века вывел правила действий со стохастическими интегралами и знаменитую «формулу Ито». Максимально возможное обобщение стохастического интеграла и формулы Ито является важной задачей теории случайных процессов.

Известно, что в случае, когда $X(s) = X(s,\omega)$ – стандартный винеровский процесс, а непрерывная детерминированная функция $f(s,u)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial}{\partial u} f(s,u)$, формулу Ито можно записать в виде

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \\ = \int_0^t f(s, X(s)) dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} f(s, X(s)) ds, \tag{1}$$

где первое слагаемое в правой части равенства есть стохастический интеграл Ито, а в левой части – стохастический интеграл Стратоновича.

В настоящее время существует большое количество разного рода обобщений, с которыми можно познакомиться в работах [1, 3, 9, 10, 12]. Последнее обобщение формулы Ито представлено в работе [5]. Пусть $X(s)$, $s \in [0,1]$, – стандартный винеровский процесс, $f(s)$, $s \in [0,1]$, – непрерывная слева предсказуемая функция, для которой конечны стохастический интеграл Ито $\int_0^t f(s) dX(s)$ и расширенный симметричный интеграл $(E)\int_0^t f(\gamma^*(\alpha(s, X(s)), X(s))) * dX(s), t \in [0,1]$. Тогда справедлива формула

$$\int_0^t f(s) dX(s) = (E)\int_0^t f(\gamma^*(\alpha(s, X(s)), X(s))) * dX(s) - \\ - \lim_{m\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{2\varepsilon} [f_m(s, X(s)+\varepsilon) - f_m(s, X(s)-\varepsilon)] ds, \tag{2}$$

где

$$f_m(s,u) = f(s,u) 1(f(s,u) \le m),$$
$$f(s,u) = f(\gamma^*(\alpha(s,u),u)),$$
$$\gamma^*(x,u) = \inf\{s : \alpha(s,u) \ge x\},$$

а пределы есть пределы по вероятности.

Если вполне регулярная непрерывная функция $X(s)$, $s \in [0,1]$, обладает непрерывным по временному параметру s при п.в. u локальным временем $\alpha(s,u)$, то правую часть формулы (2) можно считать определением обобщенного интеграла Ито, если пределы в правой части понимать не в вероятностном, а в обычном смысле. Таким образом, формула (2) дает возможность без предположений о предсказуемости интегрантов построить интегралы итовского типа по определенным классам детерминированных непрерывных функций и случайных процессов, не являющихся мартингалами, если для них существуют расширенный симметричный интеграл и пределы в правой части формулы (2).

Возникают вопросы: как полученные формулы согласуются с первоначальной формулой Ито, какие свойства стохастических интегралов сохраняются, а какие нет. Цель данной работы – представить ответы на некоторые из этих вопросов.

Приведем необходимые обозначения и сведения. Множества $R = (-\infty, +\infty)$, *[0,t]*, *t>0*, предполагаются наделенными σ-алгебрами борелевских множеств, которые соответственно обозначаются B, B_t, $t > 0$; на этих подмножествах считается заданной мера Лебега $\lambda(.)$. Для непрерывной функции *X(s)*, $s \in [0, +\infty)$ положим

$$M(t) = \max\{X(s) : s \in [0,t]\},$$
$$m(t) = \min\{X(s) : s \in [0,t]\}.$$

Обозначим через sgn(x) знак вещественного числа *x*, через **1***(A)* – индикатор множества *A*, т. е. функцию, равную 1 на *A* и 0 вне A; далее всюду

$$a \wedge b = \min(a,b), \; a \vee b = \max(a,b),$$
$$\kappa(v, A, B) = \mathrm{sgn}(B - A) 1(A \wedge B < v < A \vee B).$$

Пусть *X(s)*, $s \in [0,1]$, борелевская вещественнозначная функция, $\tau(.)$ – мера на σ – алгебре B_1 борелевских множеств отрезка *[0,1]*.

