Уфа : УГАТУ, 2007 Вестник УГАТУ • Математика Т. 9, № 3 (21). С. 9–13

Теория функций

УДК 517.5

А. В. АБАНИН

ПРОДОЛЖЕНИЯ И СЛЕДЫ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Разработана модификация известной схемы исследования задачи о справедливости аналогов теоремы Уитни о продолжении, применимая к пространствам ультрадифференцируемых функций на выпуклом компакте, задаваемых весовыми последовательностями общего вида. *Комплексный анализ, ультрадифференцируемые функции, густые пространства*

1. Пусть $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ — неубывающая выпуклая функция, для которой $\varphi(0) = 0$ и выполнены следующие условия:

$$\varphi(x+1) = O(\varphi(x)) \text{ и } x = o(\varphi(x))$$

при

$$x \to \infty; \quad \int_0^\infty e^{-x}\varphi(x)\,dx < \infty\,.$$

Такие функции будем называть *весами*. Напомним, что сопряженной с φ по Юнгу функцией называется $\varphi^*(y) := \sup_{x \geq 0}(xy - \varphi(x))$.

Пусть L — толстый компакт в $\mathbb{R}^N$ (то есть L имеет непустую внутренность, замыкание которой совпадает с L). Определим банахово пространство бесконечно дифференцируемых на L функций

$$\mathcal{E}_{\varphi^*}(L) := \Big\{ f \in C^\infty(L) : |f|_{\varphi^*,K} := \\ := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \sup_{x\in K} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{e^{\varphi^*_n(|\alpha|)}} \Big\},$$

где α — мультииндексы, $|\alpha|$ — их длины. По неубывающей последовательности $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty$ весов образуем пространства Фреше

$$\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(L) := \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{E}_{\varphi_n^*}(L)$$

и

$$\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}^N) := \bigcap_{L \Subset \mathbb{R}^N} \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(L)\,.$$

В первом топология задается набором преднорм $(|\cdot|_{\varphi_n^*,L} : n \in \mathbb{N})$, а во втором — $(|\cdot|_{\varphi_n^*,L} : n \in \mathbb{N}; L \Subset \mathbb{R}^N)$.

Пусть K — фиксированный толстый компакт в $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим оператор сужения $\rho_K : f \mapsto f\big|_K$, который действует непрерывно из $\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}^N)$ в $\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(K)$. В случае, когда этот оператор сюръективен, говорят, что для Φ и K верен аналог теоремы Уитни о продолжении. К настоящему времени задача о справедливости аналогов теоремы Уитни о продолжении полностью исследована для произвольных, не обязательно толстых, компактов и весовых последовательностей вида $(n\varphi)_{n=1}^\infty$. Именно в [1]–[3] установлено, что в данном случае продолжение по Уитни не зависит от компакта и имеет место тогда и только тогда, когда

$$\limsup_{y\to\infty} \frac{1}{\omega(y)} \int_1^\infty \frac{\omega(ty)}{t^2}\,dt < \infty\,,$$

где $\omega(t) := \varphi(\ln^+ t)$, а $\ln^+ t := \max\{0, \ln t\}$.

Однако уже случай пространств ультрадифференцируемых функций нормального типа, задаваемых последовательностями $(p_n\varphi)_{n=1}^\infty$, где p_n, возрастая, стремится к $p \in (0, \infty)$, показал [4], что применение техники, развитой в [1]–[3], наталкивается на существенные трудности, преодолеть которые в полном объеме пока удается лишь для одноточечного компакта (в этой ситуации теорема Уитни совпадает с известной теоремой Бореля).

В данной работе предлагается модификация методов из [1]–[4], применимая к весовым последовательностям общего вида и выпуклым компактам с непустой внутренностью.

