Уфа : УГАТУ, 2007 Вестник УГАТУ • Математика Т. 9, № 3 (21). С. 14–19

Теория функций

УДК 517.53+517.537.7

330

А. М. ГАЙСИН, И. Г. КИНЗЯБУЛАТОВ

ТЕОРЕМА ТИПА ЛЕВИНСОНА И КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ КАРЛЕМАНА

Получено обобщение известной теоремы Левинсона–Съеберга для семейства аналитических функций f, имеющих вне некоторой дуги γ оценки вида $|f(z)| \le M(dist(z, \gamma))$, где M — убывающая на $(0, \infty)$ функция, не ограниченная в окрестности нуля. Указаны применения данного результата к вопросам квазианалитичности классов Карлемана. *Условие Левинсона; квазианалитические классы Карлемана на дугах*

ВВЕДЕНИЕ

В 1938 году Н. Левинсон [1] доказал следующую теорему.

Теорема I (Н. Левинсон). *Пусть $M(y)$ положительная, монотонно убывающая в полуинтервале $(0, b]$ функция, $M(y) \uparrow \infty$ при $y \downarrow 0$, $M(b) = e$. Пусть, далее, F_M — семейство функций, аналитических в прямоугольнике $P = \{z = x + iy : |x| < a, |y| < b\}$, удовлетворяющих в P оценке $|F(z)| \le M(|y|)$. Если*

$$\int_0^b lnlnM(y)dy < \infty, \qquad (1)$$

то для любого $\delta > 0$ существует постоянная C, зависящая только от δ и $M(y)$, такая, что для всех функций $f \in F_M$ в прямоугольнике $P_\delta = \{z = x + iy : |x| < a - \delta, |y| < b\}$ справедлива оценка $|f(z)| \le C$.

В последующие годы эта теорема нашла многочисленные применения в теории функций и теории операторов. В данной статье получено обобщение теоремы Н. Левинсона на случай, когда вместо отрезка $[-a, a]$ рассматривается некоторая дуга γ. Приводится применение данного результата в теории квазианалитических классов функций на дугах.

Пусть γ — дуга, заданная уравнением $y = g(x)$ $(|x| \le a)$, $\Pi = \{z = x + iy : |x| < a, |y - g(x)| < b\}$ — криволинейный четырехугольник. Через F_M обозначим семейство функций, аналитических в Π и удовлетворяющих оценке

$$|f(z)| \le M(\rho(z)), \qquad \rho(z) = \min_{w \in \gamma} |z - w| .$$

В статье показано, что если дуга γ удовлетворяет условию Липшица, то при условии (1) семейство F_M нормально. Как следствие, для регулярной последовательности $\{M_n\}$ получен критерий квазианалитичности класса Карлемана $C_\gamma(M_n)$.

1. ТЕОРЕМА АЛЬФОРСА ОБ ИСКАЖЕНИИ

Пусть D — односвязная область, не содержащая бесконечно удаленную точку. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ $(x_1 < x_2)$ — две достижимые граничные точки области D (допускаются случаи $x_1 = -\infty$ и $x_2 = +\infty$). Прямые $Rez = x$ $(x_1 < x < x_2)$ пересекаются с областью D по одному или нескольким интервалам, каждый из которых представляет сечение области D, разбивающее ее на две односвязные части. Отметим, что если область D ограничена простой кусочно-гладкой кривой, то в этом случае нет разницы между достижимой граничной точкой и точкой границы (По этому поводу см., например, в [2, гл. IV, §1]).

Пусть функция $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ конформно отображает область D на полосу $\{w = u + iv : |v| < a\,(a > 0)\}$ так, что граничная точка z_1 переходит в точку $u = -\infty$, а граничная точка z_2 — в точку $u = +\infty$. При этом граница ∂D области D распадается на две части C^+ (верхняя часть) и C^- (нижняя часть), соединяющиеся лишь в точках z_1 и z_2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Росийского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00417), гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ — 10052.2006.1 и программы фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики"(проект "Комплексный анализ и функциональные уравнения"

Рассмотрим пересечение области D с прямой $Rez = x$. Оно состоит из счетного числа интервалов. Выделим среди них те, замыкания которых соединяют C^+ и C^- (хотя бы один такой есть, и их конечное число). Замыкание того интервала, который встречается первым при движении вдоль области D от z_1 к z_2, обозначим θ_x, а его длину $\theta(x)$.

