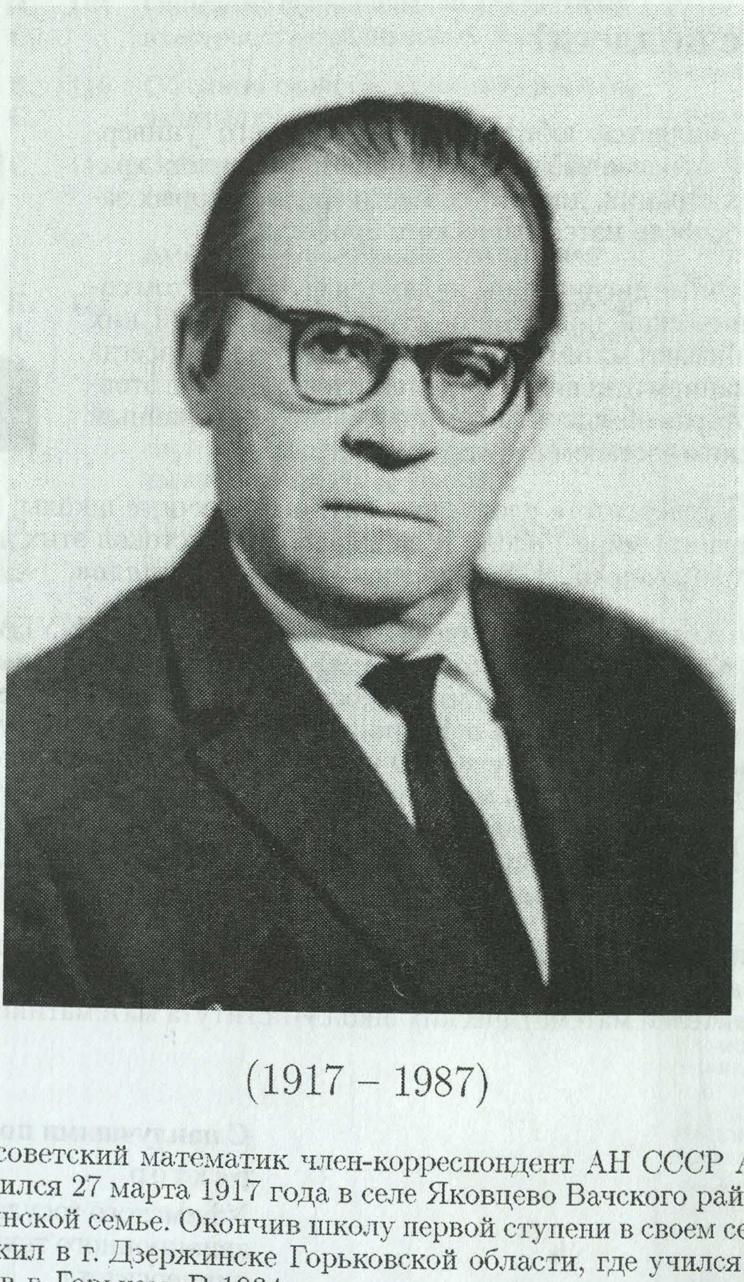
ЗНАМЕНАТЕЛЬНЫЕ ДАТЫ

АЛЕКСЕЙ ФЕДОРОВИЧ ЛЕОНТЬЕВ (К ДЕВЯНОСТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)



(1917 – 1987)

Выдающийся советский математик член-корреспондент АН СССР Алексей Федорович Леонтьев родился 27 марта 1917 года в селе Яковцево Вачского района Горьковской области в крестьянской семье. Окончив школу первой ступени в своем селе, дальнейшую учебу он продолжил в г. Дзержинске Горьковской области, где учился в школе второй ступени, а затем в г. Горьком. В 1934 году, по окончании девяти классов, Алексей Федорович поступил на физико-математический факультет Горьковского университета. Закончив с отличием университет, он там же поступил в аспирантуру к И. Р. Брайцеву и в 1942 году защитил диссертацию на степень кандидата физико-математических наук. После защиты Алексей Федорович стал работать в г. Козьмодемьянске в Марийском пединституте сначала доцентом, а затем заведующим кафедрой математического анализа. В трудные военные годы, совмещая преподавательскую деятельность с научными исследованиями, он получил ряд важных научных результатов, привлекших внимание специалистов в области теории функций.

В 1945 году Алексей Федорович был принят в докторантуру Математического института им.В. А. Стеклова АН СССР. По окончании докторантуры он в 1948 г. защитил диссертацию на степень доктора физико-математических наук. Официальные оппоненты М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев признали диссертацию выдающейся.