2. Формула $\omega(t) := \varphi(\ln^+ t)$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между весами φ и каноническими весами в смысле Брауна–Майзе–Тейлора ω (см. [5]). При этом мы называем *каноническим весом* всякую непрерывную неубывающую функцию

$\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$, для которой $\omega(1) = 0$ и выполнены условия:

$$(\alpha)\ \omega(2t) = O(\omega(t)) \text{ при } t \to \infty\,;$$

$$(\beta)\ \int_1^\infty t^{-2}\omega(t)\,dt < \infty\,;$$

$$(\gamma)\ \ln t = o(\omega(t)) \text{ при } t \to \infty\,;$$

$$(\delta)\ \varphi_\omega(x) := \omega(e^x) \text{ выпукла на } \mathbb{R}\,.$$

Всюду ниже ω — канонический вес, а $\Omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$ — последовательность канонических весов, удовлетворяющая дополнительному условию

$$\omega_n(s+t) + \ln(1+s) \le$$
$$\le \omega_{n+1}(s) + v(t) + C_n(t, s \ge 0;\ n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где v — некоторый канонический вес, а C_n — положительные числа. Через Φ обозначаем последовательность $\varphi_n(x) = \omega_n(e^x)$, а через Φ^* — последовательность сопряженных с φ_n по Юнгу.

Положим

$$\mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^N) := \Big\{ g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) :\ \|g\|_\omega :=$$
$$:= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} |\widehat{g}(\xi)| e^{\omega(\|\xi\|)} < \infty \Big\},$$

где $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^N$ функций с компактными носителями, $\widehat{g}$ — преобразование Фурье функции g, а $\|\xi\| := \max\{|\xi_k| : 1 \le k \le N\}$. По последовательности Ω образуем $\mathcal{D}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N) := \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{D}_{\omega_n}(\mathbb{R}^N)$.

Теперь введем пространства следов. Для ω определим банахово пространство

$$\widetilde{\mathcal{T}}_\omega(K) := \big\{ f \in C^\infty(K) : \exists g \in \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^N)$$
$$\text{с } g\big|_K = f \big\}$$

с нормой

$$\widetilde{\|f\|}_{\omega,K} := \inf\{\|g\|_\omega :\ g \in \mathcal{D}_\omega(\mathbb{R}^N),\ g\big|_K = f\}\,.$$

По последовательности Ω образуем пространство $\widetilde{\mathcal{T}}_{(\Omega)}(K) := \bigcap_{n=1}^\infty \widetilde{\mathcal{T}}_{\omega_n}(K)$, наделенное топологией, задаваемой набором норм $(\widetilde{\|\cdot\|}_{\omega_n,K})_{n=1}^\infty$. Из условия (1) следует, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ вложение $\widetilde{\mathcal{T}}_{\omega_{n+1}}(K)$ в $\widetilde{\mathcal{T}}_{\omega_n}(K)$ компактно, и, следовательно, $\widetilde{\mathcal{T}}_{(\Omega)}(K)$ является пространством Фреше–Шварца ((FS)-пространством; см. [6]).

Наконец положим

$$\mathcal{T}_{(\Omega)}(K) := \{ f \in C^\infty(K) :$$
$$: \exists g \in \mathcal{D}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N) \text{ с } g\big|_K = f\}\,,$$

а топологию в этом пространстве зададим набором норм

$$\|f\|_{\omega_n,K} := \inf\{\|g\|_{\omega_n} :\ g \in \mathcal{D}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N),$$
$$g\big|_K = f\},\quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Лемма 1.

$$\mathcal{T}_{(\Omega)}(K) \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{T}}_{(\Omega)}(K) \hookrightarrow \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(K),$$

где $\hookrightarrow$ — символ непрерывного вложения.

Доказательство. Так как

$$\mathcal{D}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{D}_{\omega_n}(\mathbb{R}^N)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, то

$$\mathcal{T}_{(\Omega)}(K) \subset \widetilde{\mathcal{T}}_{(\Omega)}(K)$$

и $\widetilde{\|f\|}_{\omega_n,K} \le \|f\|_{\omega_n,K}$ для любой функции f из $\mathcal{T}_{(\Omega)}(K)$. Поэтому $\mathcal{T}_{(\Omega)}(K) \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{T}}_{(\Omega)}(K)$.