Пусть при отображении $w = w(z)$ сечение θ_x переходит в непрерывную кривую L_x, соединяющую граничные прямые $v = \pm\frac{a}{2}$.

Введем обозначения:

$$u_1 = u_1(x) = \min_{z\in\theta_x} Rew(z),$$
$$u_2 = u_2(x) = \max_{z\in\theta_x} Rew(z)\ (z = x + iy).$$

Функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, очевидно, являются неубывающими функциями от x. При таких обозначениях справедлива

Теорема II (Л. Альфорс)[3]. *Если*

$$\int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\theta(x)} > 2,$$

то

$$u_1(x'') - u_2(x') \geq a\int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\theta(x)} - 4a.$$

Докажем одну геометрическую лемму.

Лемма 1. *Пусть γ — дуга, заданная уравнением $y = g(x)$ $(|x| \leq a)$ и удовлетворяющая условию Липшица*

$$\sup_{x_1\neq x_2}\left|\frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}\right| = L < \infty.$$

Тогда для любого $z = x + iy$ $(|x| \leq a)$ вне γ

$$\frac{k}{2}|y - g(x)| \leq \rho(z) \leq |y - g(x)|,$$

где $\rho(z) = \min\limits_{w\in\gamma}|z - w|, \quad k = \min(1, L^{-1}).$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка $\rho(z)$ сверху очевидна. Оценим $\rho(z)$ снизу. Для этого заметим, что $2\rho(z) \geq p + q$ (см. рис. 1).

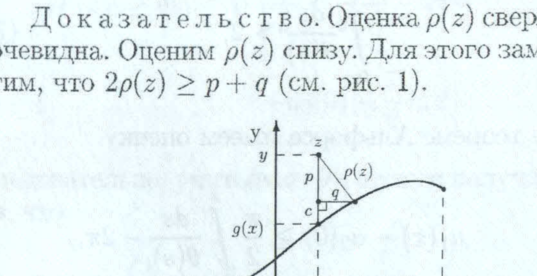

Рис. 1

Но по условию $\frac{c}{q} \leq L$, т. е. $q \geq L^{-1}c$. Следовательно, $\rho(z) \geq \frac{1}{2}(p + q) \geq \frac{1}{2}(p + L^{-1}c) \geq \frac{k}{2}|y - g(x)|$, $k = \min(L^{-1}, 1)$.

2. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛЕВИНСОНА

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть $M(y)$ — положительная, монотонно убывающая в полуинтервале $(0, b]$ функция, $M(y) \uparrow \infty$ при $y \downarrow 0$, $M(b) = e$. Пусть γ — дуга из леммы 1. Через F_M обозначим семейство аналитических в криволинейном четырехугольнике $\Pi = \{z = x + iy : |x| < a, |y - g(x)| < b\}$ функций, удовлетворяющих для $z \in \Pi$ условию*

$$|f(z)| \leq M(\rho(z)), \quad \rho(z) = \min_{w\in\gamma}|z - w|. \quad (2)$$

Если для функции $M(y)$ выполняется условие (1), то для любого $\delta > 0$ существует постоянная C, зависящая только от δ и $M(y)$, такая, что для всех функций $f \in F_M$ в области $\Pi_\delta = \{z = x + iy : |x| < a - \delta, |y - g(x)| < b\}$ справедлива оценка $|f(z)| \leq C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существует непрерывная и монотонно убывающая мажоранта $M^*(y)$, также удовлетворяющая условиям теоремы.

Пусть $\theta_1(x)$ — непрерывная, монотонно возрастающая на отрезке $[0, a]$ функция, $\theta_1(0) = 0$, $\theta_1(a) = b_1$. Через D обозначим область, ограниченную кривыми k_1, k_2, k_3, k_4 (см. рис. 2), где

$$k_1 = g(x) + \theta_1(x + a)\ (-a \leq x \leq 0);$$
$$k_2 = g(x) + \theta_1(a - x)\ (0 \leq x \leq a);$$
$$k_3 = g(x) - \theta_1(x + a)\ (-a \leq x \leq 0);$$
$$k_4 = g(x) - \theta_1(a - x)\ (0 \leq x \leq a).$$