Если мера $\nu_t(\Gamma) = \int_0^t 1(X(s) \in \Gamma) ds$, $\Gamma \in B$, $t \in [0,1]$, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то производная Радона–Никодима

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №№ 04-01-00286, 05-01-97909.

$$\alpha(t,u) \equiv \frac{dv_t}{d\lambda}(u)\,,\ u \in R\,,$$

называется *локальным временем* функции *X(s)*. Говорят, что случайный процесс обладает локальным временем, если почти все его траектории имеют локальное время. Оказывается, можно всегда считать, что локальное время измеримо как функция двух переменных и является при каждом *u* неубывающей непрерывной справа функцией по *t*; меру на B_1, которую она порождает, мы будем обозначать $\alpha(ds,u)$. Из определения локального времени вытекает, что при п.в. *x*

$$\alpha(t,x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1(|\,X(s) - x\,| < \varepsilon)ds \qquad (3)$$

и для любой ограниченной борелевской функции *f(s,u)* (см. [11]) справедлива формула

$$\int_0^t f(s, X(s))ds = \int_R \int_0^t f(s,u)\varepsilon(ds,u)du\,.$$

Назовем непрерывную функцию *X(s)*, $s \in [0,1]$ с локальным временем $\alpha(t,u)$ *вполне регулярной*, если для любого отрезка $[t_1,t_2]$ справедливо равенство

$$\int_{m(t_1,t_2)}^{M(t_1,t_2)} 1(\alpha([t_1,t_2],u) = 0)du = 0\,.$$

В [6] показано, что типичная траектория винеровского процесса вполне регулярна. Ряд общих сведений о локальных временах детерминированных функций и случайных процессов приведен в работах [2,4,11].

Рассмотрим разбиения T_n, $n \in N$, отрезка [0,t]: $T_n = \{t_k^{(n)}\}$, $0 = t_0^{(n)} \le t_1^{(n)} \le \ldots \le t_k^{(n)} \le \ldots \le t_{m_n}^{(n)} = t$, $n \in N$, такие, что $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in N$, и $\lambda_n = \max_k \left|t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right| \to 0$, при $n \to \infty$. Через $X^{(n)}(s)$, $s \in [0,t]$, обозначим ломаную, построенную по функции *X(s)* и отвечающую разбиению T_n. Введем следующие обозначения: $\Delta t_k^{(n)} = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}$, $\left[\Delta t_k^{(n)}\right] = \left[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}\right]$, $\Delta X_k^{(n)} = X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})$.

Определение. Пусть X(s) – произвольная непрерывная функция, тогда *симметричным интегралом* называется

$$\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \int_{[\Delta t_k^{(n)}]} f(s, X^{(n)}(s))ds\Delta X_k^{(n)},$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений T_n, $n \in N$.

Достаточное условие существования симметричного интеграла - так называемое *условие (S)* (см. [7]).

Определение. Будем говорить, что пара функций *X(s)*, $s \in [0,1]$, и *f(s,u)*, $s \in [0,1]$, $u \in R$, удовлетворяет *условию (S)* на [0,t], если:

(a) Функция *X(s)*, $s \in [0,t]$, непрерывна;

(b) При п.в. *u* функция *f(s,u)*, $s \in [0,t]$, имеет ограниченное изменение и непрерывна справа по $s \in [0,1]$;

(c) При п.в. *u* справедливо равенство $\int_0^t 1(X(s) = u)\,|\,f\,|\,(ds,u) = 0$, где при каждом *u* функция *|f|(s,u)* есть полное изменение функции *f(τ,u)* по переменной *τ* на отрезке [0,s];

(d) Полное изменение *|f|(t,u)* функции *f(s,u)* по переменной *s* на отрезке [0,t] локально суммируемо по *u*.

Пусть функции *X(s)* и *f(s,u)* удовлетворяют условию (S) на [0,t], тогда симметричный интеграл может быть вычислен по формуле

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) =$$
$$= \int_{X(0)}^{X(t)} f(t,v)dv - \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^t \kappa(v, X(0), X(\tau)) f(d\tau, v))dv,$$

где

$M(t) = max\{X(s) \colon s \in [0,t]\}$, $m(t) = min\{X(s) \colon s \in [0,t]\}$,

$\kappa(v,A,B) = \mathrm{sgn}(B - A)1(A \wedge B < v < A \vee B)$.