Далее зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и для каждой функции f из $\widetilde{\mathcal{T}}_{(\Omega)}(K)$ рассмотрим множество

$$\mathcal{D}_{f,n+N+1} := \{g \in \mathcal{D}_{\omega_{n+N+1}}(\mathbb{R}^N) :\ g\big|_K = f\}\,.$$

Для любой функции g из $\mathcal{D}_{f,n+N+1}$ верна формула обращения Фурье, из которой имеем

$$g^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} (i\xi)^\alpha \widehat{g}(\xi) e^{i\langle\xi,x\rangle}\,d\xi$$
$$(x \in \mathbb{R}^N;\ \alpha \in \mathbb{N}_0^N)\,.$$

Отсюда, использовав (1), найдем такую постоянную $C > 0$, что при всех $x \in \mathbb{R}^N$ и $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$

$$|g^{(\alpha)}(x)| \le \frac{e^C}{(2\pi)^N}\|g\|_{\omega_{n+N+1}} \times$$
$$\times \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} \|\xi\|^{|\alpha|} e^{-\omega_n(\|\xi\|)} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d\xi}{(1+\|\xi\|)^N} \le$$
$$\le \frac{e^C}{\pi^N}\|g\|_{\omega_{n+N+1}} \sup_{t\ge 0} e^{|\alpha|t - \varphi(t)} =$$
$$= \frac{e^C}{\pi^N}\|g\|_{\omega_{n+N+1}} e^{\varphi^*(|\alpha|)}\,.$$

Учитывая, что для толстых компактов из совпадения $g\big|_K = f$ следует, что $g^{(\alpha)}\big|_K = f^{(\alpha)}$ при всех α, заключаем, что

$$\|f\|_{\omega_n,K} \le$$

$$\leq \frac{e^C}{\pi^N} \inf\{\|g\|_{\omega_{n+N+1}} : g \in \mathcal{D}_{f,n+N+1}\} =$$

$$= \frac{e^C}{\pi^N} \|\widetilde{f}\|_{\omega_{n+N+1},K}.$$

Поэтому $\widetilde{T}_{\omega_{n+N+1}}(K) \hookrightarrow \mathcal{E}_{\varphi_n^*}(K)$ при каждом $n \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $\widetilde{T}_{(\Omega)}(K) \hookrightarrow \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(K)$.

Положим еще $\mathcal{D}_{(v)}(\mathbb{R}^N) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{nv}(\mathbb{R}^N)$, где v — канонический вес из (1), и определим

$$\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) :$$

$$f \cdot \mathcal{D}_{(v)}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{D}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N)\}.$$

Лемма 2.

$$\mathcal{D}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}^N).$$

Доказательство. Если $f \in \mathcal{D}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N)$, а $g \in \mathcal{D}_{(v)}(\mathbb{R}^N)$, то из (1) легко следует, что при любом n имеется такое положительное A_n, что при всех $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$|\widehat{fg}(\xi)| = \frac{1}{(2\pi)^N} |(\widehat{f} * \widehat{g})(\xi)| =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi - t)\widehat{g}(t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \|f\|_{\omega_{n+1}} \|g\|_{2v} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\omega_{n+1}(\|\xi - t\|) - 2v(\|t\|)}\,dt \leq$$

$$\leq A_n \|f\|_{\omega_{n+1}} \|g\|_{2v} e^{-\omega_n(\|\xi\|)}.$$

Поэтому $\|fg\|_{\omega_n} \leq A_n \|f\|_{\omega_{n+1}} \|g\|_{2v}$ при всех n, и, значит, $fg \in \mathcal{D}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N)$. Отсюда следует, что $f \in \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N)$, и, таким образом, $\mathcal{D}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N)$.