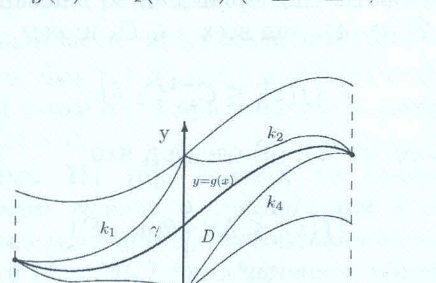

Рис. 2

Функцию $y = \theta_1(x)$ выберем позже специальным образом. Из построения видно, что если θ_x — сечение замыкания области D прямой $Rez = x$ $(|x| \le a)$, то длина сечения θ_x обладает свойствами: 1) $\theta(x) = \theta(-x)$ $(0 \le x \le a)$; 2) если $z = x + iy \in \partial D$, то $|y - g(x)| = \frac{\theta(x)}{2}$.

Поскольку дуга γ удовлетворяет условию Липшица с константой L, то согласно лемме 1 для любого $z = x + iy$ $(|x| \le a)$ из ∂D имеем

$$\frac{k}{4}\theta(x) \le \rho(z) \le \frac{1}{2}\theta(x), \tag{3}$$

где $k = \min(1, L^{-1})$.

Убедимся, что для доказательства теоремы достаточно установить существование аналитической в D функции $F(z)$, не имеющей нулей в области D, непрерывной во всех точках замыкания $\overline{D}$ области D кроме точек $z_1 = -a + ig(-a)$, $z_2 = a + ig(a)$ и удовлетворяющей условиям:

$$\begin{aligned} &1) \text{ для } z \in \theta_x \\ &|F(z)| \ge C_1 M(\frac{k}{4}\theta(x)) \ (z = x + iy); \\ &2) \text{ для всех } z \text{ из } D_\delta = \Pi_\delta \cap D \\ &|F(z)| \le C_2(\delta) < \infty. \end{aligned} \tag{4}$$

Действительно, в этом случае для любой функции $f \in F_M$ отношение $\Phi(z) = \frac{f(z)}{F(z)}$ аналитично в области D и непрерывно во всех точках из $\overline{D}$ кроме z_1, z_2. Следовательно, для любых $z \in \partial D_\delta$

$$\left|\frac{f(z)}{F(z)}\right| \le \frac{M(\rho(z))}{C_1 M(\frac{k}{4}\theta(x))} \quad (z = x + iy).$$

Отсюда, учитывая (3), из принципа максимума модуля получаем, что

$$\left|\frac{f(z)}{F(z)}\right| \le C_1^{-1}, \ z \in D_\delta.$$

Следовательно, принимая во внимание оценку 2) из (4), для всех $z \in D_\delta$ имеем

$$|f(z)| \le C_1^{-1} C_2(\delta). \tag{5}$$

Далее, из (2), (3) следует, что

$$|f(z)| \le M(\frac{k}{4}\theta(a - \delta)) \tag{6}$$

для всех z из $\Pi_\delta \setminus D$. Таким образом, для любой функции $f \in F_M$ из (5), (6) получаем оценку $\sup_{z \in \Pi_\delta} |f(z)| \le C(\delta)$, где $C(\delta) = \max(C_1^{-1} C_2(\delta), M(\frac{k}{4}\theta(a - \delta)))$. Видим, что если функция $F(z)$ с указанными свойствами существует, то семейство F_M является нормальным.

Перейдем к построению функции $F(z)$. Для этого рассмотрим функцию $\varphi(y) = \Delta \ln\ln M(\frac{k}{2}y)$ $(2 < \Delta < \infty)$. Ясно, что $\varphi(y)$ — монотонно убывающая, непрерывная функция на полуинтервале $(0, b_1]$, причем