После защиты Алексей Федорович работал заведующим кафедрой теории функций Горьковского университета. В 1954 году он переехал в Москву, где заведовал кафедрой высшей математики, а затем кафедрой спецкурсов высшей математики Московского энергетического института, работал при этом по совместительству старшим научным сотрудником Математического института им.В. А. Стеклова. С 1962 года Алексей Федорович перешел на основную работу в Математический институт, продолжая при этом по совместительству педагогическую деятельность в энергетическом институте.

Признанием больших научных заслуг было избрание Алексея Федоровича в 1970 году членом-корреспондентом АН СССР. С 1971 года он работает в Уфе заведующим сектором теории функций Башкирского филиала АН СССР и одновременно с этим заведует кафедрой теории функций и функционального анализа Башкирского университета. Под руководством Алексея Федоровича в Уфе сформировалась сильная научная школа, имеющая высокий всесоюзный и международный авторитет.

Алексей Федорович уделял очень большое внимание подготовке квалифицированных кадров, постоянно стремился привлечь к математическим исследованиям талантливую молодежь. Он руководил научно-исследовательскими семинарами, много и терпеливо занимался с аспирантами. 35 его учеников защитили кандидатские диссертации, 6 из них стали докторами физико-математических неук. Среди его учеников — представители многих национальностей как нашей страны, так и других стран.

Алексей Федорович был прекрасным педагогом. Его лекции всегда являли собой великолепный пример умелого сочетания высокого научного уровня с ясностью и законченностью изложения. Работая в Московском энергетическом институте, Алексей Федорович в течение 15 лет руководил многочисленной математической кафедрой, отдавая исключительно много сил и энергии делу повышения уровня преподавания математики во втузах нашей страны.

Наряду с научной и педагогической деятельностью, Алексей Федорович постоянно вел большую общественную работу. Многие годы он был членом экспертной комиссии и заместителем председателя экспертной комиссии по математике при ВАКе. Более десяти лет он состоял членом редколлегии журнала "Математические заметки", членом Советского сектора редколлегии международного советско-венгерского журнала "Analysis mathematica", является заместителем председателя правления республиканского общества "Знание"в Башкирии.

Алексей Федорович был человеком редких душевных качеств. Исключительно скромный, деликатный, доброжелательный, большой труженик, он — пример внимательного и доброго отношения к окружающим. За заслуги в развитии науки, подготовке научных кадров и в связи с 70-летием А. Ф. Леонтьев награжден орденом Октябрьской Революции.

Большой цикл работ А. Ф. Леонтьева посвящен созданному им важному направлению - исследованию свойств последовательностей полиномов из экспонент. Результаты подытожены в его монографии "Последовательности полиномов из экспонент" (М.: Наука, 1980).

Рассматривается система экспонент неполная во всей плоскости. Образованы линейные комбинации экспонент из этой системы. Изучаются свойства последовательностей этих линейных комбинаций — полиномов из экспонент, которые равномерно сходятся в области, где система экспонент не полна. Примером такого свойства является следующий результат: если показатели вещественны и имеют конечную плотность, то из сходимости последовательности полиномов экспонент в области, содержащей в себе вертикальный отрезок определенной длины (связанной с плотностью), вытекает сходимость этой последовательности в некоторой вертикальной полосе, а если показатели положительны, то сходимость будет в полуплоскости. При условии, что показатели положительны и имеют конечную верхнюю плотность, сходимость будет в бесконечной области, отличной вообще от полуплоскости (описано асимптотическое поведение границы области). Класс предельных функций рассматриваемых последовательностей шире класса функций, представимых рядами экспонент.

Указанные предельные функции удовлетворяют уравнению свертки с характеристической функцией, нулями которой являются показатели экспонент. Частный случай уравнения свертки — разностные уравнения с постоянными коэффициентами. Алексей Федорович привел пример разностного уравнения со следующим свойством: его некоторое решение является аналитической функцией в горизонтальной полосе (содержащей вещественную ось), соответствующий решению ряд из элементарных решений в виде экспонент всюду расходится, некоторая подпоследовательность частных сумм этого ряда сходится к решению во всей полосе. В том случае, когда решение уравнения свертки регулярно в бесконечной области с определенными свойствами, например, в выпуклой области, указан способ суммирования рада из элементарных решений к самому решению.

Последовательности полиномов из экспонент нашли ряд важных применений. Одно из них связано с интерполяцией. Оказалось, что для того, чтобы существовала целая функция экспоненциального типа, которая принимает заданные значения в заданных точках (узлах), лежащих на полуоси, необходимо и достаточно, чтобы определенным образом составленная последовательность полиномов из экспонент сходилась в некоторой полуплоскости. Этот результат был обобщен затем на случай произвольных узлов и функций произвольного конечного порядка.