Пусть теперь $f \in \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N)$. Возьмем любой толстый компакт L в $\mathbb{R}^N$ и построим срезающую функцию η этого компакта из $\mathcal{D}_{(v)}(\mathbb{R}^N)$ (по поводу существования такой функции см. [7, предложение 2]). Тогда

$$f\eta \in \mathcal{D}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N)$$

и те же самые рассуждения, что и в конце доказательства предыдущей леммы, показывают, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ и некоторых $B_n > 0$

$$|f|_{\varphi_n^*, L} = |f\eta|_{\varphi_n^*, L} \leq B_n \|f\eta\|_{\omega_{n+N+1}} < \infty$$

Отсюда заключаем, что $f \in \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}^N)$, и доказательство завершено.

3. Теперь мы готовы к изложению схемы исследования задачи о справедливости аналогов теоремы Уитни о продолжении.

Предложение. 1) *Если* $\mathcal{T}_{(\Omega)}(K) = \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(K)$, *то для* Φ *и* K *имеет место аналог теоремы Уитни о продолжении.*

2) *Если* $\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}^N)$, *то аналог теоремы Уитни о продолжении справедлив для* Φ *и* K *в том и только в том случае, когда*

$$\mathcal{T}_{(\Omega)}(K) = \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(K).$$

Доказательство. 1) В самом деле, пусть $f \in \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(K) = \mathcal{T}_{(\Omega)}(K)$. По определению $\mathcal{T}_{(\Omega)}(K)$ найдется $g \in \mathcal{D}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N)$ с $g\big|_K$. А по лемме 2 g принадлежит $\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}^N)$, и, значит, является искомым продолжением f.

2) В силу пункта 1) доказательства достаточно проверить, что из равенства $\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}^N)$ и предположения о справедливости аналога теоремы Уитни о продолжении следует, что $\mathcal{T}_{(\Omega)}(K) = \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(K)$. При этом, по лемме 1 последнее совпадение эквивалентно вложению $\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(K) \subset \mathcal{T}_{(\Omega)}(K)$.

Пусть $f \in \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(K)$. По предположению о справедливости аналога теоремы Уитни имеется такая функция F из $\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}^N)$, что $F\big|_K = f$. Построим срезающую функцию η компакта K из $\mathcal{D}_{(v)}(\mathbb{R}^N)$ и рассмотрим $F\eta$. Так как $F \in \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N)$, то по определению последнего пространства $F\eta$ содержится в $\mathcal{D}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N)$. При этом $F\eta\big|_K = f$. Поэтому $f \in \mathcal{T}_{(\Omega)}(K)$, что и требовалось.

Для формулировки основных результатов нам потребуются некоторые дополнительные обозначения. С каждым каноническим весом ω свяжем его продолжение в $\mathbb{C}^N$

$$P_\omega(x+iy) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega(x+ty)}{1+t^2}\,dt \qquad (x, y \in \mathbb{R}^N).$$

Обозначим через h_K опорную функцию компакта K и образуем следующие пространства целых в $\mathbb{C}^N$ функций:

$$H_\omega(K) := \Big\{ f \in H(\mathbb{C}^N) :$$

$$: |f|_\omega^K := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(z)|}{e^{h_K(Im z) + \omega(\|z\|)}} < \infty \Big\};$$

$$H_{P\omega}(K) := \Big\{ f \in H(\mathbb{C}^N) :$$

$$: |f|_{P\omega}^K := \sup_{z \in \mathbb{C}^N} \frac{|f(z)|}{e^{h_K(Im z) + P_\omega(z)}} < \infty \Big\};$$

$$H_{(\Omega)}(K) := \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\omega_n}(K);$$

$$H_{(P\Omega)}(K) := \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{P\omega_n}(K).$$

Первые два являются банаховыми относительно своих норм, а вторые наделяются топологиями внутренних индуктивных пределов последовательностей $(H_{\omega_n}(K))_{n=1}^{\infty}$ и $(H_{P\omega_n}(K))_{n=1}^{\infty}$, соответственно, и являются (DFS)-пространствами. Кроме того, определим $H_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N) := \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\omega_n}(B_n)$, где $B_n := \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \le n\}$.