$$\int_0^{b_1} \varphi(y)dy < \infty,$$

где $b_1 = \frac{2b}{k}$ $(0 < k \le 1)$. Далее, функция $h(t) = -t\varphi(t) + \int_0^t \varphi(\tau)d\tau$ $(0 < t \le b_1)$ положительна, монотонно возрастает. Так как $h(0) = 0$, а $\varphi(t)$ — возрастающая функция, то $h(t) > 0$, $h(t) \uparrow$ при $t \uparrow$ $(0 \le t \le b_1)$. Теорему достаточно доказать для тех значений b, $M(b) \ge e$. Имея это в виду, выберем $b_1 = \frac{2b}{k}$ настолько малым, чтобы $h(b_1) \le a$. Увеличивая параметр Δ $(2 < \Delta < \infty)$, если это необходимо, добьемся, чтобы выполнялось равенство $h(b_1) = a$. Если $\theta_1 = \theta_1(x)$ — функция, обратная к $h = h(t)$, то тогда $\theta_1(a) = b_1$. Фиксируя функцию $\theta_1(x)$, рассмотрим область D, введенную выше (см. рис. 2). Пусть $w = G(z)$ — функция, конформно отображающая область D на полосу $S = \{w = u + iv : |v| < \frac{\pi}{4}\}$ так, что точке $z_1 = -a + g(-a)i$ соответствует точка $w_1 = -\infty$, а точке $z_2 = a + g(a)i$ — точка $w_2 = +\infty$. Положим $F(z) = \exp\exp(G(z))$ и убедимся что данная функция является искомой. По теореме Каратеодори [4, гл. IV, §13, п. 40] функция F непрерывна в $\overline{D}$ кроме точек z_1, z_2. Чтобы оценить функцию $ReG(z)$, воспользуемся теоремой Альфорса.

Пусть $\theta(x)$ — длина сечения θ_x $(|x| \le a)$. Ясно, что $\theta(x) = 2\theta_1(a - x)$ $(0 \le x \le a)$. Для тех x $(0 \le x \le a)$, для которых

$$\int_0^x \frac{ds}{\theta(s)} > 2, \tag{7}$$

по теореме Альфорса имеем оценку

$$u_1(x) - u_2(0) \ge \frac{\pi}{2} \int_0^x \frac{ds}{\theta(s)} - 2\pi,$$

где $u_1(x) = \min_{z \in \theta_x} Rew(z)$, $u_2(x) = \max_{z \in \theta_x} Rew(z)$ $(z = x + iy)$. Отсюда следует, что для всех $z \in \theta_x$

$$ReG(z) \geq \frac{\pi}{2}\int_0^x \frac{ds}{\theta(s)} - 2\pi + u_2(0). \qquad (8)$$

Покажем теперь, что при всех x, $0 < x_0 \leq x \leq a$, выполняется условие (7). Имеем

$$\int_0^x \frac{ds}{\theta(s)} = -\frac{1}{2}\int_a^{a-x} \frac{d\eta}{\theta_1(\eta)} = -\frac{1}{2}\int_{b_1}^{\theta_1(a-x)} \frac{dh(t)}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{b_1}^{\theta_1(a-x)} d\varphi(t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(\theta_1(a-x)) - \varphi(b_1)\right].$$

Так как $\varphi(b_1) = \Delta \ln\ln M(b)$, то отсюда получаем, что

$$\int_0^x \frac{ds}{\theta(s)} = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{\theta(x)}{2}\right) - \varphi(b_1)\right] = \qquad (9)$$
$$= \frac{\Delta}{2}\left[\ln\ln M(\frac{k}{4}\theta(x)) - \ln\ln M(b)\right],$$

где $(2 < \Delta < \infty)$.

Поскольку $\theta(0) = \frac{4b}{k}$, $\theta(x) \downarrow 0$ при $x \uparrow a$, то найдется x_0 $(0 < x_0 < a)$ такое, что $\ln\ln M\left(\frac{k}{4}\theta(x_0)\right) - \ln\ln M(b) = \frac{5}{\Delta}$. Тогда условие (7) будет выполнено при $0 < x_0 \leq x \leq a$.

Осталось оценить $|F(z)|$ на ∂D снизу. Имеем

$$|F(z)| = \exp\left[\cos Im\,(G\,(z))\exp(ReG(z))\right] \geq$$
$$\geq \exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(ReG(z))\right].$$

Используя оценку (8), для всех $z \in \theta_x$ $(0 < x_0 \leq x \leq a)$ имеем:

$$|F(z)| \geq \exp\exp\left[\frac{\pi}{2}\int_0^x \frac{ds}{\theta(s)} - 2\pi + \right.$$
$$\left. + u_2(0) - \frac{1}{2}\ln 2\right].$$

Следовательно, учитывая (9), отсюда получаем, что

$$|F(z)| \geq M\left(\frac{k}{4}\theta(x)\right) \quad (0 < x_0 \leq x_1 \leq x \leq a).$$