Для симметричного интеграла справедлива формула стохастического дифференциала в форме Стратоновича:

$$f(t, X(t)) - f(0, X(0)) =$$
$$= \int_0^t f_u^{/}(s, X(s)) * dX(s) + \int_0^t f_s^{/}(s, X(s))ds.$$

Симметричный интеграл совпадает с интегралом Стратоновича в случае, когда оба интеграла существуют и *X(s)* есть винеровский процесс.

В простейшем случае, когда *f(X(s)) ≡ X(s)*, даже интегральные суммы симметричного интеграла и интеграла Стратоновича совпадают.

Пусть *X(s)*, $s \in [0,t]$ – непрерывная функция с локальным временем $\alpha(s,u)$, *f(s)*, $s \in [0,t]$ – суммируемая функция. С функцией *f(s)* можно связать некоторые специальным образом построенные функции, зависящие только от функций *X(s)* и $\xi(s) = \alpha(s, X(s))$ и эквивалентные ей по мере Лебега, например, $f(s) = f_t^*(\xi(s), X(s))$ при п.в. $s \in [0,t]$, где $f_t^*(x,u) = f(\gamma^*(x,u))1(\alpha(t,u) \ge x)$, $\gamma^*(x,u) = \inf\{s : \alpha(s,u) \ge x\}$. Функция $f_t^*(x,u)$, также как и функция $f_t^*(\xi(s), X(s))$, называется *представлением функции f(s)* на отрезке [0,t].

Определение. *Расширенным симметричным интегралом* называется (см. [7]) интеграл по специальным образом построенному заряду по одному из представлений функции *f(s)*, например:

$$(E)\int_0^t f(\xi(s), X(s)) * dX(s) \equiv \int_{R^+ \times R} f_t^*(x,u)G_t(dxdu)\,,$$

где $G_t(dxdu)$ – заряд, однозначно определяющийся своими значениями на «прямоугольниках» A×B:

$$G_t(A \times B) \equiv \int_{X(0)}^{X(t)} 1((\alpha(t,u),u) \in A \times B)du -$$
$$- \frac{1}{2}\int_R 1((\alpha(t,u),u) \in A \setminus \{0\} \times B)\mathrm{sgn}(u - X(0))du +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_R 1(u \in B, \alpha(t,u) > 0)\mathrm{sgn}(u - X(0))du1(0 \in A).$$

Можно показать (см. [7]), что расширенный симметричный интеграл для определенного класса интеграндов есть несобственный симметричный интеграл, т. е. представляется в виде предела симметричных интегралов. Пусть функции *X(s)*, $s \in [0,+\infty)$, и *f(s,u)*, $s \in [0,+\infty)$, $u \in R$, удовлетворяют условию (S), и функция *X(s)* обладает локальным временем $\alpha(t,u)$. Рассмотрим функцию вида $f_\varepsilon(s,u) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} f(\gamma^*(\alpha(s,v),v),v)dv$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^t f_\varepsilon(s,X(s)) * dX(s) = \int_{R^+\times R} f_t^*(x,u)G_t(dxdu).$$

Расширенный симметричный интеграл может быть вычислен по формуле

$$\int_{R^+\times R} f_t^*(x,u)G_t(dxdu) = \int_{X(0)}^{X(t)} f_t^*(\alpha(t,u),u)du - \frac{1}{2}\int_{m(t)}^{M(t)}[f_t^*(\alpha(t,u),u) - f_t^*(0,u)]\mathrm{sgn}(u - X(0))du. \tag{4}$$

Таким образом, расширенный симметричный интеграл строится для определенного класса интеграндов вида $f(\xi(s),X(s))$, и этот класс достаточно широк в том смысле, что для каждой суммируемой на $[0,t]$ функции *f(s)* существуют различные представления, для которых расширенный симметричный интеграл может быть определен.

ВЫВОД КЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ ИТО

Наша ближайшая цель – вывести из обобщенной формулы Ито (2) вариант классической формулы Ито.

