Уфа : УГАТУ, 2007 Вестник УГАТУ • Математика Т. 9, № 3 (21). С. 20–23

Теория функций

УДК 517.984.56

Ю. А. КОРДЮКОВ, А. А. ЯКОВЛЕВ

АДИАБАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЕЛЫ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Доказана асимптотическая формула для функции распределения собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами на двумерном торе в адиабатическом пределе, задаваемом слоением Кронеккера. Эта формула позволяет получить асимптотическую формулу для числа целых точек в эллипсе с центром в начала координат в пределе, когда эллипс растягивается в направлении одной из своих полуосей. *Адиабатические пределы, оператор Лапласа-Бельтрами, спектр, слоения, асимптотики, целые точки*

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что исследование спектральных задач для эллиптических дифференциальных операторов зачастую связано с различными задачами теории чисел. Классическим примером является задача об асимптотике функции распределения собственных значений оператора Лапласа на двумерном торе, которая эквивалентна задаче об асимптотике числа целых точек в круге радиуса R на плоскости при $R \to +\infty$. Исследование кратностей данных собственных значений приводит к задаче о количестве способов представления натурального числа в виде суммы квадратов.

В данной работе мы рассмотрим асимптотические спектральные задачи другого типа — так называемые адиабатические пределы, имеющие важное значение в геометрии и анализе на многообразиях. Мы покажем, что в простейшем случае изучение таких задач приводит к очень интересным задачам теории чисел, которые, насколько нам это известно, ранее не исследовались.

Результаты работы анонсированы в работе [2].

1. АДИАБАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЕЛЫ НА ТОРЕ

Рассмотрим двумерный тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ с координатами $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, определенными по модулю целочисленных сдвигов. Будем предполагать, что на нем задана риманова метрика по формуле $g = dx^2 + dy^2$.

Векторное поле $\widetilde{X}$ на $\mathbb{R}^2$, задаваемое формулой

$$\widetilde{X} = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

инвариантно при всех сдвигах, и потому оно определяет векторное поле X на $\mathbb{T}^2$. Траектории векторного поля X, которые являются образами параллельных прямых $\widetilde{L}_{(x_0,y_0)} = \{(x_0+t, y_0+t\alpha) : t \in \mathbb{R}\}$, $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, с угловым коэффициентом α при проекции $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$, задают так называемое слоение Кронеккера $\mathcal{F}$ на $\mathbb{T}^2$. В случае, когда α рационально, все траектории замкнуты. В случае, когда α иррационально, все траектории всюду плотны.

Пусть $F = T\mathcal{F}$ — касательное расслоение к $\mathcal{F}$: для любого $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ подпространство $F_{(x,y)} \subset T_{(x,y)}\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2$ одномерно и порождается вектором $(1,\alpha)$. Обозначим через H ортогональное дополнение к F по отношению к метрике g: для любого $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ подпространство $H_{(x,y)} \subset T_{(x,y)}\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2$ одномерно и порождается вектором $(-\alpha, 1)$. Тем самым, касательное расслоение $T\mathbb{T}^2$ раскладывается в прямую сумму $T\mathbb{T}^2 = F \oplus H$. Данное разложение индуцирует разложение метрики $g = g_F + g_H$, где g_F (соотв. g_H) — ограничение метрики на F (соотв. H). Определим однопараметрическое семейство g_h метрик на $\mathbb{T}^2$ по формуле

$$g_h = g_F + h^{-2} g_H, \quad h > 0.$$

В координатах (x,y) метрика g_h задается формулой

$$g_h = \frac{1+h^{-2}\alpha^2}{1+\alpha^2}dx^2 + 2\alpha\frac{1-h^{-2}}{1+\alpha^2}dxdy + \frac{\alpha^2+h^{-2}}{1+\alpha^2}dy^2.$$

Работа выполнсна при финансовой поддсржкс РФФИ (грант 06-01-00208)

Для любого $h > 0$ рассмотрим оператор Лапласа – Бельтрами Δ_h на $\mathbb{T}^2$, определяемый метрикой g_h:

$$\Delta_h = -\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 - \frac{h^2}{1+\alpha^2}\left(-\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2.$$

Для любого $h > 0$ оператор Δ_h имеет дискретный спектр:

$$\lambda_0(h) = 0 < \lambda_1(h) \leq \lambda_2(h) \leq \ldots$$

(с учетом кратностей). Введем функцию распределения собственных значений оператора Δ_h по формуле

$$N_h(\lambda) = \sharp\{i : \lambda_i(h) \leq \lambda\}.$$

В данной работе мы будем интересоваться ее асимптотическим поведением в адиабатическом пределе, то есть, при фиксированном $\lambda \in \mathbb{R}$ и при $h \to 0$.

2. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Оператор Δ_h имеет полную ортогональную систему собственных функций $\{u_{kl} \in C^\infty(\mathbb{T}^2) : (k,l) \in \mathbb{Z}^2\}$:

$$u_{kl}(x,y) = e^{2\pi i(kx+ly)}, \quad (x,y) \in \mathbb{T}^2,$$

с соответствующими собственными значениями

$$\lambda_{kl}(h) = \frac{(2\pi)^2}{1+\alpha^2}\left((k+\alpha l)^2 + h^2(-\alpha k + l)^2\right).$$

Таким образом, задача об асимптотическом поведении функции $N_h(\lambda)$ эквивалентна следующей задаче теории чисел:

Задача. Найти асимптотику при $h \to 0$ числа целых точек в эллипсе

$$\{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : (2\pi)^2\Big(\frac{1}{1+\alpha^2}(\xi+\alpha\eta)^2 + \frac{h^2}{1+\alpha^2}(-\alpha\xi+\eta)^2\Big) < \lambda\}. \quad (1)$$

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Наш основной результат состоит в вычислении главного члена асимптотики функции $N_h(\lambda)$ при $h \to 0$.

Теорема 1. *При любом фиксированном $\lambda \in \mathbb{R}$ и при $h \to 0$ имеет место асимптотическая формула:*

1. *При $\alpha \notin \mathbb{Q}$,*

$$N_h(\lambda) = \frac{1}{4\pi}h^{-1}\lambda + o(h^{-1}). \quad (2)$$

2. *При $\alpha \in \mathbb{Q}$ вида $\alpha = \frac{p}{q}$, где Н.О.Д.$(p,q) = 1$,*

$$N_h(\lambda) = h^{-1}\sum \frac{1}{\pi\sqrt{p^2+q^2}}\left(\lambda - \frac{4\pi^2}{p^2+q^2}k^2\right)^{1/2} + o(h^{-1}), \quad (3)$$

где суммирование ведется по всем $k \in \mathbb{Z}$, таким, что $|k| < \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\sqrt{p^2+q^2}$.

Можно дать доказательство теоремы 1, основываясь на общем результате об асимптотическом поведении функции распределения спектра оператора Лапласа на компактном многообразии, наделенном римановым слоением, в адиабатическом пределе, полученном в работе [1] (см. [4]).

В данной работе мы приведем другое доказательство теоремы 1, которое значительно проще и использует только элементарные факты анализа.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Введем новые координаты (ξ',η'), направив оси координат вдоль главных осей эллипса (1):

$$\xi' = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\xi + \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\eta,$$
$$\eta' = -\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\xi + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\eta, \quad (4)$$

Будем называть точку (ξ',η') целой, если ее координаты имеют вид (4) с $\xi = n \in \mathbb{Z}, \eta = m \in \mathbb{Z}$. Заметим, что точка (ξ',η') принадлежит эллипсу (1) тогда и только тогда, когда

$$|\xi'| < \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}, \quad |\eta'| < h^{-1}\sqrt{\frac{\lambda}{(2\pi)^2} - (\xi')^2}. \quad (5)$$

Очевидно, что при $h \to 0$ при $\alpha \notin \mathbb{Q}$ проекции целых точек, принадлежащих эллипсу (1), на ось ξ' заполняют всюду плотное множество, а при $\alpha \in \mathbb{Q}$ — конечное.