Пусть D_1 — пересечение области D с полосой $\{z = x + iy : |x| < x_1\}$. Так как $F(z) \neq 0$ в $\bar{D}_1$, то $\min\limits_{z \in \bar{D}_1} |F(z)| = |F(z^*)| \neq 0$, $z^* \in \partial D_1$. Значит, для любого $z \in \bar{D}_1$ имеем:

$$|F(z)| \geq \frac{|F(z^*)|}{M\left(\frac{k}{4}\theta(x)\right)} M\left(\frac{k}{4}\theta(x)\right) \geq$$
$$\geq \frac{|F(z^*)|}{M\left(\frac{k}{4}\theta(x_1)\right)} M\left(\frac{k}{4}\theta(x)\right).$$

Таким образом, для всех z из θ_x $(0 \leq x \leq a)$

$$|F(z)| \geq C_1 M\left(\frac{k}{4}\theta(x)\right) \qquad (z = x + iy),$$

где $C_1 = \min\left(1, \frac{|F(z^*)|}{M\left(\frac{k}{4}\theta(x_1)\right)}\right)$. Так как $\theta(-x) = \theta(x)$ $(0 \leq x \leq a)$, то оценка 1) из условий (4) выполнена. Далее, функция $F(z)$ непрерывна в замыкании области $\Pi_\delta \cap D$. Значит, $|F(z)| \leq C_2(\delta) < \infty$ для всех z из $\Pi_\delta \cap D$, и условие 2) из (4) также выполнено.

Требуемая функция $F(z)$ построена и тем самым теорема доказана.

Замечание. Если условие (1) не выполнено, то семейство F_M не является нормальным.[5]

3. КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТЬ

Пусть $\gamma \subset \mathbb{C}$ континуум. Рассмотрим функцию f, заданную на γ. Функция f называется дифференцируемой на γ, если для всех $a \in \gamma$ существует конечный предел

$$f'(a) = \lim_{z \in \gamma, z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Высшие производные $f^{(n)}(a)$ определяются по индукции.

Пусть $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — положительная последовательность. Класс $C_\gamma(M_n)$ Карлемана на γ определяется как множество бесконечно дифференцируемых на γ функций f, таких, что $|f^n(z)| \leq K_f^n M_n$, $z \in \gamma$ $(n \geq 0)$. Класс $C_\gamma(M_n)$ называется квазианалитическим, если из того, что $f \in C_\gamma(M_n)$ и $f^{(n)}(a) = 0$ в некоторой точке $a \in \gamma$ при всех $n \geq 0$, следует, что $f(z) \equiv 0$.

Теорема III [6]. *Каждое из следующих условий является необходимым и достаточным условием для квазианалитичности класса $C_{[0,1]}(M_n)$ (традиционное обозначение $C\{M_n\}$):*

1. *если $\beta_n = \inf\limits_{k \geq n} M_k^{\frac{1}{k}}$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} = \infty$;*

2. если $T(r) = \sup\limits_{n\geq 0} \frac{r^n}{M_n}$, *то* $\int\limits_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = \infty$;

3. либо $\underline{\lim}_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} < \infty$, *либо* $\lim\limits_{n\to\infty} M_n^{\frac{1}{n}} = \infty$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c} = \infty$, *где* $\{M_n^c\}$ *— выпуклая регуляризация последовательности* $\{M_n\}$ *посредством логарифмов.*

Условие 1. — условие Карлемана, 2. — условие Островского, 3. — условие Мандельбройта и Банга.

Хорошо известно, что $T(r) = \max\limits_{n\geq 0} \frac{r^n}{M_n} = \max\limits_{n\geq 0} \frac{r^n}{M_n^c}$. Так что из предыдущей теоремы следует, что классы $C\{M_n\}$ и $C\{M_n^c\}$ квазианалитичны или нет одновременно. Так как последовательность $\{M_n^c\}$ логарифмически выпукла, то $M_n^c = \max\limits_{r\geq 0} \frac{r^n}{T(r)}$ [6].

Возникает вопрос: когда класс $C_\gamma(M_n)$ (γ — кривая, отличная от отрезка) является квазианалитическим? В [7] показано, что каждое из условий 1), 2) и 3), фигурирующих в теореме III, является достаточным для квазианалитичности класса $C_\gamma(M_n)$ на кусочно-гладкой кривой γ. Это утверждение упоминается (без доказательства) в [8]. В случае, когда γ — локально спрямляемая кривая, при условии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c} = \infty$ класс $C_\gamma(M_n^c)$ является квазианалитическим [9].