Лемма. *Пусть X(s), $s \in [0,1]$ – непрерывная вполне регулярная функция с локальным временем $\alpha(t,u)$, непрерывным по переменной t при п. в. u. Тогда справедливы следующие соотношения:*

(a) $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\gamma^*(\alpha(s,X(s)+\varepsilon),X(s)+\varepsilon) = s$ при п.в. *s*;

(b) $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\gamma^*(\alpha(s,X(s)-\varepsilon),X(s)-\varepsilon) = s$ при п.в. *s*;

(c) $\int_0^t 1(X(s)>u) * dX(s) = \int_0^t 1(X(s)>u)dX(s) + \frac{1}{2}\alpha(t,u)$. (5)

Доказательство. Сначала докажем соотношение (a). Согласно определению функции $\gamma^*(x,u)$ и непрерывности локального времени $\alpha(t,u)$ по переменной *t* при п. в. *u* и для *s<t* имеем

$$\gamma^*(\alpha(s,u),u) = \int_0^t 1(\alpha(\tau,u) < \alpha(s,u))d\tau = \int_0^t 1(\alpha([\tau,s],u) > 0)d\tau.$$

Поэтому в силу вполне регулярности функции *X(s)* величина $\gamma^*(\alpha(s,u),u)$ при п. в. *u* равна

$$\int_0^t 1(m(\tau,s) < u < M(\tau,s))d\tau = t - \int_0^t 1(u < m(\tau,s))d\tau - \int_0^t 1(u > M(\tau,s))d\tau.$$

Следовательно, в силу существования локального времени для *X(s)* достаточно убедиться, что оба неотрицательных выражения $\int_0^t 1(0 < X(s) - m(\tau,s) < \varepsilon)d\tau$ и $\int_0^t 1(0 > X(s) - M(\tau,s) > \varepsilon)d\tau$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Предположим, что найдется множество $T_0 \in B(R)$ такое, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t 1(X(s) - m(\tau,s) < \varepsilon)d\tau > 0 \text{ при } \tau \in T_0.$$

В силу вложенности множеств, определяющих индикаторы подынтегральных выражений, нетрудно убедиться, что предел равен $\int_0^t 1(X(s) - m(\tau,s) = 0)d\tau$.

Следовательно, ввиду предположений леммы и теоремы Фубини

$$\int_0^t\int_{T_0} 1(X(s) - m(\tau,s) = 0)dsd\tau > 0.$$

Но последнее противоречит тому факту, что отраженная функция $X(s) - m(\tau,s)$ обладает локальным временем, если для функции *X(s)* локальное время существует. Доказательство соотношения (b) проводится аналогично.

Докажем справедливость формулы (c), используя формулу (2). Действительно, положим $f(s,v) \equiv f(v) = 1(v > u)$ в формуле (2). Для такой подынтегральной функции расширенный симметричный интеграл сводится к симметричному интегралу, а предел в правой части формулы (2) прямо вычисляется по формуле (3) и оказывается равным $\alpha(t,u)$. Заметим, что формула (5) является обобщением формулы Танаки (см. [8]) на случай произвольной непрерывной функции *X(s)* с локальным временем $\alpha(t,u)$, непрерывным по *t* при п.в. *u*.

Теорема. *Пусть X(s), $s \in [0,1]$ – вполне регулярная непрерывная функция с локальным временем $\alpha(t,u)$, непрерывным по t при п. в. u, f(s,u) – произвольная непрерывная слева функция, имеющая совместно непрерывные частные производные первого порядка $f_s'(s,u)$ и $f_u'(s,u)$. Тогда из определения обобщенного интеграла Ито для X(s), которое дается формулой (2), вытекает классическая формула Ито*

$$\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) = \int_0^t f(s,X(s))dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f_u'(s,X(s))ds,$$

где в левой части стоит симметричный интеграл.

Доказательство. Для удобства разобьем доказательство на шаги.

Шаг 1. Пусть *f(s,u)*, $(s,u) \in [0,1]\times R$ – произвольная функция с непрерывными частными производными первого порядка. Выведем формулу Ито сначала для функций, удовлетворяющих дополнительному предположению $f(0,u) \equiv 0$.