Предположим, что $\alpha = \frac{p}{q}$, где Н.О.Д.$(p,q) = 1$. Непосредственными вычислениями легко показать, что любая целая точка (ξ', η') имеет вид:

$$(\xi', \eta') = \left(\frac{k}{\sqrt{p^2+q^2}}, \frac{-pn_0 + qm_0 + (p^2+q^2)l}{\sqrt{p^2+q^2}} \right),$$

где $k, l \in \mathbb{Z}$, $(n_0, m_0) \in \mathbb{Z}^2$ — произвольное фиксированное решение уравнения $k = qn_0 + pm_0$. Из условий (5) получаем следующие условия на k и l:

$$\frac{|k|}{\sqrt{p^2+q^2}} < \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi},$$

$$-h^{-1}\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi^2} - \frac{k^2}{p^2+q^2}} - \frac{-pn_0+qm_0}{\sqrt{p^2+q^2}} < \\ < \sqrt{p^2+q^2}l < \\ < h^{-1}\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi^2} - \frac{k^2}{p^2+q^2}} - \frac{-pn_0+qm_0}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Таким образом, количество целых точек с фиксированным $\xi' = k/\sqrt{p^2+q^2}$ асимптотически равно

$$2\frac{h^{-1}}{\sqrt{p^2+q^2}}\sqrt{\frac{\lambda}{4\pi^2} - \frac{k^2}{p^2+q^2}} + o(h^{-1}).$$

Суммируя данные величины по всевозможным значениям ξ', получаем формулу (2).

Предположим, что $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Рассмотрим разрешающий оператор $e^{-t\Delta_h}$ задачи Коши для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta_h u$ в $\mathbb{R}^2$. Тем самым, для любого $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ функция $u(t) = e^{-t\Delta_h}u_0, t > 0$, является решением данного уравнения с начальным условием $u(0) = u_0$. Можно показать, что интегральное ядро оператора $e^{-t\Delta_h}$ на $\mathbb{R}^2$ имеет вид:

$$H_t(x,y,x_1,y_1) = \frac{h^{-1}}{4\pi t}\exp\left[-\frac{d_h(x,y;x_1,y_1)}{4t}\right],$$

где

$$d_h(x,y;x_1,y_1) = \frac{1}{1+\alpha^2}[(x-x_1+\alpha(y-y_1))^2 + \\ + h^{-2}(-\alpha(x-x_1)+y-y_1)^2].$$

Следовательно, для интегрального ядра оператора $e^{-t\Delta_h}$ на $\mathbb{T}^2$ получаем формулу

$$H_t(x,y,x_1,y_1) = \\ = \frac{h^{-1}}{4\pi t}\sum_{k,l=-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{d_h(x+k,y+l;x_1,y_1)}{4t}\right],$$

и потому след оператора $e^{-t\Delta_h}$ на $\mathbb{T}^2$ равен

$$\operatorname{tr} e^{-t\Delta_h} = \frac{h^{-1}}{4\pi t}\sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k+\alpha l)^2}{4t(1+\alpha^2)} - \frac{(-\alpha k+l)^2}{4th^2(1+\alpha^2)}}.$$

Поскольку ряд, стоящий в правой части последней формулы, сходится равномерно по $h \in (0,1]$ и для любых $(k,l) \neq (0,0)$ соответствующий член ряда стремится к нулю при $h \to +0$, получаем

$$\operatorname{tr} e^{-t\Delta_h} = \frac{h^{-1}}{4\pi t} + o(h^{-1}), \quad h \to +0.$$

С другой стороны, имеет место соотношение

$$\operatorname{tr} e^{-t\Delta_h} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t}\, d_\lambda N_h(\lambda),$$

поэтому доказательство теоремы 1 завершается при помощи следующей леммы (см. [3]).

Назовем функцией распределения любую неубывающую непрерывную слева функцию F на вещественной прямой, такую, что $\lim_{\lambda\to-\infty} F(\lambda) = 0$. Для любой функции распределения $F(\lambda)$ обозначим через $\tilde{F}(t)$ ее преобразование Лапласа.