Выясним, когда эквивалентные между собой условия 1) — 3) в теореме III являются и необходимыми для квазианалитичности класса $C_\gamma(M_n)$.

Следуя [10], последовательность $\{M_n\}$ назовем регулярной, если числа $m_n = \frac{M_n}{n!}$ ($n \geq 0$) обладают следующими свойствами: а) $m_n^2 \leq m_{n-1}m_{n+1}$ ($n \geq 1$); б) $\sup\limits_n \left(\frac{m_{n+1}}{m_n}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty$; в) $m_n^{\frac{1}{n}} \to \infty$, $n \to \infty$. В этом случае, класс Карлемана $C\{M_n\}$ называется регулярным.

Условие а) — условие логарифмической выпуклости последовательности $\{m_n\}$, условие б) — замкнутость класса $C\{M_n\}$ относительно дифференцирования, а условие в) означает, что класс Карлемана содержит аналитические функции.

Для регулярной последовательности $\{M_n\}$ введем так называемый ассоциированный вес $w(r) = \sup\limits_{n\geq 0} \frac{r^n}{m_n}$, где $m_n = \frac{M_n}{n!}$. Последовательность $\{M_n\}$ полностью определяется функцией $w(r)$, причем [10] $m_n = \sup\limits_{r\geq 0} \frac{r^n}{w(r)}$.

Заметим, что из условия а) следует, что $M_n^2 \leq M_{n-1}M_{n+1}$. Поэтому критерий квазианалитичности класса $C\{M_n\}$ принимает вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} = \infty$. Последнее условие допускает переформулировку в терминах веса $w(r)$.

Если γ — отрезок $[0,1]$, единичная окружность или аналитическая дуга, то регулярный класс Карлемана $C_\gamma(M_n)$ с ассоциированным весом w квазианалитичен тогда и только тогда, когда [10]

$$\int\limits_0^d \ln\ln H(r)dr = +\infty,$$

где $H(r) = w(\frac{1}{r})$, $\quad H(d) \geq e$.

Справедлива

Теорема 2. *Пусть* γ *— дуга, заданная уравнением* $y = g(x)$ $\quad(|x| \leq a)$ *и удовлетворяющая условию Липшица,* $M = M(y)$ *— функция из теоремы 1, удовлетворяющая условию Левинсона (1). Если* $M_n = \sup\limits_{r>0} \frac{n!}{M(r)r^{n+1}} < \infty$ $\quad(n \geq 0)$, *то существует функция* $f \in C_\gamma(M_n)$, $f(z) \not\equiv 0$, *такая, что:* а) $|f^{(n)}(z)| \leq C_f M_n$ $\quad (n \geq 0)$; б) $f^{(n)}(c) = f^{(n)}(d) = 0$ $\quad(n \geq 0)$, *где* c, d *— концы дуги* γ.

Доказательство. Пусть D — область, построенная в §2, содержащая дугу γ за исключением ее концов, $\Gamma = \partial D$, а F — аналитическая в D функция, такая, что $|F(z)| \geq C_1 M(\frac{k}{4}\theta(x))$ $(z \in \bar{D})$, $z = x + iy$, где функция $\theta(x)$, постоянная C_1 из §2 (см., формулу 1) из (4)). Существование такой функции установлено в ходе доказательства теоремы 1. Учитывая то, что функция $\left|\frac{1}{F(z)}\right|$ аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$, рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{dt}{F(t)(t-z)}, \quad z \in D.$$

Отсюда получаем, что для $z \in \gamma$

$$|f^{(n)}(z)| \leq C_1^{-1} \frac{L(\Gamma)}{2\pi} \sup_{t\in\Gamma} \frac{n!}{M(\frac{k}{4}\theta(x))\,|t-z|^{n+1}},$$

где $x = Ret$, а $L(\Gamma)$ — длина контура Γ. Но $|t - z| \geq \rho(t) \geq M\left(\frac{k}{4}\theta(x)\right)$ $(x = Ret, t \in \gamma)$ (см. (3)). Значит, для $z \in \gamma$

$$|f^{(n)}(z)| \leq C_f \sup_{\rho>0} \frac{n!}{M(\rho)\rho^{n+1}} = C_f M_n \quad (n \geq 0).$$