В силу формулы для вычисления расширенного симметричного интеграла (4) и того факта, что $s \le \gamma^*(\alpha(t,u),u)$, если $s \le t$, имеем

$$(E)\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) =$$

$$= \int_{X(0)}^{X(t)}\int_0^t f_s^/(s,u)1(s<\gamma^*(\alpha(t,u),u))dsdu -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{m(t)}^{M(t)}\int_0^t f_s^/(s,u)1(s<\gamma^*(\alpha(t,u),u))\operatorname{sgn}(u-X(0))dsdu.$$

Ввиду вполне регулярности функции *X(s)* для $s \le t$ неравенство $s \le \gamma^*(\alpha(t,u),u)$ при п. в. *u* равносильно неравенству *m(s,t)<u<M(s,t)*. Поэтому, ввиду соотношения

$1(m(s,t) < u < M(s,t)) = 1 - 1(u \le m(s,t)) - 1(u \ge M(s,t))$,

расширенный симметричный интеграл равен

$$\int_{X(0)}^{X(t)} f(t,u)du -$$

$$-\int_0^t\int_{X(0)}^{X(t)} f_s^/(s,u)[1(u<m(s,t))+1(u>M(s,t))]ds\,du -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{m(s,t)}^{M(s,t)} f_s^/(s,u)\operatorname{sgn}(u-X(0))ds\,du.$$

Далее, поскольку среднее слагаемое равно нулю, то расширенный симметричный интеграл равен

$$\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) +$$

$$\int_0^t\left[\int_{X(0)}^{X(t)} f_s^/(s,u)du - \frac{1}{2}\int_{m(s,t)}^{M(s,t)} f_s^/(s,u)\operatorname{sgn}(u-X(0))du\right]ds.$$

Выражение в квадратных скобках в правой части последнего равенства можно преобразовать следующим образом:

$$1(X(0)<X(s))\int_{[X(0),X(s)]} f_s^/(s,u)du -$$

$$-1(X(0)\ge X(s))\int_{[X(s),X(0)]} f_s^/(s,u)du -$$

$$-\frac{1}{2}1(X(0)<X(s))\left[\int_{X(0)}^{X(s)} - \int_{m(s,t)}^{X(0)} + \int_{X(s)}^{M(s,t)}\right] f_s^/(s,u)du -$$

$$-\frac{1}{2}1(X(0)\ge X(s))\left[\int_{X(0)}^{M(s,t)} - \int_{m(s,t)}^{X(s)} - \int_{X(s)}^{X(0)}\right] f_s^/(s,u)du =$$

$$= \frac{1}{2}1(X(0)<X(s))\left[\int_{m(s,t)}^{X(s)} - \int_{X(s)}^{M(s,t)}\right] f_s^/(s,u)du +$$

$$+\frac{1}{2}1(X(0)\ge X(s))\left[\int_{m(s,t)}^{X(s)} - \int_{X(s)}^{M(s,t)}\right] f_s^/(s,u)du =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{m(s,t)}^{X(s)} - \int_{X(s)}^{M(s,t)}\right] f_s^/(s,u)du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{m(s,t)}^{M(s,t)} f_s^/(s,u)\operatorname{sgn}(X(s)-u)du.$$

Таким образом, мы пришли к формуле

$$(E)\int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) = \int_0^t f(s,X(s)) * dX(s) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{m(s,t)}^{M(s,t)} f_s^/(s,u)\operatorname{sgn}(u-X(s))duds.$$

Шаг 2. Вычислим последнее выражение в обобщенной формуле Ито, равное

$$\delta \equiv \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Delta(s,\varepsilon)ds,$$

где

$$\Delta(s,\varepsilon) = f(\gamma^*(\alpha(s,X(s)+\varepsilon),X(s)+\varepsilon),X(s)+\varepsilon) -$$
$$- f(\gamma^*(\alpha(s,X(s)-\varepsilon),X(s)-\varepsilon),X(s)-\varepsilon).$$

Положим $\Delta(s,\varepsilon) = \Delta_1(s,\varepsilon)+\Delta_2(s,\varepsilon)+\Delta_3(s,\varepsilon)$, где

$$\Delta_1(s,\varepsilon) = f(\gamma^*(\alpha(s,X(s)+\varepsilon),X(s)+\varepsilon),X(s)+\varepsilon) -$$
$$- f(\gamma^*(\alpha(s,X(s)+\varepsilon),X(s)+\varepsilon),X(s)),$$
$$\Delta_2(s,\varepsilon) = f(\gamma^*(\alpha(s,X(s)+\varepsilon),X(s)+\varepsilon),X(s)) -$$
$$- f(\gamma^*(\alpha(s,X(s)-\varepsilon),X(s)-\varepsilon),X(s)),$$
$$\Delta_3(s,\varepsilon) = f(\gamma^*(\alpha(s,X(s)-\varepsilon),X(s)-\varepsilon),X(s)) -$$
$$- f(\gamma^*(\alpha(s,X(s)-\varepsilon),X(s)-\varepsilon),X(s)-\varepsilon).$$