Условимся еще обозначать через H' пространство, сильно сопряженное с локально выпуклым пространством H.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}^N)$ и K — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^N$. Если для Φ и K имеет место аналог теоремы Уитни о продолжении, то $H_{(P\Omega)}(K) = H_{(\Omega)}(K)$.

Доказательство. По предложению аналог теоремы Уитни справедлив для Φ и K тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}_{(\Omega)}(K) = \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(K)$. Далее, по лемме 1 последнее совпадение влечет, что и $\widetilde{\mathcal{T}}_{(\Omega)}(K) = \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(K)$. По теореме 1 из [8] преобразование Фурье–Лапласа функционалов устанавливает топологический изоморфизм между $\mathcal{E}'_{(\Phi^*)}(K)$ и $H_{(\Omega)}(K)$, а из предложений 10 и 11 работы [7] нетрудно вывести, что то же самое преобразование устанавливает топологический изоморфизм между $\widetilde{\mathcal{T}}'_{(\Omega)}(K)$ и $H_{(P\Omega)}(K)$. Из сказанного, очевидно, следует, что справедливость аналога теоремы Уитни для Φ и K влечет равенство $H_{(P\Omega)}(K) = H_{(\Omega)}(K)$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}) = \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R})$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) хотя бы для одного невырожденного отрезка на прямой и Φ имеет место аналог теоремы Уитни о продолжении;

(ii) для каждого невырожденного отрезка на прямой и Φ имеет место аналог теоремы Уитни о продолжении;

(iii) для любого n найдутся такие m и $C > 0$, что

$$P_{\omega_n}(z) \le \omega_m(|z|) + C \qquad (z \in \mathbb{C}). \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть для отрезка K выполнено (i). Тогда по теореме 1 $H_{(P\Omega)}(K) = H_{(\Omega)}(K)$. Отсюда следует, что для любого n найдутся такие m и $A > 0$, что для всех f из $H_{P\omega_{n+1}}(K)$ имеет место неравенство

$$\sup_{\zeta\in\mathbb{C}} \frac{|f(\zeta)|}{e^{h_K(Im\zeta)+\omega_m(\|\zeta\|)}} \le A \sup_{\zeta\in\mathbb{C}} \frac{|f(\zeta)|}{e^{h_K(Im\zeta)+P_{\omega_{n+1}}(\zeta)}}. \qquad (3)$$

Как известно (см., например, [9, неравенство (5)], для каждого канонического веса ω имеется такое $A_\omega > 0$, что $\omega(t+1) \le \omega(t) + A_\omega$ при всех $t \ge 0$. Отсюда и из (1) за счет простых оценок, основанных на определении P_{ω_n}, следует, что при некотором

$$B = B(k) > 0$$

имеем

$$\max_{|w|\le 1} P_{\omega_n}(z+w) \le P_{\omega_{n+1}}(z) + B \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Заметим еще, что функция P_{ω_n} как интеграл Пуассона от канонического веса ω_n является функцией гармонической в верхней и нижней полуплоскостях и субгармонической функцией во всей плоскости. Тогда по лемме 3 из [9] (см. также [10]) существует такое семейство целых в $\mathbb{C}$ функций

$$\{g_z : z \in \mathbb{C}\},$$

что

$$g_z(z) = e^{h_K(Imz)+P_{\omega_n}(z)} \qquad (z \in \mathbb{C});$$

$$|g_z(\zeta)| \le De^B e^{h_K(Im\zeta)+P_{\omega_{n+1}}(\zeta)} \qquad (z, \zeta \in \mathbb{C}),$$

где $D > 0$ — некоторая абсолютная постоянная. С учетом этих оценок получаем из (3)

$$\frac{e^{P_{\omega_n}(z)}}{e^{\omega_m(z)}} \le \sup_{\zeta\in\mathbb{C}} \frac{|g_z(\zeta)|}{e^{h_K(Im\zeta)+\omega_m(\|\zeta\|)}} \le ADe^B,$$

откуда следует (2). Таким образом, из (i) следует (iii).