Убедимся, что $\lim\limits_{z\in\gamma, z\to c} f^{(n)}(z) = \lim\limits_{z\in\gamma, z\to d} f^{(n)}(z) = 0$ $(n \geq 0)$. Действительно, пусть $z \in \gamma$ и $z \to c$. Через Γ_z обозначим замкнутый контур, охватывающий точку z и состоящий из части Γ, отсекаемой окружностью $C_z = \{t : |z - t| = d(z)\}$ $\quad (d(z) = \min\limits_{\xi\in\Gamma}|z - \xi|)$, и дуги данной окружности. Так как при $z \to c$ вдоль γ длина контура Γ_z стремится к нулю, а $\sup\limits_{\rho>0} \frac{n!}{M(\rho)\rho^{n+1}} < \infty$ для любого $n \geq 0$, то, пользуясь формулой Коши для области, ограниченной контуром Γ_z, получаем, что $\lim\limits_{z\in\gamma, z\to c} f^{(n)}(z) = 0$ $\quad (n \geq 0)$. Аналогично, $\lim\limits_{z\in\gamma, z\to d} f^{(n)}(z) = 0$ $\quad (n \geq 0)$.

Теорема доказана.

Из теоремы 2 с учетом приведенного выше результата из [9] и критерия квазианалитичности класса $C_{[0,1]}(M_n)$ из [10] получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $\{M_n\}$ — регулярная последовательность, γ — дуга из теоремы 2. Положим $M(r) = \sup\limits_{n\geq 0} \frac{n!}{M_n r^{n+1}}$.*

Для того, чтобы класс $C_\gamma(M_n)$ не был квазианалитическим, необходимо и достаточно, чтобы функция $M(r)$ удовлетворяла условию Левинсона (1).

Замечание. В теоремах 1–3 можно считать, что дуга γ в некоторой прямоугольной системе координат имеет уравнение $v = \varphi(u)$. Заменив $z = te^{i\varphi_0} + p$ $(t \in \gamma)$, приходим к ситуации, когда полученная кривая γ_1 имеет уравнение $y = g(x)$ $(|x| \leq a)$. Функция f из $C_\gamma(M_n)$ перейдет при этом в функцию из класса $C_{\gamma_1}(M_n)$. Так что, не умаляя общности, достаточно ограничиться рассмотрением дуг γ, задаваемых уравнением $y = g(x)$ $(|x| \leq a)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Levinson, N.** Gap and density theorems / N. Levinson. New York: Amer. Math. Soc., 1940.
2. **Евграфов, М. А.** Аналитические функции / М. А. Евграфов. Н.: Наука, 1965.
3. **Неванлинна, Р.** Однозначные аналитические функции / Р. Неванлинна. М.: Гостехиздат, 1941.
4. **Шабат, Б. В.** Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. I. М.: Наука, 1976.
5. **Koosis, P.** The logarifmic integral I / P. Koosis. Cambridge: University Press, 1988 (1998).
6. **Мандельбройт, С.** Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения / С. Мандельбройт. М.: Изд-во ИЛ, 1955.
7. **Леонтьев, А. Ф.** Последовательности полиномов из экспонент / А. Ф. Леонтьев. М.: Наука, 1980.
8. **Korevaar, J.** Approximation on curves by linear combinations of exponentials / J. Korevaar. // Approxim. Theory. New York, London: Acad. press, 1973. P. 387-399.
9. **Bang, T.** Om quasianalytiske functioner / T. Bang. Thesis. Univ. of Copenhagen. 1946.
10. **Дынькин, Е. М.** Псевдоаналитическое продолжение гладких функций. Равномерная шкала / Е. М. Дынькин // Математическое программирование и смежные вопросы. Теория функций и функциональный анализ (Труды VII Зимней школы Дрогобыч). М.: АН СССР. Центральный экономико-математический институт, 1976. С. 40–73.

ОБ АВТОРАХ

Гайсин Ахтяр Магазович, профессор, вед. науч. сотр. Ин-та математики с ВЦ УНЦ РАН, проф. каф. спецглав математики УГАТУ. Дипл. математик (БГУ, 1978). Д-р физ.-мат. наук по матанализу (Екатеренбург, 1996). Иследования в области теории функций комплексной переменной (целые функции, ряды экспонент, апроксимация экспонентами на различных множествах комплексной плоскости)

Кинзябулатов Ильнур Галиянович, аспирант каф. теории функций и функ. анализа БашГУ. Дипл. математик (2005, БашГУ). Иследования в области теории функций комплексной переменной (ряды экспонент, полнота систем экспонент, квазианалитические классы функций)