Поскольку функция *f(s,u)* обладает совместно непрерывной частной производной $f_u^/(s,u)$, то, записав приращения $\Delta_k(s,\varepsilon)$, *k=1,3*, согласно формуле Ньютона – Лейбница как интегралы от производной $f_u^/(s,u)$, для *k=1,3*, в силу леммы имеем

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Delta_k(s,\varepsilon)ds = \int_0^t f_u^/(s,X(s))ds.$$

Так как $\Delta_2(s,\varepsilon)$ равно

$$\int_0^s f_\tau^/(t,X(s))[1(\tau<\gamma^*(\alpha(s,X(s)+\varepsilon),X(s)+\varepsilon)) -$$
$$-1(\tau<\gamma^*(\alpha(s,X(s)-\varepsilon),X(s)-\varepsilon))]ds,$$

то в силу теоремы Фубини выражение

$$\delta_1 = \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Delta_2(s,\varepsilon)ds$$

можно представить в виде

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{4\varepsilon}\int_0^t\int_\tau^t f_\tau^/(\tau,X(s))[1(\tau<\gamma^*(\alpha(s,X(s)+\varepsilon),X(s)+\varepsilon)) -$$
$$-1(\tau<\gamma^*(\alpha(s,X(s)-\varepsilon),X(s)-\varepsilon))]dsd\tau.$$

Ввиду соображений о вполне регулярных функциях, использованных выше, выражение в квадратных скобках при п. в.*s* равно

$$1(m(\tau,s) < X(s)+\varepsilon < M(\tau,s)) -$$
$$-1(m(\tau,s) < X(s)-\varepsilon < M(\tau,s)) =$$
$$= 1(-\varepsilon < X(s)-M(\tau,s) < 0) - 1(0 < X(s)-m(\tau,s) < \varepsilon).$$

Следовательно, записав в выражении δ_1 с помощью приведенных выше формул внутренний интеграл как разность интегралов с локальными временами отраженных вверх и вниз функций (см. [8]), в силу теорем Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и дифференцировании интегралов Лебега получим

$$\delta_1 = \frac{1}{4}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_\tau^t f_\tau^/(\tau,X(s))\big[1(-\varepsilon < X(s)-M(\tau,s) < 0) -$$
$$-1(0 < X(s)-m(\tau,s) < \varepsilon)\big]dsd\tau =$$
$$\frac{1}{4}\int_0^t\int_\tau^t f_\tau^/(\tau,X(s))\big[\beta_M^{(\tau)}(ds,0) - \beta_m^{(\tau)}(ds,0)\big]d\tau.$$

Заметим, что из задачи отражения (см. [2], [8]) и аналога формулы Танаки (5) вытекает следующее представление локальных времен отраженных в нуле вверх и вниз функций на временном отрезке $[\tau,1]$:

$$\beta_m^{(\tau)}([\tau,p],0)=2(X(\tau)-m(\tau,p)),$$
$$\beta_M^{(\tau)}([\tau,p],0)=2(M(\tau,p)-X(\tau)).$$

Поэтому, воспользовавшись этими представлениями локальных времен, имеем

$$\delta_1=\frac{1}{2}\int_0^t\int_\tau^t f_\tau^{/}(\tau,X(s))M(\tau,ds)d\tau-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_\tau^t f_\tau^{/}(\tau,X(s))m(\tau,ds)d\tau.$$

Поскольку функции $s\to M(s,\tau)$, $s\to m(s,\tau)$ растут только в точках $s:X(s)=M(s,\tau)$, $s:X(s)=m(s,\tau)$ соответственно, то в силу теоремы о замене переменных в интеграле Лебега получим

$$\delta_1=\frac{1}{2}\int_0^t\int_\tau^t f_\tau^{/}(\tau,M(\tau,s))M(\tau,ds)d\tau-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_\tau^t f_\tau^{/}(\tau,m(\tau,s))m(\tau,ds)d\tau=$$
$$=\int_0^t\left[\frac{1}{2}\int_{m(\tau,t)}^{X(\tau)} f_\tau^{/}(\tau,u)du-\frac{1}{2}\int_{X(\tau)}^{M(\tau,t)} f_\tau^{/}(\tau,u)du\right]d\tau.$$