Лемма 2. *Пусть F_n — такая последовательность функций распределения, что:*

(a) $F_n(\lambda) = 0, \lambda \le a$ *с некоторой постоянной a, не зависящей от n;*

(b) $|F_n(\lambda)| \le Ce^{-\varepsilon\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}$, *с постоянными C и ε, не зависящими от n;*

(c) *существует предел* $\lim_{n\to\infty}\tilde{F}_n(t) = \tilde{F}(t)$ *при любом $t > 0$, где $F(t)$ является функцией распределения.*

Тогда $\lim_{n\to\infty} F_n(\lambda) = F(\lambda)$ во всех точках непрерывности функции $F(\lambda)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Хотя асимптотические формулы (2) и (3), приведенные в теореме 1, имеют весьма различный вид, справедливо соотношение

$$\lim_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}} \sum_k \frac{1}{\pi\sqrt{p^2+q^2}}\left(\lambda - \frac{4\pi^2}{p^2+q^2}k^2\right)^{1/2} = \frac{1}{4\pi}\lambda.$$

Действительно, можно записать

$$\sum_k \frac{1}{\pi\sqrt{p^2+q^2}}(\lambda - \frac{4\pi^2}{p^2+q^2}k^2)^{1/2} =$$

$$= \sum_k g(\xi_k)\Delta\xi_k,$$

где

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi^2}(\lambda - \xi^2)^{1/2}, \quad \xi_k = \frac{2\pi}{\sqrt{p^2+q^2}}k.$$

Отсюда немедленно вытекает, что

$$\lim_{\substack{p\to+\infty \\ q\to+\infty}} \sum_k \frac{1}{\pi\sqrt{p^2+q^2}}(\lambda - \frac{4\pi^2}{p^2+q^2}k^2)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}}(\lambda - \xi^2)^{1/2}\,d\xi = \frac{1}{4\pi}\lambda.$$

2. Хорошо известно, что во многих задачах подобного рода главный член асимптотики выражается через объем некоторой области. Это же справедливо и в данном случае, но только здесь объем следует понимать в смысле некоммутативной геометрии, основы которой были разработаны французским математиком А. Конном. По поводу аналогичной формулы для произвольных римановых слоений на компактных многообразиях и ее интерпретации в терминах некоммутативной геометрии мы отсылаем читателя к работам [1,2].

3. Несмотря на то, что постановка задачи формулируется в элементарных терминах, нам неизвестно элементарное доказательство приведенного факта в случае иррационального α. Тем самым, в данном случае оказывается, что использование методов спектральной теории дифференциальных операторов является существенным при исследовании данной задачи.

4. Весьма интересным и нетривиальным представляется вопрос об оценке остатка в формулах (2) и (3). Вполне правдоподобно, что ответ на этот вопрос связан с более тонкими вопросами теории чисел, например, такими, как вопрос о приближении иррациональных чисел рациональными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kordyukov, Yu. A.** Adiabatic limits and spectral geometry of foliations / Yu. A. Kordyukov // Math. Ann. 1999. 313.P. 763–783.
2. **Kordyukov, Yu. A.** Adiabatic limits and the spectrum of the Laplacian on foliated manifolds / Yu. A. Kordyukov, A. A. Yakovlev // Proceedings of the Conference "C^*-algebras and elliptic theory. II" (Bedlewo, Poland, 2006). 2007.
3. **Шубин, М. А.** Плотность состояний самосопряженных эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами / М. А. Шубин // Труды сем. им И.Г. Петровского. 1978. Т. 3. С. 243 – 275.
4. **Yakovlev, A. A.** The spectrum of the Laplace-Beltrami operator on the two-dimensional torus in adiabatic limit / A. A. Yakovlev // E-print math.DG/0612695. 2006.

ОБ АВТОРАХ

Кордюков Юрий Аркадьевич, проф., вед. науч. сотр. ИМ УНЦ РАН. Дипл. математик (Московский гос. ун-т, 1984). Д-р физ.-мат. наук по диф. уравнениям (защ. в ИМ УНЦ РАН, Уфа, 2004). Иссл. в обл. спектральной теории диф. операторов, анализа и теории диф. уравнений на многообразиях.

Яковлев Андрей Александрович, асп. кафедры математики УГАТУ. Дипл. магистр в области прикладной математики и информатики (УГАТУ, 2004). Готовит диссертацию, посвященную изучению спектра дифференциальных операторов на многообразиях со слоениями под рук. проф. Ю. А. Кордюкова.