Пусть теперь выполнено (iii) и K — произвольный невырожденный отрезок на прямой. Возьмем произвольную функцию f из $H_{(\Omega)}(K)$, для которой при некотором n

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{n|Imz|+\omega_n(\|\zeta\|)}} \le 1.$$

Тогда

$$|f(x)| \le e^{\omega_n(|x|)} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Отсюда, по принципу Фрагмена-Линделефа, точно так же, как в [1], получаем, что

$$|f(z)| \le e^{h_K(Imz)+P_{\omega_n}(z)} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Из последнего неравенства и из (2) следует, что при некоторых достаточно больших m и C

$$|f(z)| \le e^C e^{h_K(Imz)+\omega_m(|z|)} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Поэтому для всех $f \in H_{(\Omega)}(K)$

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{h_K(Imz)+\omega_m(\|\zeta\|)}} \le e^C \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{n|Imz|+\omega_n(z)}}$$

Ясно, что последнее условие означает, что оператор тождественного вложения пространства $H_{(\Omega)}(K)$ в $H_{(\Omega)}(\mathbb{R})$ является топологическим изоморфизмом (на образ). Напомним, что по теореме 1 из [8] преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологические изоморфизмы: $\mathcal{E}'_{(\Phi^*)}(K) \simeq H_{(\Omega)}(K)$ и $\mathcal{E}'_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}) \simeq H_{(\Omega)}(\mathbb{R})$. Применив соображения двойственности, заключаем из сказанного, что сопряженный оператор, которым является оператор сужения $\rho_K : \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}) \to \to \mathcal{E}_{(\Phi^*)}(K)$, сюръективен. Значит, $(iii) \Rightarrow (ii)$.

Так как импликация $(ii) \Rightarrow (i)$ очевидна, то тем самым доказательство завершено.

Замечание. Нетрудно проверить, что для совпадения пространств $\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R}^N)$ и $\mathcal{E}_{(\Phi^*)}(\mathbb{R}^N)$, достаточно, чтобы для любого n нашлись такие m и $C > 0$, что

$$\omega_n(2t) \le \omega_m(t) + C \qquad (t \ge 0).$$

В частности, последнее условие выполнено для последовательности $(n\omega)_{n=1}^{\infty}$, где ω — произвольный фиксированный канонический вес (ситуация исследованная в [1]–[3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Meise, R.** Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type / R. Meise, B. A. Taylor //Ark. Mat. 1988. V. 26. P. 265–287.
2. **Bonet, J.** Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Roumieu type / J. Bonet, R. Meise, B. A. Taylor // Proc. R. Ir. Acad. 1989. V. 89(A). P. 53–66.
3. **Abanin, A. V.** On Whitney's extension theorem for spaces of ultradifferentiable functions /A. V. Abanin // Math. Ann. 2001. V. 320. P. 115–126.
4. **Abanina, D. A.** On Borel's theorem for spaces of ultradifferentiable functions of mean type / D. A. Abanina // Results Math. 2003. V.44. P. 195–213.
5. **Braun, R. W.** Ultradifferentiable functions and Fourier analysis / R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor // Results Math. 1990. V. 17. P. 206–237.
6. **Жаринов, В. В.** Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS / В. В. Жаринов // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 4. С. 97–131.
7. **Абанин, А. В.** Ω-ультрараспределения /А. В. Абанин // Известия РАН. Сер. матем. 2007 (принята к печати).
8. **Абанин, А. В.** Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространства бесконечно дифференцируемых функций / А. В. Абанин, И. А. Филипьев // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 485–500.
9. **Абанин, А. В.** Густые пространства и аналитические мультипликаторы / А. В. Абанин // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки. 1994. № 4. С. 3–10.
10. **Абанин, А. В.** О некоторых признаках слабой достаточности / А. В. Абанин // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 4. С. 442-454.

ОБ АВТОРЕ

Абанин Александр Васильевич, д-р. физ.-мат. наук, профессор. Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону. Иссл. в области теории функций и комплексного анализа.