Шаг 3. Подставляя все полученные выражения в обобщенную формулу Ито (2) получим классическую формулу Ито в случае, когда $f(0,u)\equiv 0$. Чтобы избавиться от этого дополнительного условия заметим, что выше мы доказали, в частности, формулу Ито для гладких функций вида *f(s,u)=f(u)*. Для произвольной гладкой функции *f(s,u)* имеем: *f(s,u)= =[f(s,u)- f(0,u)]+ f(s,u)*, поэтому, в силу аддитивности доказанной выше формулы Ито, последняя будет справедлива и без дополнительного условия, наложенного на функцию *f(s,u)*.

Следствие. *Пусть X(s), $s\in[0,1]$ – непрерывная вполне регулярная функция с локальным временем $\alpha(t,u)$, непрерывным по переменной t при п. в. u, а f(s,u), $s\in[0,1]$ – функция с непрерывной первой производной $f_s^{/}(s,u)$ и такая, что пара (X(s),f(s,u)) обладает свойством (S). Тогда справедлива формула, связывающая симметричный и расширенный симметричный интегралы:*

$$(E)\int_0^t f(s,X(s))*dX(s)=\int_0^t f(s,X(s))*dX(s)-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{m(s,t)}^{M(s,t)} f_s^{/}(s,u)\operatorname{sgn}(u-X(s))duds.$$

Замечание. Из последней формулы следует, что если подынтегральная функция имеет вид *f(s,X(s))= =f(X(s))*, то расширенный симметричный интеграл совпадает с симметричным. Если, к тому же *X(s)* – стандартный винеровский процесс, то в этом случае расширенный симметричный интеграл есть обычный стохастический интеграл Стратоновича (см. [7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бородин, А. Н.** Асимптотическое поведение локальных времен возвратных случайных блужданий с бесконечной дисперсией / А. Н. Бородин // Теория вероятности и ее применение. 1984. Т. 29, вып. 2 (266). С. 312–326.
2. **Ватанабе, С.** Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанбе, Н. Икеда. М. : Наука, 1986. 448 с.
3. **Маккин, Г.** Стохастические интегралы / Г. Маккин. М. : Мир, 1972.
4. **Насыров, Ф. С.** О локальных временах для функций и случайных процессов / Ф. С. Насыров // Теория вероятности и ее применение. 1995. Т. 40, вып. 4. С. 798–812.
5. **Насыров, Ф. С.** Обобщенная формула Ито и потраекторные итовские интегралы / Ф. С. Насыров // Вестник УГАТУ. 2005. Вып. 6 (1). С. 33–40.
6. **Насыров, Ф. С.** Об отражении непрерывных функций и случайных процессов, обладающих локальными временами / Ф. С. Насыров // Теория вероятности и ее применение. 1995. Т. 40, вып. 4. С. 665–669.
7. **Насыров, Ф. С.** Симметричные интегралы и их применение в финансовой математике / Ф. С. Насыров // Труды МИРАН. 2002. Т. 237. С.265–278.
8. **Чжун, К.** Введение в стохастическое интегрирование / К. Чжун, Р. Уильямс. М. : Мир, 2002. 152 с.
9. **Bouleau, N.** Sur la variation quadratique des temps locaux de certaines semi-martingales / N. Bouleau, M. Yor // C.r. Acad. sci. Paris, 1981. Serie I. V. 292, No. 9. P. 491–494.
10. **Follmer, H.** Quadratic covariation and an extension of Ito's formula / H. Follmer, P. Protter, A. Shiryayev // Bernoulli. 1995. V. 1. P. 149 – 169.
11. **Geman, D.** Occupation densities / D. Geman // The Annals of Probability. 1980. V. 8, No. 1. P. 1–67.
12. **Wang, A.** Generalized Ito's formula and additive funstionals of Brownian motion / A. Wang // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. 1977. B. 41, H. 2. S. 153–159.