Другие применения связаны с полнотой системы экспонент. Интересен сам факт использования неполных систем для доказательства полноты других систем. Остановимся лишь на одном результате. Речь идет о полноте системы экспонент с положительными показателями на кривой. Известная теорема Мюнтца утверждает, что для полноты на отрезке вещественной оси необходимо и достаточно, чтобы ряд из обратных величин показателей расходился. Методы доказательства этой теоремы не переносятся на случай, когда вместо отрезка берется кривая. Используя свойства последовательностей полиномов из экспонент и квазианалитические классы функций на кривой, Алексею Федоровичу удалось доказать, что при некоторых ограничениях на кривую полнота системы экспонент имеет место на кривой, если ряд из обратных величин показателей расходятся. Отметим еще применение к выяснению структуры замкнутых подпространств (функций аналитических в заданной области), инвариантных относительно операции дифференцирования.

Рассмотрим экспоненциальные одночлены, входящие в инвариантное подпространство. Доказано новым методом, что если область — бесконечная, то каждой функции из инвариантного подпространства соответствует ряд на указанных экспоненциальных одночленов, который определенным способом суммируется к рассматриваемой функции.

Другой большой цикл исследований Алексея Федоровича относится к представлению произвольных аналитических функций рядами экспонент. Ряд экспонент с показателями, лежащими на одном луче, представляют функцию, ограниченную в полуплоскости. Ряд экспонент с показателями, лежавший на двух лучах, представляет функцию, ограниченную в общей части двух полуплоскостей (в угле или полосе). Следовательно, любую функцию нельзя представить рядом экспонент, в котором показатели лежат на одном или двух лучах. Эти простые соображения почему-то не позволяли предполагать, что произвольные аналитические функции можно представлять рядами экспонент. В 1965 году Алексей Федорович, занимаясь функциональными уравнениями, обнаружил, что если показатели расположить на трех лучах, то в треугольнике можно произвольные аналитические функции раскладывать в ряды экспонент. С этого момента и стало развиваться новое важное направление в теории функций — представление аналитических функций рядами экспонент. Результаты, полученные Алексеем Федоровичем до 1975 года, подытожены в его монографии "Ряды экспонент" (М.: Наука, 1976). Области сходимости ряда экспонент — выпуклая область. Поэтому речь пойдет о представлении аналитических функций рядами экспонент именно в выпуклых областях.

Возьмем произвольную выпуклую ограниченную область. Выберем затем какую-нибудь целую функцию экспоненциального типа, индикатриса роста которой равна опорной функции области, симметричной данной области относительно вещественной оси. Рассмотрим систему экспонент с показателями, являющимися нулями выбранной целой функции. Строится биортогональная система функций (эти функции регулярны вне области). С помощью этой биортогональной системы произвольной функции, аналитической в замкнутой области, сопоставляется естественным образом ряд экспонент (для коэффициентов выписываются формулы). Этот ряд вообще не сходится. Тем не менее имеет место теорема единственности: если все коэффициенты ряда равны нулю, то функция тождественно равна нулю.

Получены необходимые и достаточные условия на выбранную функцию экспоненциального типа, при которых ряд всегда сходится в области и сходится к своей функции. Оказалось, что функции экспоненциального типа с указанными условиями всегда можно выбрать. Поэтому верна теорема: какова бы ни была выпуклая конечная область, имеется система экспонент (она зависит только от области) такая, что любую функцию, аналитическую в замкнутой области, можно в открытой области представить рядом по этой системе экспонент.

Дальнейшие исследования показали, что и любую функцию, аналитическую лишь в открытой области, так же можно представить в области рядом экспонент. Потом было получено разложение аналитических функций в ряды экспонент в бесконечной выпуклой области, когда ветви границы уходят в бесконечность, начиная с некоторого места, по прямолинейным лучам (случай угла, полосы и т.д.).

Следует отметить следующую очень интересную теорему: пусть область — левая полуплоскость. Тогда имеется последовательность положительных показателей такая, что любую функцию, аналитическую в левой полуплоскости, можно представить с точностью до целой функции рядом экспонент с указанными показателями. В случае, когда область — произвольная выпуклая бесконечная область, отличная от всей плоскости (случай плоскости будет рассмотрен ниже), была построена схема доказательства о разложении в ряд экспонент совершенно аналогичная случаю ограниченной области.

Алексеем Федоровичем был получен ряд результатов о представлении функций рядами экспонент в замкнутой выпуклой области, если функции регулярны в открытой области и имеют определенную гладкость в замкнутой области.

Вместе с тем был рассмотрен вопрос о разложении в открытой области в ряд экспонент функций, которые при приближении к границе имеют определенный рост. Ставится вопрос о разложениях, которые обладают свойством: сумма ряда из модулей членов ряда имеет тот же рост, что и сама функция при приближении к границе.

В процессе исследований Алексей Федорович столкнулся с квазианалитическим продолжением аналитических функций. На основании теоремы единственности, о которой речь шла выше, возник вопрос о восстановлении функции по известным коэффициентам ее ряда экспонент, если ряд вообще не сходится. Среди методов восстановления отметим метод, связанный с квазианалитическим продолжением. Рассмотрим простейшую ситуацию. Пусть показатели вещественны, плотность их равна нулю, а ряд из обратных величин модулей показателей расходится. В этом случае замкнутая область - отрезок вещественной оси. Возьмем функцию, аналитическую на отрезке, которая не удовлетворяет уравнению свертки, связанному с выбранными показателями. Соответствующий ей ряд экспонент разбивается на два ряда: ряд с положительными показателями и ряд с отрицательными. Оказывается, что первый ряд сходится в левой полуплоскости (граничная прямая проходит черев левый конец отрезка), причем все точки границыЁ— особые для суммы ряда; второй ряд сходится в правой полуплоскости (граничная прямая проходит через правый конец отрезка) и все точки границы — особые для сумм ряда; сумма первого ряда продолжается квазианалитически слева направо на весь рассматриваемый отрезок, сумма второго ряда квазианалитически продолжается справа налево на этот же отрезок; продолженные функция в сумме дают на отрезке искомую функцию, Последний результат привел к следующей замечательной теореме: если функция представляется рядом экспонент с комплексными показателями такими, что ряд из обратных величин модулей показателей сходится, то функция не продолжается квазианалитически через границу области регулярности функция (область регулярности выпуклая).

Перейдем теперь к представлению целых функций рядами экспонент. Показано, что любую целую функцию можно разложить в ряд экспонент, причем показатели можно выбрать лежащими на трех лучах.

Далее было показано, что любую целую функцию конечного порядка и данного типа можно разложить в ряд экспонент такой, что сумма ряда из модулей членов будет иметь тот же порядок и тот же тип. Возник вопрос о существовании разложений, при которых сумма ряда из модулей учитывала бы рост функции вдоль лучей. Отметим, что степенной ряд этим свойством не обладает, ибо сумма ряда из модулей членов степенного ряда имеет одинаковый рост вдоль всех лучей.

Вводится индикатриса роста (при данном порядке) суммы ряда из модулей членов (ряда экспонент). Установлено ее характерное свойство: произведение ее на радиус в степени, равной порядку, есть выпуклая функция от соответствующего комплексного переменного.

Получен следующий фундаментальный результат. Пусть задана описанная выше индикатриса. Тогда всякую целую функцию порядка больше единицы с индикатрисой роста не больше заданной можно разложить в ряд экспонент, обладающий свойством: индикатриса роста суммы ряда из модулей не превосходит заданную индикатрису. С помощью этого результата Алексей Федорович обнаружил следующий интересный факт: существует класс целых функций, представленных рядами экспонент, обладающий следующим свойством: индикатриса роста функции из этого класса может быть вычислена через модули коэффициентов ряда.

Описанные выше результаты, относящиеся к последовательностям полиномов из экспонент и разложению функций в ряды экспонент, обобщаются в той или иной степени на случай, когда вместо экспоненты берется целая функций конечного порядка, например, целая функция Миттаг-Леффлера. Относящиеся к этому также важному направлению результаты, полученные до 1980 года, подытожены в монографии "Обобщения рядов экспонент" (М.: Наука, 1981).

В последние годы Алексей Федорович занимался решением следующей задачи. Вместо экспоненты рассматривается обобщенная экспонента — целая функция экспоненциального типа. В соответствии с этим вместо ряда экспонент рассматривается ряд из обобщенных экспонент. Задача состоит в нахождении условий на обобщенную экспоненту, при которых любую функцию, аналитическую в выпуклой области (произвольно заданной) можно разложить в ряд обобщенных экспонент. Оказалось, что имеется широкий класс обобщенных экспонент, обладающих этим замечательным свойством.

Заключая, можно сказать, что Алексей Федорович создал новые важные направления и мощные методы исследования в теории функции.

Теперь в этих направлениях работают многие математики, в том числе многочисленные ученики Алексея Федоровича и ученики его учеников.